Warszawa, 4 października 2023

dr hab. Joanna Rencławowicz
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Przemysława Kosewskiego
'Kolmogorov's model of turbulence - mathematical analysis'

Tytuł rozprawy doktorskiej: Kolmogorov's model of turbulence - mathematical analysis.

W pracy doktorskiej mgr. Przemysława Kosewskiego badane jest lokalne i globalne istnienie regularnych rozwiązań dwurównaniowego modelu turbulencji Kołmogorowa. Rozpatrywane są przypadki obszarów periodycznych (w tym torus) oraz różnych założeń na dane początkowe (w przestrzeniach Sobolewa H^2 i H^s). Układ ten ma następującą postać:

$$\begin{aligned} v_t + \operatorname{div}(v\otimes v) - \nu_0 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega}D(v)\right) &= -\nabla p, \\ \omega_t + \operatorname{div}(\omega v) - \kappa_1 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega}\nabla\omega\right) &= -\kappa_2\omega^2, \\ b_t + \operatorname{div}(bv) - \kappa_3 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega}\nabla b\right) &= -b\omega + \kappa_4\frac{b}{\omega}|D(v)|^2, \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

W układzie równań (1) i dalej w pracy, D oznacza symetryczną część gradientu, v - średnią pola prędkości, b - $2/3$ średniej turbulentnej energii kinetycznej, ω - szybkość dyssypacji średniej turbulentnej energii kinetycznej (czyli skalę turbulencji), p - sumę ciśnienia i b. Stałe ν_0, κ_1, κ_2, κ_3, κ_4 to dodatnie parametry, przy czym w dalszej części rozprawy przyjmuje się dla uproszczenia, że wszystkie poza κ_2 są równe 1, więc w oszacowaniach pojawia się tylko κ_2. Warunki początkowe (dla $t=0$) to v_0, ω_0, b_0.

Promotorem rozprawy doktorskiej jest dr. hab. Ewa Zadrzyńska-Piętka, a promotorem pomocniczym dr Adam Kubica. Opisane w pracy zagadnienia i wyniki bazują na dwóch publikacjach wspólnych z Adamem Kubicą, czyli (KK1) i (KK2) (w których zgodnie z oświadczeniem Autora deklarowany udział wynosi 70%) oraz dwóch samodzielnych pracach Doktoranta: (K1), (K2) (ta pierwsza dostępna tylko na arXiv). Praca, licząca 198 stron, składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów, dodatku (Appendix) i krótkiego podsumowania (Summary).

We wstępie (Introduction) wprowadzony zostaje rozważany układ (1), opisujący przepływ cieczy turbulentnej i omawiane są dotychczasowe wyniki dotyczące modelu turbulencji Kołmogorowa oraz częściowe wyprowadzenie problemu z równań Eulera przez rozważanie pewnych średnich wartości prędkości i ciśnienia. Ideę stojącą za konstrukcją średnich stanowi RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes), czyli uśrednianie po czasie prędkości i ciśnienia, co pozwala na zmniejszenie fluktuacji charakterystycznych dla przepływów turbulentnych.

Rozdział pierwszy poświęcony jest notacji. Pojawiają sie w nim stosowane w pracy przestrzenie (m. in. przestrzenie Sobolewa i ułamkowe Sobolewa, Bessela), zdefiniowane w obszarze periodycznym $\prod_{i=1}^{3}(0, L_i)$, całej przestrzeni $\mathbb{R}^d$ i $d-$wymiarowym torusie $\mathbb{T}^d$, a także pomocnicze nierówności Gagliardo-Nirenberga i funkcje specjalne.

