Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Marcina Zubilewicza "Lokalne niezmienniki unimodularne i symplektyczne tkanin"

Andriy Panasyuk
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy, Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

1 Uzasadnienie wyboru tematu rozprawy

Klasyczna teoria tkanin, czyli skończonych rodzin foliacji na rozmaitości, była założona i aktywnie rozwijana w pierwszej połowie XX wieku przez szkołę W. Blaschkego, co zostało udokumentowane w kilkunastu artykułach naukowych oraz w znanej książce Blaschkego i Bola [9][1]. Powodem takiego zainteresowania tą teorią są liczne jej zastosowania w geometrii różniczkowej oraz równaniach różniczkowych.

W drugiej połowie XX wieku teoria ta otrzymała nowe życie w postaci badań jednoparametrowych rodzin foliacji (zwanych tkaninami Kroneckera) dzięki serii prac Gelfanda i Zakharevicha [23], [GZ93, GZ00], w których została zastosowana do lokalnej teorii tzw. całkowalnych układów bihamiltonowskich.

Warto zaznaczyć, że teoria tkanin Kroneckera później wyszła za ramy teorii układow bihamiltonowskich i znalazła zastosowania w lokalnej teorii cząstkowych równań różniczkowych [Zak00, DK14, KP17, Pan19].

Głównym zadaniem teorii tkanin tak klasycznych jak i Kroneckera jest zbudowanie lokalnych niezmienników różniczkowo geometrycznych pozwalających rozróżniać rozmaite modele lokalne, wśród których zawsze znajduje się model najprostszy, tzw. płaski (odpowiadający znikaniu torsji lub krzywizny odpowiednich koneksji). Przy tym tkanina musi być wystarczająco „bogata" żeby posiadać takie niezmienniki; przykładowo tkanina składająca się z n hiperpowierzchni w położeniu ogólnym na rozmaitości n-wymiarowej zawsze może być lokalnie „wyprostowana", czyli sprowadzona do zestawu hiperpłaszczyzn współrzędnościowych za pomocą lokalnego dyfeomorfizmu. Najprostszy nietrywialny przykład tkaniny daje 3-tkanina na płaszczyźnie, czyli trzy foliacje 1-wymiarowe w położeniu ogólnym: dwie z nich oczywiście lokalnie można wyprostować, ale do jednoczesnego wyprostowania trzeciej mogą istnieć lokalne przeszkody. Ich znikanie pozwala znaleźć lokalny układ współrzędnych, w którym wszystkie trzy rodziny krzywych są rodzinami prostych równoległych.

Praktycznie jednocześnie z teorią tkanin w powyższym sensie powstała też teoria „tkanin z tłem": załóżmy, że mając dwie foliacje $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ w położeniu ogólnym na płaszczyźnie chcemy je wyprostować w obecności geometrycznej struktury, która zastępuje trzecią foliację, np. formę objętości Ω. Przypadkowi „płaskiemu" odpowiada tutaj trójka $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \Omega) = (\{x = const\}, \{y = const\}, dx \wedge dy)$. Innym przykładem tkaniny z tłem jest para leżandrowskich foliacji wraz ze strukturą kontaktową na

[1] Pozycję bibliograficzne numerowane liczbami odwołują się do spisu literatury rozprawy doktorskiej; dodatkowe pozycje bibliograficzne przestawione są w stylu amsalpha.

rozmaitości, a badanie takich tkanin było rozpoczęte w kontekście lokalnej torii zwyczajnych równań różniczkowych juz w pracy [Bol32].

W pionierskiej pracy [48] S. Tabachnikov rozpoczął unifikowane badania nad tkaninami z tłem. W pracy tej zostały określone pewne niezmienniki lokalne trójek $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \Omega)$ trzech typów: (1) Ω jest formą objętości, a foliacje $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są transwersalne dopełniających wymiarów; (2) Ω jest formą symplektyczną, a $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są transwersalnymi foliacjami lagranżowskimi; (3) Ω jest strukturą kotaktową, a $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są transwersalnymi foliacjami leżandrowskimi. Motywacją do rozpatrzenia trójek typu (2) jest ich znaczenie w teorii kwantyzacji geometrycznej [28]. Ponadto takim strukturom poświęcone są późniejsze prace [20, 21] oraz wcześniejsza [51].

Celem danej rozprawy doktorskiej jest daleko idące uogólnienie wyników Tabacznikova dotyczące struktur typu (1) i (2) oraz badanie trójek $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \Omega)$, gdzie Ω jest formą symplektyczną, a $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ są transwersalnymi foliacjami symplektycznymi.

