Warszawa, 29 czerwca 2022

Dr hab. Sławomir Michalik, prof. UKSW
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Szkoła Nauk Ścisłych
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie
ul. Wóycickiego 1/3, 01-938 Warszawa
e-mail: s.michalik@uksw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Tomasza Łukasza Żyndy "Selected reproducing kernels: admissible weights and dependence on parameters"

Rozprawa doktorska pana mgr. Tomasza Łukasza Żyndy pod tytułem "Selected reproducing kernels: admissible weights and dependence on parameters" została napisana pod kierunkiem profesora Zbigniewa Pasternak-Winiarskiego oraz dr. Pawła Wójcickiego jako promotora pomocniczego.

Rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu jąder reprodukujących dla takich przestrzeni Hilberta funkcji, jak: przestrzenie z wagami typu Małyszewa (będące uogólnieniami przestrzeni Bergmana funkcji harmonicznych) oraz przestrzenie z wagami typu Szëgo. W szczególności autor zajmuje się badaniem wag dopuszczalnych, dla których dostajemy jądra reprodukujące. Zajmuje się też problemem ciągłej zależności jąder reprodukujących od wag, a także od ciągu obszarów, na których są one zdefiniowane.

Autorowi udało się uzyskać w tej dziedzinie szereg ciekawych i ważnych rezultatów, które pozwalają nam lepiej zrozumieć naturę zależności jąder reprodukujących od wag całkowych, a także od obszarów, na których są określone.

Należy też podkreślić, że cała praca została napisana i zredagowana w sposób przejrzysty, czytelny i poprawny językowo, co bardzo ułatwia jej czytanie.

Wyniki prezentowane w rozprawie zostały opublikowane lub przyjęte do publikacji w następujących artykułach autora:

(1) Zbigniew Pasternak-Winiarski, Tomasz Łukasz Żynda, *Weighted Szegö Kernels*, Geometric Methods in Physics XXXV, 2018.
(2) T. Ł. Żynda, *Weighted generalization of the Szëgo kernel and how it can be used to prove general theorems of complex analysis*, Geometric Methods in Physics XXXVII, 2019.
(3) T. Ł. Żynda, *On weights which admit reproducing kernel of Szëgo type*, Journal of Contemporary Mathematical Analysis (Armenian Academy of Sciences), 55 (5), 2020.
(4) T. Ł. Żynda, J. J. Sadowski, P. M, Wójcicki, S. G. Krantz, *Reproducing kernels and minimal solutions of elliptic equations*, Georgian Mathematical Journal (przyjęta do publikacji, 2022).

Opis pracy

W pierwszej części rozprawy autor przedstawia ogólne fakty dotyczące jąder reprodukujących w przestrzeniach Hilberta $\mathcal{H}$ funkcji określonych na danym obszarze U. Podane są tu podstawowe twierdzenia dotyczące jąder reprodukujących, w szczególności twierdzenie 1.1 mówiące, że istnienie jądra reprodukującego jest równoważne ciągłości funkcjonału punktowej ewaluacji $f \mapsto f(z)$ w każdym punkcie $z \in U$, oraz Twierdzenia 1.2 i 1.3, pokazujące, że jądro reprodukujące K przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ ma własności minimalizujące na $\mathcal{H}$, tzn. że funkcja $f(\cdot) := \overline{K(z, \cdot)}$ jest minimalnym co do normy w $\mathcal{H}$ elementem zbioru $\{f \in \mathcal{H}\colon f(z) = K(z,z)\}$. Twierdzenia te są następnie intensywnie wykorzystywane w dalszych częściach pracy.

W drugiej części autor zajmuje się przestrzeniami Hilberta $L^2D(U)$ funkcji klasy $L^2(U)$ będących rozwiązaniami równań $Du = 0$, gdzie D jest operatorem eliptycznym drugiego rzędu o gładkich współczynnikach. Autor nazywa je przestrzeniami typu Małyszewa. Zauważmy, że w przypadku gdy D jest operatorem Laplace'a otrzymamy klasyczną przestrzeń Bergmana funkcji harmonicznych.