W rozprawie, dla $m \in \mathbb{N}$ przestrzenie $\mathcal{V}^m$ definiuje się jako zawężenia do Ω funkcji należących do przestrzeni

$$\{u \in H^m_{loc}(\mathbb{R}^3) : u(\cdot + kL_ie_i) = u(\cdot) \text{ dla } k \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3\},$$

a następnie

$$\dot{\mathcal{V}}^m_{\mathrm{div}} = \left\{ v \in \mathcal{V}^m : \operatorname{div} v = 0, \int_\Omega v dx = 0 \right\}.$$

Przestrzeń $L^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$ oznacza domknięcie przestrzeni $W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega)$ w normie $L_2(\Omega)$. Ponadto, w pracy używa się m.in. przestrzeni $\mathcal{X}(T)$, gdzie

$$\mathcal{X}(T) = L^2(0, T; \dot{\mathcal{V}}^3_{\mathrm{div}}) \times L^2(0, T; \mathcal{V}^3) \times L^2(0, T; \mathcal{V}^3) \cap (H^1(0, T; H^1(\Omega)))^5.$$

W rozdziale drugim pokazane zostało istnienie lokalnych w czasie rozwiązań modelu turbulencji Kołmogorowa w obszarze $\prod_{i=1}^{3}(0, L_i)$ dla danych początkowych z H^2 (Twierdzenie 2.1.1). Autor dowodzi, że dla ściśle dodatnich $\omega_0, b_0 \in \mathcal{V}^2$ i $v_0 \in \dot{\mathcal{V}}^2_{\mathrm{div}}$, takich, że istnieją dodatnie $b_{\min}, \omega_{\min}, \omega_{\max}$ oraz zachodzi

$$\begin{aligned} 0 < b_{\min} \le b_0(x), \\ 0 < \omega_{\min} \le \omega_0(x) \le \omega_{\max}, \end{aligned} \tag{2}$$

to istnieje dodatni czas t^* i funkcje $(v, \omega, b) \in \mathcal{X}(t^*)$ spełniające układ (1) w słabym sensie dla p.w. $t \in (0, t^*)$ przy danych początkowych v_0, ω_0, b_0.

Dodatkowo, zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\min}}{1+\kappa_2\omega_{\min}t} \leq \omega(x,t) \leq \frac{\omega_{\max}}{1+\kappa_2\omega_{\max}t}, \\ \frac{b_{\min}}{(1+\kappa_2\omega_{\max}t)^{1/\kappa_2}} \leq b(x,t), \end{aligned} \tag{3}$$

a czas lokalnego istnienia można oszacować z dołu w tym sensie, że dla dowolnej dodatniej wartości δ i zwartego zbioru K istnieje dodatni czas $t^*_{K,\delta}$ taki, że jeśli dane początkowe w normach H^2 szacują się z góry przez δ, a

$$(\omega_{\min}, \omega_{\max}, b_{\min}) \in K,$$

to $t^* \geq t^*_{K,\delta}$. Dowód opiera się na aproksymacji Galerkina i oszacowaniach jednostajnych, które pozwalają przejść do granicy i uzyskać oszacowania na ω i b. Wyniki tego rozdziału opublikowane zostały w pracy:

(KK1) Kosewski, P.; Kubica, A.: *Local in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence,* Monatshefte für Mathematik, (2022) 198(2), 345–369.

W rozdziale trzecim dowiedziono istnienia globalnych, regularnych, jednoznacznych rozwiązań przy $\kappa_2 > \frac{1}{2}$ i pewnym warunku małości, jaki uzyskuje się dzięki małym oscylacjom danych początkowych w porównaniu do turbulentnej lepkości $\frac{b}{\omega}$. Istnienia rozwiązań regularnych z Twierdzenia 3.2.1 dowodzi się przez przedłużanie w czasie rozwiązań lokalnych otrzymanych w rozdziale drugim. Wniosek 3.2.4.1 wprowadza dodatkowe warunki na globalne istnienie rozwiązań. Z kolei Uwaga 3.2.6 pokazuje, że warunek małości jest spełniony przez niepustą klasę funkcji.

