dr hab. Tomasz Krawczyk
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński
ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków
krawczyk@tcs.uj.edu.pl

13 grudnia 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Joanny Chybowskiej-Sokół pt. „Kolorowania geometrycznych grafów przecięć”

Omówienie zawartości rozprawy

Rozprawa doktorska mgr Joanny Chybowskiej-Sokół koncentruje się na kliku problemach z pogranicza geometrii dyskretnej i algorytmiki. Rozprawę można podzielić na dwie części: w pierwszej, bardziej technicznej, rozważane są spełniające rozmaite obostrzenia kolorowania płaszczyzny, w drugiej części przedstawiono szereg algorytmów (off-line oraz on-line) kolorowania grafów przecięć prostych obiektów geometrycznych, takich jak przedziały czy koła na płaszczyźnie. Część ta w pomysłowy sposób wykorzystuje techniczne wyniki uzyskane w pierwszej części rozprawy.

Kolorowania płaszczyzny. Przedmiotem badań pierwszej części pracy są kolorowania płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Formalnie, dla ustalonego zbioru liczb rzeczywistych dodatnich D definiujemy graf G_D, którego zbiorem wierzchołków są wszystkie punkty płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ a zbiorem krawędzi wszystkie pary punktów płaszczyzny w odległości będącej liczbą w zbiorze D. Naszym celem jest *pokolorowanie* grafu G_D, to jest takie przypisanie wierzchołkom grafu G_D kolorów, by każde dwa połączone krawędzią otrzymały różny kolor. Minimalną liczbę kolorów niezbędną do pokolorowania G_D nazywamy *liczbą chromatyczną* G_D. Problem szacowania liczby chromatycznej grafów G_D był rozważany przez badaczy zajmujących się różnymi dziedzinami matematyki, takimi jak kombinatoryka, topologia czy teoria miary. Najbardziej znanym wśród nich jest problem szacowania liczby chromatycznej grafu $G_{\{1\}}$ (znany jako problem Hadwigera-Nelsona): aktualnie wiadomo, że liczba chromatyczna grafu $G_{\{1\}}$ jest nie większa niż 7 i nie jest mniejsza niż 5. Ponadto, rozważa się wiele różnych wariantów kolorowań grafu G_D i w obszar tych badań wpisuje się pierwsza część tej rozprawy.

Rozdział 3 pracy koncentruje się na badaniu własności chromatycznych grafu $G_{[1,\sigma]}$ w zależności od parametru $\sigma > 1$. Wybór tych grafów nie jest przypadkowy – jak okaże się w kolejnych częściach pracy kolorowania grafu $G_{[1,\sigma]}$ będą miały kluczowe znaczenie dla konstrukcji wydajnych algorytmów on-line kolorowania grafów przecięć prostych obiektów geometrycznych.

Rozdział 3 wprowadza pewną ogólną metodę kolorowania grafów $G_{[1,\sigma]}$. W metodzie tej płaszczyznę pokrywa się rozłącznymi heksagonami o średnicy 1, przy czym brzegi heksagonów definiuje się tak, aby odległość dwóch punktów z heksagonu była istotnie mniejsza niż 1. Pokrycie takie nazywamy *kafelkowaniem płaszczyzny.* Następnie, rozważa się kolorowania płaszczyzny, w których punkty każdego heksagonu otrzymują ten sam kolor; kolorowanie grafu $G_{[1,\sigma]}$ sprowadza się wówczas do takiego pokolorowania heksagonów, aby każde dwa o tym samym kolorze znajdowały się w odległości co najmniej σ. W zaprezentowanej metodzie autorzy (Grytczuk, Junosza-Szaniawski, Chybowska-Sokół i Węsek) ograniczają się do kolorowań, w których heksagony każdego koloru „powtarzają się” na płaszczyźnie według pewnego wzorca, zależnego od dwóch parametrów określających wektor translacji pomiędzy heksagonami tego samego koloru. Okazuje się, że metoda ta jest uniwersalna i bardzo użyteczna: metodą tą można uzyskać wiele najlepszych ograniczeń górnych na liczbę chromatyczną grafu $G_{[1,\sigma]}$, udowodnionych wcześniej przez Exoo czy Lonca, co więcej, dla wielu parametrów σ metoda ta pozwala skonstruować kolorowania (często z pomocą komputera) dające najlepsze aktualnie znane ograniczenia.

