dr hab. Wojciech Kryński
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Warszawa, 23.09.2023

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Marcina Zubilewicza
"Lokalne niezmienniki unimodularne i symplektyczne tkanin"

1. Wstęp. Tkanina na rozmaitości różniczkowej to rodzina foliacji. W rozprawie badana jest lokalna geometria tkanin na rozmaitościach wyposażonych w dodatkowe struktury: formy objętości (tkaniny unimodularne), struktury bilagranżowskie (2-tkaniny bilagranżowskie) lub formy symplektyczne (2-tkaniny symplektyczne). Główne osiągnięcie rozprawy to wprowadzenie kanonicznych koneksji dla rozważanych klas tkanin, a następnie wykorzystanie ich w konstrukcji niezmienników i dowodach twierdzeń o równoważności i postaciach normalnych. Podane są też geometryczne interpretacje niezmienników w kontekście odpowiednio definiowanych grup holonomii. Praca zawiera także pewne propozycje zastosowań w analizie numerycznej związanej z geometrią czasoprzestrzeni.

Badanie tkanin zostało zapoczątkowane przez W. Blaschke na początku XX wieku i było kontynuowane przez jego uczniów, w tym S.-S. Cherna, który rozwiązał problem równoważności dla 3-tkanin. W ostatnich dekadach zostały pokazane istotne związki tkanin i układów całkowalnych (I. Gelfand, I. Zakharevich). Badania prowadzone w rozprawie są bezpośrednią kontynuacją wyników S. Tabachnikova, który jako pierwszy rozważał tkaniny unimodularne.

Wyniki dotyczące tkanin unimodularnych uzyskane w ramach rozprawy zostały zawarte (częściowo) w pracy, wspólnej z promotorem – W. Domitrzem, opublikowanej w *Analysis and Math. Phys.* Druga praca autora rozprawy, także wspólna z promotorem, jest w przygotowaniu i będzie zawierać rezultaty dotyczące tkanin symplektycznych.

2. Opis wyników. Głównym obiektem rozważanym w pracy są n-tkaniny na rozmaitości różniczkowej M, rozumiane jako rodziny foliacji $(\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n)$. Poszczególne foliacje mogą być różnego wymiaru, zakłada się jednak, że są one w położeniu ogólnym, co oznacza, że dowolne dwie są wzajemnie transwersalne oraz spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} \mathcal{F}_i = m, \tag{$*$}$$

gdzie $m = \dim M$. Warunek ten implikuje, że lokalnie można wybrać układ współrzędnych $(x^1, \ldots, x^m)$ na M taki, że liście foliacji $\mathcal{F}_i$ są zadane przez równania $x_j = \text{const}$ dla pewnego zbioru indeksów $j \in I_i \subset \{1, \ldots, m\}$. Konkretnie, indeksy można uszeregować w taki sposób, że $I_i = \{m_i + 1, \ldots, m_{i+1}\}$, gdzie $m_1 = 0$ oraz $m_i = \sum_{i=1}^{i-1} \operatorname{codim} \mathcal{F}_i$ dla $i > 1$. Wtedy funkcje (x^j) dla $j \notin I_i$ definiują układ współrzędnych na każdym liściu foliacji $\mathcal{F}_i$. Z powyższego wynika, że wszystkie n-tkaniny w położeniu ogólnym i spełniające $(*)$ są lokalnie równoważne (przy ustalonym n i wymiarach $\dim \mathcal{F}_i$). Co więcej, redukują one ogólną grupę dyfeomorfizmów do podgrupy zachowującej każdy ze zbiorów indeksów I_i, $i = 1, \ldots, n$.

Nietrywialna geometria pojawia się po wyposażeniu rozmaitości M w dodatkową strukturę. W tym ujęciu klasyczne $n+1$-tkaniny można zinterpretować jako n-tkaniny w sensie rozważanej rozprawy z dodatkową foliacją $\mathcal{F}_{n+1}$, której położenie względem zadanych wyjściowych foliacji prowadzi do nierównoważnych struktur. W tym duchu autor rozprawy bada w systematyczny sposób w kolejnych rozdziałach M z odpowiednio: formą objętości, strukturą bilagranżowską oraz formą symplektyczną.

2.1. Tkaniny unimodularne. Pierwszą klasą struktur są n-tkaniny na rozmaitości M z zadaną formą objętości Ω. W Rozdziale 2.1 rozprawy wprowadzone jest pojęcie koneksji zgodnych (definiowanych w naturalny sposób jako beztorsyjne koneksje zachowujące liście wszystkich foliacji $\mathcal{F}_i$ oraz formę objętości Ω). Autor pokazuje, że koneksje zgodne istnieją i są jednoznacznie zdefiniowane w przypadku gdy $\operatorname{codim} \mathcal{F}_i = 1$ dla dowolnego i (Wniosek 2.7). W ogólności dana tkanina unimodularna dopuszcza wiele koneksji zgodnych. Natomiast autor dowodzi, że istnieje szczególna koneksja (nazwana koneksją kanoniczną) na pewnej sumie wiązek wyznacznikowych nad M, która jest wyznaczona jednoznacznie przez tkaninę. Twierdzenie 2.13 mówi, że tkanina jest trywialna wtedy i tylko wtedy gdy krzywizna koneksji kanonicznej znika. W ostatniej części Rozdziału 2.1 wprowadzony jest tensor niejednorodności, który mierzy na ile tkanina unimodularna różni się od tkaniny trywialnej. Jest on zinterpretowany jako pewna część tensora Ricciego dowolnej koneksji zgodnej z tkaniną.