Dokładniej, definiuje się wielkości

$$\begin{aligned} \mu^t_{\min} &= \frac{b_{\min}}{\omega_{\max}}(1+\kappa_2\omega_{\max}t)^{1-1/\kappa_2}, \\ Y_2(t) &- \text{funkcja}(\Delta\omega_0, \Delta b_0, \Delta v_0, b_{\min}, \omega_{\max}, \kappa_2, \exp(-(1+\kappa_2\omega_{\max}t)^{2-1/\kappa_2})), \\ Z_0(t) &- \text{funkcja}(v_0, b_0, Y_2(t), t). \end{aligned}$$

Wówczas dla $\kappa_2 > \frac{1}{2}$ istnieje stała C_{Ω,κ_2} (zależna od Ω i κ_2), taka, że dla danych początkowych $\omega_0, b_0 \in \mathcal{V}^2$ i $v_0 \in \dot{\mathcal{V}}^2_{\text{div}}$, dla których istnieją dodatnie $b_{\min}, \omega_{\min}, \omega_{\max}$ i zachodzi (2) oraz

$$\mu^t_{\min} - C_{\Omega,\kappa_2}Z_0(t) > 0 \text{ dla } t \in [0,T) \text{ i pewnego czasu } T \in (0,\infty], \tag{4}$$

to istnieje jednoznaczne rozwiązanie $(v, \omega, b) \in \mathcal{X}(T)$ w Ω^T.

Założenie $\kappa_2 > \frac{1}{2}$ jest kluczowe w dowodzie, umożliwia bowiem pokazanie ekspotencjalnego zaniku normy L_2 prędkości $v(t)$ i wielomianowego zaniku L_1-normy $b(t)$. Co ciekawe, Autor stara się wyjaśnić, skąd konkretny wybór parametru κ_2, więc w Proposition 3.3.3 przedstawia oszacowania dla różnych wartości κ_2. Nie jest to ścisły dowód tego, że $1/2$ jest krytyczną wartością parametru κ_2, ale dobrze wyjaśnia motywację takiego założenia w pracy. W pracy Kolmogorowa $\kappa_2 = \frac{7}{11}$, zatem Twierdzenie 3.2.1 może być zastosowane dla tej wartości parametru. Rozdział ten opiera się na pracy:

(KK2) Kosewski, P.; Kubica, A.: *Global in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence with small initial data,* Results in Mathematics, (2022) 77(4):163, 31pp.

W rozdziale czwartym pokazane jest istnienie lokalnych w czasie rozwiązań dla danych początkowych z $H^s(\mathbb{T}^d)$ przy $s > \frac{d}{2}$ (d to wymiar przestrzeni, dane początkowe muszą być dostatecznie regularne). Rezultat dotyczący istnienia rozwiązań znajduje się w Twierdzeniu 4.1.1, a jednoznaczność to teza Twierdzenia 4.1.2. Stosowane techniki opierają się na rezultatach z Appendix, dotyczących oszacowania komutatora dla potencjału Bessela, a ograniczenia na wykładnik s wynikają z nierówności interpolacyjnych, Lematu 1.3.3 dotyczącego oszacowań potencjału Bessela i nierówności Grönwalla. Wyniki tego rozdziału znalazły się w pracy:

(K1) Kosewski, P.: *Local well-posedness of Kolmogorov's two-equation model of turbulence in fractional Sobolev Spaces,* (2022) arXiv:2212.11391.

W rozdziale piątym Autor dowodzi istnienia globalnych, słabych rozwiązań modelu Kolmogorova na torusie, $\Omega = \prod_{i=1}^{3}(0, 2\pi)$. W tej części rozprawy zakłada się, że dane początkowe spełniają

$$\begin{aligned} &v_0 \in L^2_{\mathrm{div}}(\Omega), \\ &b_0 \in L^1(\Omega),\ \ln b_0 \in L^1(\Omega),\ b_0 > 0, \\ &\omega_0 \in L^\infty(\Omega),\ 0 < \omega_{\min} \leq \omega_0 \leq \omega_{\max} < \infty. \end{aligned}$$