W dalszej części rozdziału 3 rozważane są tak zwane *b-warstwowe kolorowania* grafu $G_{[1,\sigma]}$. W kolorowaniach b-warstwowych wymaga się, aby każdy wierzchołek $G_{[1,\sigma]}$ otrzymał krotkę złożoną z b kolorów tak, aby każde dwa wierzchołki połączone krawędzią w $G_{[1,\sigma]}$ otrzymały różne kolory (na wszystkich współrzędnych obu krotek). Ponownie naszym celem jest zminimalizowanie liczby wszystkich kolorów k występujących na wierzchołkach $G_{[1,\delta]}$, która w sposób oczywisty rośnie wraz z liczbą warstw b. Parametrem, który mierzy wydajność takich kolorowań, jest *ułamkowa liczba chromatyczna* grafu $G_{[1,\sigma]}$, zdefiniowana jako infimum $\frac{k}{b}$ wzięte po wszystkich b-warstwowych k-kolorowaniach grafu $G_{[1,\sigma]}$. Oczywiście, ułamkowa liczba chromatyczna może być istotnie lepsza od zwykłej liczby chromatycznej. Zaprezentowana w pracy metoda b-warstwowego kolorowania płaszczyzny rozszerza opisaną wcześniej metodę kolorowania heksagonów. Tym razem, płaszczyznę pokrywa się b kafelkowaniami, zwanymi *warstwami*, które są „równomiernie” poprzesuwane względem siebie w pionie i poziomie. Kolorowane są heksagony ze wszystkich warstw, tym razem jednak ten sam kolor może być przypisany heksagonom z różnych warstw, o ile odległość między tymi heksagonami jest silnie większa od σ. Oczywiście, na krotkę kolorów każdego punktu składają się kolory heksagonów z kolejnych kafelkowań pokrywających ten punkt. Wprowadzenie wielu warstw w kolorowaniu rozszerza przestrzeń możliwych wektorów translacji dla heksagonów tego samego koloru, co pozwala otrzymywać coraz lepszy stosunek $\frac{k}{b}$ osiągany przez b-warstwowe k-kolorowania grafu $G_{[1,\sigma]}$ (i tym samym uzyskiwać coraz lepsze ograniczenia na ułamkową liczbę chromatyczną grafu $G_{[1,\sigma]}$).

Ostatnim wariantem kolorowania płaszczyzny rozważanym w rozdziale 3 są tak zwane $L^*(2,1)$-etykietowania płaszczyzny. Podobnie, w wariancie tym kolorowane są heksagony (kolory utożsamiamy z liczbami naturalnymi), tym razem wymagamy jednak, by różnica kolorów heksagonów w odległości $\leqslant \sigma$ była większa bądź równa od 2, zaś w odległości $(\sigma, 2\sigma]$ większa bądź równa 1. Metody $L^*(2,1)$-etykietowania płaszczyzny są podobne do wcześniej opisanych i znów dla wielu przypadków pozwalają uzyskać najlepsze aktualnie znane ograniczenia górne. Ważne są tutaj szczególnie b-warstwowe $L^*(2,1)$-etykietowania, które są dalej wykorzystane przez algorytmy on-line $L(2,1)$-etykietujące grafy przecięć kół.

Rozdziały 4 oraz 5 poświęcone są problemowi *kolorowania on-line* grafów przecięć prostych obiektów geometrycznych. Klasyczne algorytmy *off-line* kolorowania grafów znają na wejściu cały graf i kolorują jego wierzchołki dysponując całą wiedzą o strukturze grafu. W scenariuszu *on-line* wierzchołki grafu pojawiają się stopniowo, jeden po drugim, *algorytm on-line* ma pokolorować je tak, aby każdy wierzchołek otrzymywał kolor już w momencie pojawienia się w grafie. Algorytmy on-line nie znają całego grafu w momencie kolorowania kolejnych wierzchołków i brak tej wiedzy powoduje, że algorytmy te wykorzystują zazwyczaj więcej kolorów od algorytmów off-line.

