Wrocław, 25.03.2024

dr hab. Anna Wysoczańska-Kula
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr Agnieszki Zięby pt.
Infinitesimal Generators of Quadratic Harnesses

Rozprawa doktorska mgr Agnieszki Zięby liczy 133 stron i składa się z rozdziału wstępnego, dziesięciu rozdziałów stanowiących zasadniczą treść pracy, dwóch aneksów (jeden z nich zawiera spis symboli) oraz spisu literatury. Dysertacja jest napisana w języku angielskim i dotyczy operatorów infinitezymalnych procesów zwanych kwadratowymi harnessami (ang. *quadratic harnesses*). Wszystkie wyniki dotyczą procesów, które posiadają skończone momenty wszystkich rzędów.

1. Kontekst

Pojęcie kwadratowych harnessów zostało wprowadzone przez Bryca, Matysiaka i Wesołowskiego (Trans. AMS 2007) jako uogólnienie "zwykłych" harnessów, czyli (całkowalnych) procesów, dla których warunkowa wartość oczekiwana $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{s,u}]$ jest liniową kombinacją zmiennych X_s i X_u (z deterministycznymi współczynnikami, zależnymi od s, t i u). W przypadku kwadratowych harnessów żąda się, aby proces był całkowalny z kwadratem, spełniał warunek harnessu oraz aby drugi warunkowy moment (czyli warunkowa wartość oczekiwana X_t^2) był kwadratową funkcją X_s i X_u. Dla uniknięcia niejednoznaczności dodatkowo zakłada się normalizację: proces $(X_t)_{t\geq 0}$ jest wycentrowany $\mathbb{E}[X_t]=0$, a kowariancja wynosi $\mathbb{E}[X_tX_s]=\min\{t,s\}$.

W swojej pracy Bryc, Matysiak i Wesołowski wykazali, że (przy pewnych dodatkowych założeniach) znormalizowane kwadratowe harnessy są procesami Markova i są jednoznacznie wyznaczone przez zestaw pięciu parametrów. Procesy takie są tradycyjnie oznaczane jako $QH(\eta,\theta,\sigma,\tau;q)$, gdzie $\eta,\theta\in\mathbb{R}$, $\sigma,\tau\geq 0$ i $q\leq 1+2\sqrt{\sigma\tau}$. Przykładami kwadratowych harnessów są procesy Wienera $QH(0,0,0,0;1)$, Poissona $QH(0,\lambda^{-1/2},0,0;1)$, Meixnera $QH(0,\theta,0,\tau;1)$ czy q-ruchy Browna $QH(0,0,0,0;q)$.

Kwadratowe harnessy, tak jak wszystkie procesy Markova, posiadają swoje (prawe i lewe) generatory infinitezymalne. Na przykład, wersja prawa to operator zdefiniowany jako granica prawostronna

$$(\mathbb{A}_t^+ f)(x)=\lim_{h\to 0^+}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(y)-f(x)}{h}\mathbb{P}_{t,t+h}(x,dy),$$

gdzie $t\geq 0$, a f jest funkcją, dla której granica po prawej istnieje. Generatory infinitezymalne kwadratowych harnessów były badane m.in. w pracach [23]-[25], gdzie – w kilku szczególnych przypadkach – znaleziono dla nich całkowo-różniczkową reprezentację

$$(\mathbb{A}_t^\pm f)(x)=\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)\nu_{x,t}(dy). \tag{1}$$

W powyższym wzorze f jest wielomianem, x spełnia warunek $1+\eta x+\sigma x^2\neq 0$, a $\nu_{x,t}$ – pewną miarą probabilistyczną. Praca [23] gwarantuje istnienie reprezentacji (1) dla generatorów procesów q-Meixnera ($\eta=\sigma=0$, $\theta\in\mathbb{R}$, $\tau\geq 0$, $q\in(-1,1)$), natomiast w pracy [24] istnienie jest wykazane przy założeniu, że $\eta,\theta\in\mathbb{R}$, $\sigma,\tau\geq 0$, $\sigma\tau\neq 1$ i $q=-\sigma\tau$. W [25] opisano reprezentację dla generatorów procesu bi-Poissonowskiego $QH(\eta,\theta;0,0;q)$ $(1+\eta\theta=\max\{q,0\})$.