Wówczas pokazuje się istnienie rozwiązań takich, że w szczególności

$$\begin{aligned} &v \in L^2(0, T; W^{1,2}_{\mathrm{div}}(\Omega)) \cap W^{1,q}(0, T; W^{-1,q}(\Omega)) \text{ dla } q \in \left[1, \frac{16}{11}\right), \\ &b \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad b > 0 \text{ p.w. w } \Omega, \\ &\ln b \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)), \quad b \in L^\lambda(0, T; W^{1,\lambda}(\Omega)) \text{ dla } \lambda \in [1, 2), \end{aligned}$$

$$p \in L^q(0,T;L^q_0(\Omega)) \text{ dla } q \in \left[1, \frac{16}{11}\right),$$
$$\frac{\omega_{\min}}{1+\kappa_2\omega_{\min}t} \leq \omega(x,t) \leq \frac{\omega_{\max}}{1+\kappa_2\omega_{\max}t} \quad \text{p.w. w } \Omega^T.$$

Rezultaty z tego rozdziału zostały opisane w pracy:

(K2) Kosewski, P.: *Existence of a weak solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence in periodic setting.* In 20 years of the Faculty of Mathematics and Information Science. A collection of research papers in mathematical analysis and in partial differential equations, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, (2022), pp. 77–125.

Ocena rozprawy

Struktura pracy jest logiczna i przemyślana. Język rozprawy jest typowy dla publikacji matematycznych. W rozdziałach oraz niektórych dowodach wprowadzono także podsekcje, co porządkuje tekst. Wyniki mają formę twierdzeń, wniosków i lematów, dobrze i jasno sformułowanych, z zaznaczeniem założeń i tezy. Dowody zostały przedstawione starannie i przejrzyście. Na początku rozdziałów znajdują się ich krótkie omówienia. Przed niektórymi technicznie skomplikowanymi dowodami (np. przed dowodem Lematu 2.2.3) Autor opisuje główne idee i tok rozumowania, co niewątpliwie ułatwia lekturę. Odwołania do lematów, oszacowań itp. znacząco pomagają w śledzeniu dowodów, szczególnie tych dość długich i skomplikowanych technicznie. Wszystko to sprawia, że pomimo obszerności materiału, rozprawę czyta się dobrze i z zainteresowaniem.

Celem pracy jest analiza układu równań modelu turbulencji Kołmogorova (1) pod kątem istnienia regularnych rozwiązań, lokalnych w czasie, a w szczególności globalnych (przy pewnych dodatkowych założeniach małości), co zostało zrealizowane. Regularność rozwiązań jest ambitnym zadaniem i dotychczas nie była analizowana dla tego modelu. Prezentowane w pracy wyniki stanowią spójną tematycznie całość. Jawna zależność od danych, np. równanie algebraiczne na czas lokalnego istnienia t^* w (2.59), oszacowanie na czas lokalnego istnienia w Twierdzeniu 4.1.1. czy też explicite zapisany warunek małości (4) potrzebny do regularności rozwiązań (gdzie $Z_0(t)$ jest wprost zdefiniowane w (3.12)), to niewątpliwy atut uzyskanych wyników.

Metody wykorzystywane w rozprawie doktorskiej są typowymi narzędziami stosowanymi w rozważaniach związanych z istnieniem i regularnością rozwiązań dla nieliniowych problemów początkowo-brzegowych. Mamy zatem oszacowania energetyczne, całkowanie przez części, nierówności Sobolewa, Höldera, Gagliardo-Nirenberga, aproksymacje Galerkina, twierdzenia interpolacyjne. Zastosowane techniki, w tym aproksymacje, są często wieloetapowe i wymagają złożonych oszacowań. Analiza modelu na torusie wiąże się z kolei z koniecznością dostosowania oszacowań dla komutatora z $\mathbb{R}^d$ na $\mathbb{T}^d$.

W redakcji pracy można zauważyć pewne usterki i niedociągnięcia.

1) We wstępie do rozdziału 3, Autor pisze, że we Wniosku 3.2.4.1 pokazano spełnienie warunku małości przez niepustą klasę funkcji. Tymczasem ta teza pojawia się w Uwadze 3.2.6, a Wniosek 3.2.4.1 dotyczy warunku globalnego istnienia rozwiązań.

2) Problem (1) jest zasadniczo problemem początkowo-brzegowym, co Autor zaznacza we Wstępie pisząc, że warunki brzegowe zostaną określone później. Jednak w dalszym tekście pojawia się tylko wzmianka o periodycznych warunkach brzegowych dla problemu lokalnego istnienia - we wstępie do Rozdziału 2, nie w twierdzeniu, oraz dla problemów przybliżonych w Rozdziale 5. O periodyczności obszaru mówi się w abstrakcie i streszczeniu pracy, jednak warunki brzegowe dla problemu (1) nie zostały formalnie zdefiniowane. Rozwiązanie, którego istnienie pokazane zostało w twierdzeniach, należy do przestrzeni $\mathcal{X}(T)$ funkcji z periodycznymi warunkami na brzegu, ale w założeniach twierdzeń periodyczność albo inne warunki brzegowe się nie pojawiają. Prawdopodobnie, to założenie zostało zapomniane w rozprawie, ponieważ w publikacjach (KK1), (KK2), (K2) oczywiście charakteryzuje się warunki brzegowe dla (v, ω, b) jako periodyczne.

3) Obszar Ω rozważany w pracy w 3 wymiarach oznaczany jest przez $\prod_{i=1}^{3}(0, 2\pi)$ oraz $\prod_{i=1}^{3}(0, L_i)$. W powszechnie przyjętej terminologii matematycznej, to jest trójwymiarowa kostka... Jeśli rozpatrujemy periodyczne warunki brzegowe (o których niewiele się pisze w rozprawie), to sklejamy końce i mówimy o problemie na torusie, ale to wymaga przynajmniej komentarza, szczególnie na poziomie rozprawy doktorskiej.

4) W publikacjach (KK1)-(KK2), (K2), przez p w układzie (1) oznacza się sumę b i średniego ciśnienia, natomiast w rozprawie jest to suma b i ciśnienia.

5) W oznaczeniach pojawiają się niepotrzebne powtórzenia wybranych założeń, które w różnych rozdziałach zyskują nowe numerki. Na przykład, założenia (2) w tekście rozprawy występują w identycznej formie jako (2.1)-(2.2), (3.1)-(3.2), (4.1)-(4.2). Podobnie, definicje wielkości $b^t_{\min}$, $\omega^t_{\min}$, $\omega^t_{\max}$ mają numery (2.3), ale także (3.3) i (3.4) oraz (4.3). Lepiej byłoby użyć odsyłacza. Odsyłacz przydałby się natomiast do definicji opisanych w rozdziale pierwszym przestrzeni $\mathcal{V}^m$, $\dot{\mathcal{V}}^m_{\mathrm{div}}$, $\mathcal{X}(T)$, które są używane w głównych

twierdzeniach.

6) Iterówki zdarzają się, ale rzadko, np. 'wpieranie' zamiast 'wspieranie' na stronie 3, 'Tribel' na stronie 156, 'euler' na stronie 196, 'sobolev' na stronie 197.

Merytorycznie oceniam rozprawę pozytywnie. Rezultaty są wartościowe, a dowody wymagają użycia zróżnicowanych technik, w tym adaptacji metod do konkretnych obszarów. Przeprowadzone rozumowania wskazują na dobre opanowanie warsztatu matematycznego i umiejętność ciekawego formułowania rozważań, a także znajomość literatury. Prace Autora: cztery publikacje i preprint na arXiv, w tym praca z 2021 roku nie związana z rozprawą oraz dwie samodzielne, dobrze świadczą o dojrzałości matematycznej i perspektywach prowadzenia dalszej pracy naukowej.

Uważam, że przedstawiona rozprawa spełnia zarówno ustawowe, jak i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie jej Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Joanna Rencławowicz