Rozdział 4 pracy skupia się na kolorowaniach on-line grafów przecięć kół. Zakładamy więc, że koła pojawiają się na płaszczyźnie stopniowo, jedno po drugim, algorytm on-line koloruje każde koło w momencie jego pojawienia się tak, aby każde dwa przecinające się koła otrzymały różne kolory oraz tak, aby liczba wszystkich wykorzystanych kolorów była możliwie najmniejsza. W tym przypadku wydajność algorytmów mierzymy podając stosunek liczby wykorzystanych kolorów do liczby klikowej grafu wejściowego – stosunek ten nazywamy *współczynnikiem kompetytywności* algorytmu on-line. Erlebach i Fiala wykazali, że nie istnieje algorytm zapewniający ograniczony współczynnik kompetytywności w przypadku, gdy prezentowane koła mogą mieć dowolne średnice. Algorytm taki istnieje w przypadku, gdy ograniczymy się do σ-kół, to jest do kół, których średnica leży w zbiorze $[1, \sigma]$. Fiala, Fishkin, i Fomin podali algorytm on-line kolorowania σ-kół, który na bazie pewnego ustalonego kolorowania heksagonalnego grafu $G_{[1,\sigma]}$ przypisuje kolory kolejnym kołom. Współczynnik kompetytywności ich algorytmu jest równy liczbie kolorów wykorzystanych w tym kolorowaniu grafu $G_{[1,\sigma]}$. Istotny przełom w badaniach nad tym problemem został dokonany przez Junoszę-Szaniawskiego, Rzążewskiego, Chybowską-Sokół i Węska, którzy w sprytny sposób zmodyfikowali algorytm Fiali, Fishkina, i Fomina. Główny ich pomysł polegał na tym, aby zwykłe kolorowanie heksagonalne płaszczyzny zastąpić kolorowaniem b-warstwowym. Zaproponowany przez nich algorytm on-line kolorowania σ-kół ma wówczas współczynnik kompetytywności równy $\frac{k}{b}$ o ile tylko dysponujemy b-warstwowym k-kolorowaniem heksagonalnym grafu $G_{[1,\sigma]}$. W szczególności, zaprezentowana przez nich metoda pozwala skonstruować algorytm on-line kolorujący koła jednostkowe (o średnicy 1), którego współczynnik kompetytywności jest istotnie mniejszy od 5 (współczynnik ten osiągany był przez najlepszy z wcześniejszych algorytmów on-line kolorujących koła jednostkowe). Zaproponowana metoda jest dość uniwersalna. Dla przykładu, wyniki dotyczące $L^*(2,1)$-etykietowań grafu $G_{[1,\sigma]}$ otrzymane w części pierwszej pozwalają otrzymać aktualnie najlepsze algorytmy on-line $L(2,1)$-etykietujące grafy przecięć σ-kół.

W rozdziale 5 pracy rozważany jest problem kolorowania on-line przedziałów. W ogólnym przypadku, gdy długość prezentowanych przedziałów jest dowolna, Kierstead i Trotter skonstruowali algorytm on-line o współczynniku kompetytywności 3 i wykazali, że algorytm o lepszym współczynniku nie istnieje. Inaczej jest, gdy założymy, że długość prezentowanych przedziałów spełnia pewne ograniczenia. Dla przykładu, wiadomo jest, że istnieje 2-kompetytywny algorytm on-line (First-Fit) kolorowania przedziałów jednostkowych i że w klasie tej nie istnieje algorytm o współczynniku istotnie mniejszym od $\frac{3}{2}$. Pomimo intensywnych badań różnych grup badawczych nie udało się poprawić żadnego z tych prostych ograniczeń. W tym kontekście dość ciekawie prezentują się główne wyniki rozdziału 5. Z jednej strony zapewniają one istnienie algorytmu on-line $(2+\sigma)-$kompetytywnego kolorującego przedziały o długościach w przedziale $[1,\sigma]$. A zatem, dla ustalonego $\sigma < 2$ algorytm on-line kolorujący przedziały o długościach w zbiorze $[1,\sigma]$ ma współczynnik kompetytywności istotnie lepszy niż 3, a więc jest lepszy od algorytmu Kiersteada i Trottera. Z drugiej strony, dla dowolnego $\sigma > 1$ nie istnieje algorytm $\frac{5}{3}$-kompetytywny kolorujący przedziały o długościach w zbiorze $[1,\sigma]$. Metoda kolorowania σ-przedziałów jest w zasadzie taka sama jak σ-kół i opiera się na b-warstwowym kolorowaniu grafu $G_{[1,\sigma]}$ zawężonego do prostej rzeczywistej.