W Rozdziale 2.2 autor podaje pewne wyniki dotyczące klasyfikacji kiełków tkanin unimodularnych. Za kluczowy uznaję tutaj Wniosek 2.21 mówiący, że kiełki tkanin są klasyfikowane przez kiełki tensora niejednorodności. Ta część pracy kończy się przykładem dotyczącym tkanin na płaszczyźnie – przedstawiona jest postać normalna dla generycznych tkanin.

Rozdział 2.3 zawiera interpretację tensora niejednorodności w terminach odpowiednio zdefiniowanej grupy holonomi unimodularnej. Uzyskane wyniki w naturalny sposób korespondują z rezultatami S.-S. Cherna oraz P. Nagy dotyczącymi klasycznych $n+1$-tkanin (i ogólniej, ze standardowymi rezultatami w geometrii różniczkowej wiążącymi grupy holonomii z krzywizną koneksji).

Rozdział 2.4 zawiera wspomniane wcześniej propozycje zastosowań w geometrii czasoprzestrzeni, a dokładniej w relatywistycznej mechanice płynów. Opierają się one na założeniu, że tensor niejednorodności pewnej 2-tkaniny unimodularnej znika, co prowadzi, oczywiście, do uproszczenia równań. Autor rozprawy stwierdza, że taki punkt widzenia może być użyteczny w analizie numerycznej. Wydaje się jednak, że podobne uproszczenia równań można rozważać bez rozwijania ogólnej teorii tkanin – niestety w rozprawie nie ma podanych szczegółowych wyników, z których wynikałaby szczególna użyteczność tkanin unimodularnych w tym kontekście.

2.2. Tkaniny bilagranżowskie. W Rozdziale 3 rozprawy autor rozważa rozmaitość symplektyczną (M, ω) z 2-tkaniną $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ taką, że liście foliacji $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, są podrozmaitościami lagranżowskimi. W tym przypadku zadana struktura na M definiuje, znaną wcześniej, pewną kanoniczną koneksję beztorsyjną, zwaną koneksją bilagranżowską. Autor wykorzystuje ją w Twierdzeniu 3.6 i podaje warunki na trywialność tkaniny. W Twierdzeniu 3.12 wynik ten jest interpretowany w interesujący sposób jako trywialność dowolnych powierzchni bilagranżowskich w M (w sensie 2-wymiarowych tkanin unimodularnych, co w elegancki sposób nawiązuje do Rozdziału 2 rozprawy).

2.3. Tkaniny symplektyczne. W ostatnim rozdziale pracy (Rozdział 4) rozważane są rozmaitości symplektyczne (M, ω) wymiaru $4n$ z 2-tkaniną $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ taką, że liście foliacji $\mathcal{F}_i$, $i = 1, 2$, są podrozmaitościami symplektycznymi M, w ogólności o dowolnym wymiarze. Autor koncentruje się na przypadku $\dim \mathcal{F}_i = 2n$. Udowodnione jest, że taka struktura jednoznacznie wyznacza naturalną koneksję na M (Stwierdzenie 4.2). Następnie, podobnie jak we wcześniejszych rozdziałach, rozważany jest problem klasyfikacji i równoważności. Konkretne wyniki podane są w przypadku 4-wymiarowym, czyli dla $n = 1$ (np. Twierdzenie 4.1 zawiera postać normalną dla struktur z płaską koneksją). Wyniki rozszerzają (i uzupełniają) wcześniejsze wyniki promotora rozprawy (ze współpracownikami).

3. Konkluzja. Moim zdaniem wszystkie rezultaty zawarte w rozprawie są poprawne. Nie znalazłem żadnych błędów w dowodach. Warto podkreślić, że dowody są technicznie trudne i korzystają z metod pochodzących z wielu dziedzin szeroko pojętej geometrii różniczkowej i teorii osobliwości. Pomijając szczegółowe rezultaty opisane powyżej, za cenny wkład w rozwój dziedziny uważam ogólne, systematyczne, spojrzenie na różne geometrie w schemacie: tkanina + struktura na rozmaitości.

Od strony redakcyjnej, rozprawa także nie budzi zastrzeżeń. Jest ona przygotowana z dużą starannością, a wyniki przedstawione są w sposób klarowny. Natrafiłem jedynie na kilka literówek. Bibliografia jest obszerna i dobrze pokrywa stan wiedzy dotyczącej tkanin.

Moim zdaniem przedłożona rozprawa spełnia wszystkie wymogi formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim. Z przyjemnością rekomenduję przystąpienie do dalszych etapów postępowania doktorskiego i wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.