awk

2. Zawartość pracy

Celem rozprawy doktorskiej mgr Zięby jest uogólnienie wyników z prac [23]-[25] poprzez wykazanie wzoru (1) dla dużej klasy parametrów:

$$\eta, \theta \in \mathbb{R}, \quad \sigma, \tau \geq 0, \quad \sigma\tau \in [0,1), \quad q \in [-1, 1-2\sqrt{\sigma\tau}].$$

W Rozdziale 1 Autorka zbiera podstawowe informacje o kwadratowych harnessach, wprowadza dodatkowe obiekty niezbędne w dalszej części pracy, opisuje motywacje, precyzuje założenia, formułuje główny wynik rozprawy i skrótowo opisuje strukturę dowodu.

Rozdział 2 zawiera dowód głównego rezultatu (Theorem 1.6.1) przy dodatkowych technicznych założeniach (Assumptions A1-A3). Najpierw dowód zostaje przeprowadzony w sytuacji, gdy $\sigma\tau = 0$. Główna idea dowodu polega na "zakodowaniu" działania operatora $\mathbb{A}_t$, poprzez związany z nim t.zw. pre-generator $\mathbb{H}_t$, w postaci operacji na algebrze $\mathcal{Q}$ nieskończonych ciągów wielomianów jednej zmiennej ze specjalnym mnożeniem, wzór (2.1). Pre-generator jest (zasadniczo jedynym) rozwiązaniem pewnego równania q-komutacyjnego wiążącego elementy w algebrze $\mathcal{Q}$. Autorka znajduje jawny wzór na $\mathbb{H}_t$, w którym kluczową rolę pełni $\mathbb{W}(z,t) = (W_n(x;z,t))_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{Q}$, ciąg wielomianów (zmiennej x) spełniający pewną rekurencję trójczłonową (zależną od parametrów η, θ, σ, τ, q, z i t). Wielomiany $(W_n(.;z,t))_n$ są zawsze słabo ortogonalne względem pewnego funkcjonału momentowego, a przy dodatkowym założeniu, że $1+\eta+\sigma x^2 > 0$ z twierdzenia Favarda wynika istnienie dla nich miary ortogonalizującej $\nu_{x,t}$ (miara ta jest zależna także od parametrów $\eta, \theta, \sigma, \tau, q$).
Dowód Twierdzenia 1.6.1 kończy obserwacja, że odpowiednia zmiana parametrów kwadratowego harnessu i przeskalowanie czasu pozwala z przypadku $\sigma\tau = 0$ wywnioskować wzór na operator infinitezymalny dla $\sigma\tau > 0$.
Rezultaty uzyskane w tej części pracy w ciekawy sposób łączą probabilistykę, teorię operatorów i analizę harmoniczną. Widać wyraźnie inspirację Autorki wynikami z pracy [23], które pozwalają przepisać badany, typowo operatorowy problem na język operacji algebraicznych na algebrze ciągów wielomianów. Jednocześnie przypadek badany w rozprawie wymagał wielu samodzielnych pomysłów.

Celem rozdziału 3 jest wykazanie (Twierdzenie 3.3.1), że dla kwadratowych harnessów $QH(\eta,\theta;\sigma,\tau;q)$ z $q \in [-1, 1-2\sqrt{\sigma\tau}]$ oraz dla $QH(\eta,\theta;0,0;1)$ dziedzina operatorów $\mathbb{A}_t^{\pm}$ zawie ra funkcje ograniczone z ograniczoną drugą pochodną. Zasadniczym elementem dowodu jest wykazanie słabej zbieżności, przy $h \to 0^+$, miar $\frac{(y-x)^2}{h}\mathbb{P}_{t,t+h}(x,dy)$ i $\frac{(y-x)^2}{h}\mathbb{P}_{t-h,t}(x,dy)$ do miary $\frac{1+\eta x+\sigma x^2}{1+\sigma t}\nu_{x,t}$. Ten fragment rozprawy wydaje się dość bezpośrednim (choć wartym odnotowania) uogólnieniem dowodu Twierdzenia 1.1(i) z pracy [23], z uwzględnieniem modyfikacji miary z Twierdzenia 4.1 [24].