Rozdział 6 poświęcony jest problemowi $L(2,1)$-etykietowania grafów przecięć kół. W problemie tym chcemy przypisać liczby naturalne wierzchołkom grafu tak, aby liczby na sąsiednich wierzchołkach różniły się co najmniej o 2, zaś na wierzchołkach, które mają wspólnego sąsiada, co najmniej o 1. Oczywiście, celem jest tutaj znalezienie najmniejszej liczby naturalnej λ takiej, że graf G posiada $L(2,1)$-etykietowanie liczbami naturalnymi ze zbioru $\{1,\ldots,\lambda\}$. Liczbę tę oznaczamy przez $\lambda(G)$. Hipoteza Griggsa i Yeha mówi, że $\lambda(G) \leqslant \Delta^2(G)$ dla każdego grafu G takiego, że $\Delta(G) \geqslant 2$, gdzie $\Delta(G)$ jest maksymalnym wierzchołkiem grafu G. Hipoteza ta jest udowodniona przez Haveta, Reeda i Sereniego dla grafów G takich, że $\Delta(G) > 10^{69}$.

Główne twierdzenia rozdziału 6, bazującego na pracy wspólnej z Junoszą-Szaniawskim i Rzążewskim, zapewniają, że $\lambda(G) \leqslant \frac{4}{5}\Delta^2(G) + 25\Delta(G) + 20$ jeżeli G jest grafem przecięć kół, oraz $\lambda(G) \leqslant 14\Delta(G) + 11$ jeżeli G jest grafem przecięć kół jednostkowych. Wyniki te potwierdzają hipotezę Griggsa i Yeha dla grafów przecięć kół o maksymalnym stopniu $\geqslant 126$ oraz dla grafów przecięć kół jednostkowych o maksymalnym stopniu $\geqslant 15$. Z drugiej strony, podana jest konstrukcja rodziny grafów przecięć kół G_k o tej własności, że $\Delta(G_k) = 4k+1$ oraz $\lambda(G_k) = 3\Delta(G_k) - 4$. Jak dotychczas nie są znane konstrukcje grafu przecięć kół, w których λ rośnie ponadliniowo w zależności od Δ.

Ocena rozprawy

Przedstawiona do recenzji praca zawiera kilka bardzo dobrych wyników dotyczących różnych wariantów problemu kolorowania płaszczyzny oraz kolorowania grafów przecięć dwuwymiarowych obiektów geometrycznych. Wyniki te są od siebie różne, tzn. znajdujemy tam wyniki natury technicznej jak i te oparte na ciekawych i oryginalnych pomysłach. Pierwsza część pracy ma charakter bardziej techniczny. Zaprezentowane w tej części metody kolorowania płaszczyzny pozwalają uzyskać dobre, w wielu przypadkach najlepsze znane ograniczenia na liczbę kolorów dla różnych wariantów kolorowania grafu $G_{[1,\sigma]}$. Wyniki te są wykorzystane w części drugiej rozprawy do konstrukcji najlepszych aktualnie znanych algorytmów on-line kolorowania oraz $L(2,1)$-etykietowania grafów przecięć σ-kół (w szczególności kół jednostkowych). Na szczególną uwagę zasługuje piękny pomysł wykorzystania kolorowań warstwowych do konstrukcji tych algorytmów. Warty odnotowania jest również pomysł przeniesienia warstwowych kolorowań płaszczyzny na warstwowe kolorowania prostej rzeczywistej, który pozwala uzyskać wydajne algorytmy on-line kolorowania przedziałów (najlepsze dla przedziałów o długościach w zbiorze $[1, 2-\varepsilon])$. Docenić należy również koncept „cieniowania” heksagonów, który pozwala znacząco poprawić stałą addytywną przy szacowaniu współczynników kompetytywności zaprezentowanych algorytmów on-line.

Walorem przedstawionej do oceny pracy jest jej spójność tematyczna. Wszystkie wyniki pracy są ze sobą ściśle powiązane, wyniki jednej części pracy mają wpływ i inspirują badania z innej części rozprawy. Sama praca jest bardzo dobrze zredagowana, z obszernym odniesieniem do wyników uzyskanych przez innych badaczy zajmujących się podobną tematyką. Praca zawiera nieliczne błędy edytorskie.

Rozprawa doktorska bazuje na trzech już opublikowanych pracach, spośród których dwie są zamieszczone w czasopismach o wysokim prestiżu, to jest w *Discrete & Computational Geometry* oraz *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Wszystkie prace, na których bazuje rozprawa, są wieloautorskie – pewnym jej mankamentem jest brak samodzielnych wyników autorki.

Konkluzja

Uważam, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wszystkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i stanowi wystarczającą podstawę nadania mgr Joannie Chybowskiej-Sokół stopnia doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki.