OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ MARCINA ZUBILEWICZA

LOKALNE NIEZMIENNIKI UNIMODULARNE I SYMPLEKTYCZNE TKANIN

Olsztyn, 06.10.2023

Prof. dr hab. Aleksy Tralle

Uniwersytet Wamińsko-Mazurski

1. Omówienie rozprawy

Rozprawa doktorska mgr Marcina Zubilewicza jest poświęcona lokalnym niezmiennikom *tkanin*, czyli rozmaitościom wyposażonym w n foliacji $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n$ spełniających naturalne warunki "generyczności" lub transwersalności. Tematyka tkanin zapoczątkowana prez Blaschkego okazała się przydatna w wielu modelach fizyki matematycznej, a ponadto, jest naturalnym uogólnieniem klasycznych teorii rozmaitości sfoliowanych za pomocą pary foliacji, których liście dziedziczą strukturę geometryczną, na przykład, symplektyczną (Kotschik) lub lagranżowską (Tabachnikov). Prace tych autorów są cytowane i omawiane w rozprawie i jak się wydaje, są głównym źródłem inspiracji dla doktoranta. Są to bardzo dobre prace wybitnych matematyków, zatem uogólnienie tych rezultatów jest bardzo dobrym wyborem.

Celem nadrzędnym rozprawy jest lokalna klasyfikacja tkanin. Problem postawiony w rozprawie też jest naturalny i klasyczny w geometrii różniczkowej: na przykład, krzywizna seksyjna metryki Riemanna jest niezmiennikiem lokalnym, zatem istnieje "lokalna geometria riemannowska". Z drugiej strony, w geometrii symplektycznej nie ma lokalnych niezmienników (twierdzenie Darboux).

Autor rozprawy rozważa następujące klasy tkanin i struktur:

(1) M jest gładką rozmaitością z ustaloną formą objętości Ω i zadaną tkaniną $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n)$ spełniającą warunek

$$\operatorname{codim} \cap_{i=1}^{n} T_p\mathcal{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} T_p\mathcal{F}_i = m = \dim M.$$

(2) (M, ω) jest rozmaitością symplektyczną, a $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ jest parą foliacji, których liście są lagranżowskie.

(3) (M,ω) jest rozmaitością symplektyczną z tkaniną, której foliacje składają się z podrozmaitości symplektycznych.

Omówię każde z tych zagadnień po kolei.

I

Wyniki rozprawy w obrębie zagadnienia (1) dotyczą budowy lokalnych niezmienników tkanin na rozmaitości z ustaloną formą objętości za pomocą koneksji afinicznych zgodnych zarówno z tkaniną jak i formą Ω. Zgodność jest rozumiana według Defincji 2.3 rozprawy: są to warunki na macierz 1-form beztorsyjnej koneksji w dowolnym $(\mathcal{W},\Omega)$-koreperze (wg. Definicji 2.1). Istnienie takiej koneksji jest udowodnione w Stwierdzeniu 2.4 pracy doktorskiej. W przypadku tkanin kowymiaru 1 taka koneksja jest tylko jedna (Wniosek 2.7). Rola tej koneksji jest uwidoczniona w podrozdziale 2.1.5. Ogólnie, dla n-tkaniny na (M,Ω) wprowadza się *tensor niejednorodności*

$$\mathcal{K}(\mathcal{W},\Omega)=\sum_{i\neq j}\sum_{k=m_i+1}^{m_{i+1}}\sum_{l=m_j+1}^{m_{j+1}}\frac{\partial\log|h|}{\partial x_k\partial x_l}dx_k dx_l.$$

Tensor niejednorodności jest niezmiennikiem: lokalna trywialność tkaniny jest równoważna z $\mathcal{K}=0$. Istotnym osiągnięciem kandydata jest znalezienie interpretacji geometrycznej tensora $\mathcal{K}$: jest to tensor Ricci skonstruowanej koneksji (Twierdzenie 2.14). Teoria rozwinięta przez autora w podrozdziale 2.1 pozwala na uzyskanie ważnych wyników klasyfikacyjnych (Twierdzenia 2.18, 2.20 i 2.24). Sformułowania tych twierdzeń są bardzo techniczne, więc pozwolę je sobie streścić: lokalna klasyfikacja n-tkanin redukuje się do klasyfikacji kiełków form Ω ze względu na działanie grupy dyfeomorfizmów zachowujących strukturę ustalonej tkaniny. Dla ustalonej n-tkaniny i tensora A o własnościach tensora njejednorodności istnieje jedna i tylko jedna Ω "zgodna" z $\mathcal{W}$ i $\mathcal{K}(\mathcal{W},\Omega)=A$.

II

Zagadnienie (2) dotyczące struktur bilagranżowskich jest analizowane według schematu myślowego podobnego do użytego w (1): badane są koneksje naturalnie związane ze strukturą pary foliacji lagranżowskich. Na przykład, Twierdzenie 3.6 podaje warunki na płaskość takiej koneksji.

III

Rezultaty dotyczące zagadnienia (3) można streścić tak: rozważa się 2-tkanina kowymiaru $(2n,2n)$ na rozmaitości symplektycznej wymiaru

$4n$ i dowodzi się, że na takiej rozmaitości istnieje jedna i tylko jedna koneksja afiniczna ($\mathcal{W}$-koneksja) w pewien sposób związana ze strukturą tkaniny (Stwierdzenie 4.2 rozprawy). Związek ten jest poprzez rzutowania na wiązki Whitneya zdeterminowane przez warunek symplektyczności. Zaletą tej koneksji jest to, że jest ona niezmiennicza ze względu na symplektomorfizmy zachowujące obie foliacje. Jest to bardzo dobry wynik, umożliwiający konstruowanie niezmienników struktury (moim zdaniem, zasługuje na nazwę "twierdzenie"). Lematy 4.9 i 4.10 rozprawy charakteryzują jej płaskość i beztorsyjność. Autor podaje też przykład 2-tkaniny, której $\mathcal{W}$-koneksja nie jest ani prawie symplektyczna, ani beztorsyjna. Stąd widać, że $\mathcal{W}$-koneksja powinna odegrać bardzo istotną rolę w teorii tkanin symplektycznych, a jej zbadanie jest ważnym osiągnięciem autora. Twierdzenie 4.11 rozprawy jest jednym z kluczowych, ponieważ określa postać normalną struktury symplektycznej w przypadku, gdy $\mathcal{W}$-koneksja jest płaska i beztorsyjna. Pewnym mankamentem rozprawy jest to, że trudno ocenić, jak mocno warunek płaskości i beztorsyjności zawęża klasę 2-tkanin symplektycznych.

Rozprawa doktorska mgr Zubilewicza zawiera też inne ważne wyniki oraz przykłady zastosowań, których opis tu pomijam.

2. Ocena

2.1. Ocena tematyki rozprawy. Wybór tematu badawczego uważam za trafny. Naturalność pytań uogólniających oraz potencjalnie liczne zastosowania w fizyce matematycznej uzasadniają podjęcie badań w zakresie poszukiwania niezmienników lokalnych tkanin, szczególnie tych z dodatkową strukturą (na przykład, symplektyczną). O ważności tematyki świadczą też prace innych autorów, w tym tak znakomitych matematyków jak Kotschik i Tabachnikov.

2.2. Ocena wyników rozprawy. Wyniki autora są znaczące. Istotnym osiągnięciem jest znalezienie właściwego języka koneksji afinicznych umożliwiające lokalną klasyfikację tkanin oraz budowę niezmienników. Wyróżnił bym Twierdzenia 2.14, 2.18, 2.20, Stwierdzenie 4.2 i Twierdzenie 4.11. Warto dodać, że niektóre twierdzenia udowodnione w pracy doktorskiej znacząco uogólniają i pogłębiają wyniki innych autorów.

2.3. Ocena poprawności pracy. Przedstawione dowody głównych twierdzeń rozprawy są, moim zdaniem, poprawne.

2.4. Ocena prezentacji. Prezentacja jest dobra, pewnym mankamentem jest rozwlekłość. Nieco frustrujące dla czytelnika jest formułowanie twierdzeń jako konkluzji po długich rozważaniach.

2.5. **Ocena publikacji.** Marcin Zubilewicz jest współautorem publikacji w znaczącym czasopiśmie matematycznym:

Local invariants of divergent-free webs, Analysis and Mathematical Physics, 13.4, 2022.

3. Konkluzja

Rozprawa doktorska prezentuje znaczące osiągnięcie badawcze polegające na uzyskaniu lokalnej klasyfikacji niektórych klas tkanin na rozmaitościach ze strukturami geometrycznymi. Wnioskuję o dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tralle