Rozdziały 4-6 są poświęcone wykazaniu, że założenia A1-A3 są czysto techniczne, ponieważ są spełnione zawsze, gdy $\sigma\tau = 0$ (jak zakłada się w podstawowej wersji dowodu w Rozdziale 2) i $q \in [-1,1]$. Założenia te postulują istnienie pewnych szczególnych elementów $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ w algebrze $\mathcal{Q}$. Autorka podaje explicite wyrażenia na $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$, a następnie sprawdza, że mają one oczekiwane własności. Powyższe stwierdzenie brzmi dość niewinnie, ale znalezienie wzorów na $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ okazuje się zajęciem wysoce nietrywialnym (zajmuje 32 strony), wymagającym wprowadzenia wielu obiektów pośrednich i zbadania ich własności. Trochę brakuje mi tutaj heurezy $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$, bo wyskakują trochę jak przysłowiowy królik z kapelusza, ale nie umniejsza to faktu, że ta część pracy pokazuje z jednej strony niewątpliwie dużą sprawność i pomysłowość Autorki w manipulowaniu obiektami z algebry $\mathcal{Q}$, a z drugiej strony ogromną wytrwałość w dążeniu do rozwiązania problemu.

W rozdziałach 7-9 Autorka opisuje konkretne przykłady: przypadek wolny (gdy $q = -\sigma\tau$), antyklasyczny (gdy $q = -1$) i klasyczny (gdy $q = 1 - \sqrt{\sigma\tau}$). Pokazuje w nich, że wyniki

awu

uzyskane jej metodą zgadzają się z tymi uzyskanymi wcześniej oraz że czasami bezpośrednimi rachunkami można dostać wyniki dokładniejsze (np. większą dziedzinę generatora). Podaje także alternatywne reprezentacje generatorów. Takie spojrzenie wstecz na uzyskane wyniki i zbadanie mocy wykazanych twierdzeń jest bardzo cenne i dobrze świadczy o kulturze matematycznej Autorki.

3. Ocena rozprawy

W mojej ocenie rozprawa doktorska mgr Agnieszki Zięby jest bardzo ciekawa, a rozpatrywana problematyka – z pogranicza probabilistyki i analizy harmonicznej – niełatwa. W pracy udało się uogólnić znane wyniki na szerszy obszar parametrów, a jednocześnie zaproponować jedną metodę, która działa dla wielu przypadków wcześniej rozpatrywanych indywidualnie.

Pod względem redakcyjnym oceniam pracę bardzo wysoko. Jest ona napisana w sposób przejrzysty, językiem poprawnym, ładnym i przyjemnym do czytania. Jest też starannie zredagowana (znalazłam tylko jedną literówkę!). W wielu miejscach Autorka ładnie szkicuje kontekst i motywacje. Praca zawiera także wiele cennych uwag, które pomagają czytelnikowi zrozumieć sposób myślenia Autorki, jej cele i napotkane problemy. W tym sensie praca zredagowana jest w sposób bardzo dojrzały.

W zasadzie jedynym mankamentem rozprawy jest brak w wielu miejscach dokładniejszych przeliczeń i uzasadnień. Rozumiem, że dodanie tych obliczeń znacznie zwiększyłoby objętość (i tak dość długiej) pracy i że skrótowość wielu rozumowań jest standardem w publikacjach naukowych. Uważam jednak, że w rozprawie doktorskiej należałoby zawrzeć tyle szczegółów, aby czytelnik mógł śledzić tekst bez konieczności samodzielnego wykonania rachunków czy wieloetapowych weryfikacji.

4. Podsumowanie

Podsumowując, uważam, że mgr Agnieszka Zięba w przedstawionej rozprawie wykazała się dużą wytrwałością w rozwiązaniu nietrywialnych problemów matematycznych, wymagających zaawansowanej wiedzy z probabilistyki i analizy harmonicznej. Jej wyniki są oryginalne i ciekawe, a ich dowody – złożone i pomysłowe. Uważam, że przedłożona rozprawa spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnoszę o dopuszczenie Doktorantki do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Uważam też, że praca jest warta wyróżnienia.

A. Kyprianska-Uhl