W pewnym sensie wyniki rozprawy dotyczące ostatniego przypadku są uogólnieniem wyników pracy [17], w której badane były lokalne niezmienniki bliskich struktur geometrycznych: trójek (F_1, F_2, Ω), gdzie Ω jest formą symplektyczną, a F_1, F_2 są transwersalnymi podrozmaitościami symplektycznymi.

Podsumowując można powiedzieć, że temat pracy doktorskiej mgr Zubilewicza jest aktualny i wpisuje się we wspomnianą działkę literatury matematycznej.

2 Opis treści rozprawy oraz metod badań

Rozprawa składa się z 4 rozdziałów oraz spisu literatury. W Rozdziale 1 znajduje się gruntowne wprowadzenie do przedmiotu w tym zarys teorii tkanin oraz wstępny opis wyników badań.

Rozdział 2 jest napisany na podstawie jedynego opublikowanego artykułu mgr. Zubilewicza [18] (we współautorstwie z promotorem rozprawy) i jest poświęcony tkaninom w geometrii unimodularnej (uogólnieniu tkanin typu (1) powyżej). Rozdział ten uogólnia wyniki Tabachnikova [48] w kilku kierunkach, a przede wszystkim w kierunku rozpatrzenia n-tek foliacji (w przeciwieństwie do par w [48]). W szczególności dla tego przypadku zostały zdefiniowane następujące pojęcia: tzw. tensor niejednorodności; koneksja liniowa na pewnej wiązce kanonicznie stowarzyszonej z tkaniną, płaskość której jest równoważna z trywialnością tkaniny (powyższy tensor ma naturalna interpretację jako tensor Ricciego koneksji kanonicznej). Ponadto za pomocą tego tensora powstaje pewnego rodzaju klasyfikacja lokalna wszystkich kiełków tkanin unimodularnych: wykazano, że kiełek tkaniny jednoznacznie wyznacza się przez wartość tego tensora w punkcie oraz wartości formy objętości wzdłuż określonych podrozmaitości zawierających ten punkt.

Następnie wyniki Rozdziału 2 idą w kierunku uogólnienia na przypadek wielowymiarowy „niezmiennika objętościowego", który został wprowadzony przez Tabachnikova w przypadku 2-wymiarowym. W szczególności zostały pokazane związki tego niezmiennika z tensorem niejednorodności oraz określone w jego terminach warunki trywialności tkaniny.

Ostatni podrozdział Rozdziału 2 jest poświęcony zarysowi możliwych zastosowań tkanin unimodularnych, a w szczególności tensora niejednorodności, do numerycznych obliczeń w relatywistycznej mechanice płynów.

Wyniki rozdziałów 3 i 4 rozprawy nie były opublikowane wcześniej. Rozdział 3 poświęcony jest zastosowaniu wyników rozdziału 2 do tkanin typu (2) powyżej. Mianowicie warunek płaskości tkaniny formułuje się (wzorem krzywizny sekcyjnej w geometrii riemannowskiej) w terminach znikania niezmienników zbudowanych w rozdziale 2 (tak krzywiznowych jak i „objętościowych") na pewnych podrozmaitościach wymiaru 2, które dziedziczą strukturę tkaniny typu (2) będącą jednocześnie tkaniną typu (1) z powodów wymiarowych.

Ostatni, czwarty rozdział rozprawy zawiera wyniki dotyczące lokalnych niezmienników tzw. tkanin symplektycznych $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \Omega)$, gdzie Ω jest formą symplektyczną na rozmaitości wymiaru $4n$ a $\mathcal{F}_i$ sa transwersalnymi foliacjami symplektycznymi wymiaru $2n$ w położeniu ogólnym. W szczególności została skonstruowana odpowiednia koneksja (a właściwie skończona liczba koneksji ze względu zależność od skończonej liczby wyborów) oraz zostały podane warunki znikania jej torsji i krzywizny. W przypadku 4-wymiarowym ponadto podana została odpowiednia postać normalna tkaniny oraz zostało rozwiązane zagadnienie klasyfikacyjne takich tkanin. Klasyfikacja sprowadza się do klasyfikacji par kiełków funkcji od 2 zmiennych ze względu na pewne działanie grupy $SL(2,\mathbb{R})$. Znalezienie postaci normalnej odpowiadającej przypadkowi bez torsji i krzywizny jest możliwe dzięki 1-wymiarowości (i jako wniosek - całkowalności) dystrybucji własnych pewnego endomorfizmu podwiązki wiązki stycznej. Na końcu rozdziału znajduje się ciekawy przykład w 8D, dla którego odpowiednie dystrybucje nie są całkowalne, co pokazuje istotny skok skomplikowaności przy przejściu do wyższych wymiarów.