W Twierdzeniu 2.4 autor dowodzi, że w przypadku, gdy U jest obszarem w $\mathbb{R}^2$ z brzegiem klasy C^1, to $L^2D(U)$ jest przestrzenią Hilberta z jądrem reprodukującym. W dowodzie tym autor wykorzystuje elementy teorii przestrzeni Sobolewa, a dokładniej włożenie przestrzeni Sobolewa w odpowiednie przestrzenie Höldera oraz fakt, że rozwiązania równań eliptycznych (w sensie słabym) należą do odpowiednich przestrzeni Sobolewa. Dzięki temu rozwiązania w sensie słabym równań eliptycznych o gładkich współczynnikach stają się gładkimi rozwiązaniami w sensie silnym i funkcjonał punktowe ewaluacji jest dobrze określony.

Następnie rozważane są przestrzenie typu Małyszewa $L^2D(U, \mu)$ z wagą całkową μ, powstałe w wyniku zastąpienia klasycznych przestrzeni $L^2(U)$ przez przestrzenie z wagą $L^2(U, \mu)$. Autor definiuje wagi dopuszczalne μ, jako takie, dla których $L^2D(U, \mu)$ są przestrzeniami Hilberta z jądrami reprodukującymi. W szczególności autor wykazuje, że dla dowolnego operatora eliptycznego dopuszczalnymi są wagi spełniające warunek $\mu \geq C$ niemal wszędzie dla pewnego $C > 0$. Natomiast w szczególnym przypadku funkcji harmonicznych autor podaje w Twierdzeniu 2.7 szerszą klasę wag dopuszczalnych.

Jednym z centralnych zagadnień poruszanych w pracy jest zbadanie ciągłej zależności jąder reprodukujących od wag, a także od rosnącego lub malejącego ciągu obszarów na których przestrzenie i jądra są określone. Doprowadziło to do uzyskania przez autora ważnych i interesujących rezultatów. W pierwszym z tych przypadków autor dowodzi w Twierdzeniu 2.9, że jądra typu Małyszewa zależą w sposób ciągły od wag całkowych. Również w przypadku drugiej zależności autor dowodzi (na dwa sposoby) twierdzenie typu Ramadanowa o ciągłej zależności jądra od rosnącego ciągu obszarów (Twierdzenie 2.10), a także od malejącego ciągu obszarów (Twierdzenie 2.11). Następnie autor wzmacnia tezę Twierdzenia 2.10 dowodząc, że dla rosnącego ciągu obszarów $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnych do U, ciąg jąder K_{U_n} zbiega do jądra K_U nie tylko lokalnie jednostajnie, ale też względem normy.

W trzeciej, ostatniej części pracy autor zajmuje się badaniem przestrzeni wagowych Szëgo, czyli domknięciu w $L^2(\partial\Omega, \mu)$ przestrzeni funkcji z $L^2(\partial\Omega, \mu)$, które się przedłużają do funkcji holomorficznych na Ω i ciągłych na $\overline{\Omega}$. Zajmuje się też badaniem jąder reprodukujących (jąder Szëgo) na tej przestrzeni. Badanie tego typu jąder i przestrzeni wymaga użycia wielu subtelnych narzędzi, głównie związanych z analizą zespoloną funkcji wielu zmiennych.

Podobnie jak w przypadku jąder typu Małyszewa zostały zdefiniowane wagi Szëgo dopuszczalne, jako takie dla których jądro Szëgo istnieje. W szczególności, w Twierdzeniu 3.5 autor pokazuje, że wagi μ spełniające warunek $\int_{\partial\Omega} \frac{1}{\mu}\, dS < \infty$ są Szëgo dopuszczalne.

Również, podobnie jak w przypadku jąder typu Małyszewa, autor bada zależność jądra Szëgo od wagi i pokazuje w Twierdzeniu 3.15, że ta zależność jest ciągła w odpowiedniej topologii.

Uwagi do pracy

Uwagi dotyczące rozprawy doktorskiej:

(1) W Rozdziale I brakuje definicji kluczowego pojęcia *reproducing kernel Hilbert space.* Można się domyślać, że jest to taka przestrzeń Hilberta, dla której istnieje jądro reprodukujące, ale to powinno być explicite napisane — najlepiej w Definicji 1.1, w której jest już zdefiniowane jądro reprodukujące i własność reprodukowania.