3 Konkluzja

Rozprawa doktorska mgr M. Zubilewicza sprawia wrażenie solidności z jednej strony, gdyż wyniki i ich dowody są bardzo precyzyjne i rzetelne, a z drugiej strony czyta się z zainteresowaniem, gdyż zawiera dużą liczbę przykładów (tak znanych jak i nowych) oraz jest napisana bardzo żywym językiem matematycznym. Pomocny dla czytelnika ze względu na dużą objętość pracy jest zawarty we wprowadzeniu wstępny opis wyników badań. Osobnej pochwały zasługują profesjonalnie wykonane skomplikowane rysunki, które istotnie ułatwiają zrozumienie ilustrowanych pojęć.

Podczas pracy nad rozprawą pan Marcin wykazał się obszerną erudycją matematyczną w dziedzinie szeroko pojętej geometrii różniczkowej, czemu świadczeniem jest wyczerpujący spis literatury oraz mnóstwo pojęć i metod matematycznych, które należało opanować.

Wyniki pracy są interesujące i aktualne i z pewnością cała rozprawa zajmie ważne miejsce w istniejącej światowej literaturze matematycznej dotyczącej lokalnej geometrii różniczkowej. Część wyników rozprawy jest opublikowana [18] w czasopiśmie *Analysis and Mathematical Physics* liczącym 100 p. w liście czasopism naukowych i recenzowanych materiałów z konferencji międzynarodowych Ministerstwa Edukacji i Nauki. Mam nadzieję, że wyniki nieopublikowane zostaną zaprezentowane najbliższej przyszłości w postaci jednego lub nawet dwóch osobnych artykułów naukowych.

Perspektywiczną wydaje się próba zastosowania uzyskanych wyników lub ich rozszerzenia do tkanin typu (3) (historycznie pierwszych tkanin z tłem) lub ogólniej do lokalnej teorii zwycajnych równań różniczkowych. Innym potencjalnym kierunkiem rozwoju danych badań może być zastosowanie niezmienników dystrybucji niecałkowalnych do uzyskania form normalnych tkanin symplektycznych w wyższych wymiarach.

Podsumowując uważam że mgr. Marcin Zubilewicz spełnia wszystkie niezbędne wymogi i zasługuje na nadanie mu stopnia Doktora Nauk Przyrodniczych w dyscyplinie Matematyka.

4 Lista literówek

- str. 17, ostatni ak., lin. 4: *formę* $\to$ *formą*
- str. 34, ak. 2, lin. 1: $e_n \to e_m$

- str. 53, opis rysunku 2.1, lin. 5: *stałcych* → *stałych*
- str. 60, tw. 2.20, lin. 1: *n-tkaniny* → *n-tkaninę*
- str. 130, ak. 2, lin. 1: *(4.1.15* → *(4.1.15)*
- str. 132, ak. 1, lin. 4: *niezamknięty nawias*

30.09.2023 A. Panasyuk

Literatura

[Bol32] G. Bol, *Uber topologische Invarianten von zwei Kurvenscharen in Raum*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1932), 15–47.

[DK14] M. Dunajski and W. Kryński, *Einstein-Weyl geometry, dispersionless Hirota equation and Veronese webs*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **157** (2014), 139–150.

[GZ93] I. Gelfand and I. Zakharevich, *On the local geometry of a bihamiltonian structure*, The Gelfand mathematical seminars 1990-1992, Birkhauser, 1993, pp. 51–112.

[GZ00] ———, *Webs, Lenard schemes, and the local geometry of bihamiltonian Toda and Lax structures*, Selecta-Math. (N.S.) **6** (2000), 131–183.

[KP17] B. Kruglikov and A. Panasyuk, *Veronese webs and nonlinear PDEs*, J. Geom. Phys. **115** (2017), 45–60.

[Pan19] A. Panasyuk, *Kronecker webs, Nijenhuis operators, and nonlinear PDEs*, Banach Center Publications **117** (2019), 177–210.

[Zak00] I. Zakharevich, *Nonlinear wave equation, nonlinear Riemann problem, and the twistor transform of Veronese webs*, math-ph/00006001.