(2) W Twierdzeniu 2.7 autor podaje, że w przypadku ważonych przestrzeni Bergmana funkcji harmonicznych na Ω, podobnie jak dla zespolonych ważonych przestrzeni Bergmana (zobacz [Pasternak1992]), jeśli waga μ spełnia warunek $\int_\Omega \frac{1}{\mu^a} dV < \infty$ dla pewnego $a > 0$, to jest ona dopuszczalna.

Autor powtarza w dowodzie tego faktu rozumowanie z pracy [Pasternak1992] zastępując funkcje holomorficzne funkcjami harmonicznymi, ale zapomina, że niektóre własności funkcji holomorficznych i harmonicznych są różne. W szczególności w dowodzie wykorzystywana jest w sposób istotny subharmoniczność funkcji $|f|^{2/p}$, $2/p > 0$. Rzeczywiście, dla funkcji f holomorficznej jest to prawda, ale w przypadku funkcji f harmonicznej, aby funkcja $|f|^{2/p}$ była subharmoniczna musimy dodatkowo założyć, że $2/p \geq 1$, co jest równoważne założeniu, że $a \geq 1$. Wobec tego prawidłowy warunek wystarczający w Twierdzeniu 2.7 na dopuszczalność wagi dla ważonych przestrzeni Bergmana funkcji harmonicznych powinien mówić, że waga μ spełnia warunek $\int_\Omega \frac{1}{\mu^a} dV < \infty$ dla pewnego $a \geq 1$ (a nie $a > 0$).

(3) Przed Twierdzeniem 2.4 brakuje dyskusji i wytłumaczenia dlaczego od tego momentu w badaniach przestrzeni i jąder typu Małyszewa ograniczamy się do przypadku, gdy obszar U jest zawarty w $\mathbb{R}^2$, a nie ogólnie w $\mathbb{R}^n$ i na ile wynik ten można przenieść na wyższe wymiary. Podobnie brakuje komentarza, czy wynik ten da się uogólnić na operatory eliptyczne stopnia wyższego niż dwa (czyli np. na operatory poliharmoniczne Δ^p, gdzie $p > 1$), szczególnie, że np. klasyczna praca Małyszewa [Malyshev1997] obejmuje też takie przypadki.

(4) Praca zawiera kilka drobnych pomyłek i błędów typograficznych:
   - 10_8: Warunek $\|m_z\| = \|k_z\|$ powinien być zastąpiony przez $\|m_z\| \leq \|k_z\|$.
   - 10_2: Zamiast $\alpha \in \mathbb{C}$ powinno być $\alpha > 0$.
   - 16^{12}: Po lewej stronie nierówności zamiast $[[u]]_V^{k,p}$ powinno być $[[u]]_V^{2,2}$.
   - 20_7: Przed pierwszą całką należy dopisać jeszcze 2.
   - 21^6: Należy zmienić "is" na "its".
   - 38_4: Należy zastąpić "1.3" przez "Proposition 1.3".
   - 54_2: Zamiast "By Lemma 2.4" powinno być "By Lemma 3.1".
   - 68^{11}: Zamiast "$E_z = f(z)$" powinno być "$E_z(f) = f(z)$".
   - 70_3: Należy poprawić "opein" na "open".

Opinia o pracy

Pomimo paru krytycznych uwag moja ogólna opinia o recenzowanej rozprawie jest jak najbardziej pozytywna. Autor uzyskał w niej wiele ważnych i interesujących wyników dotyczących przestrzeni i jąder reprodukujących typu Małyszewa i Szëgo, z których najciekawsze moim zdaniem są rezultaty dotyczące ciągłej zależności jąder typu Małyszewa i Szëgo od wag całkowych, a także twierdzenia typu Ramadanowa o ciągłej zależności jąder typu Małyszewa od rosnącego lub malejącego ciągu obszarów. Ich uzyskanie wymagało umiejętności posługiwania się zaawansowanym aparatem matematycznym z takich dziedzin jak analiza funkcjonalna, analiza zespolona i równania różniczkowe cząstkowe.

Dlatego też uważam, że rozprawa doktorska mgr. Tomasza Łukasza Żyndy spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o przyjęcie rozprawy i dopuszczenie jej autora do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Sławomir Michalik

Sławomir Michalik