

Prof. dr hab. inż. Artur TYLISZCZAK  
**Katedra Maszyn Ciepłych**  
**Politechnika Częstochowska**

---

**Al. Armii Krajowej 21**  
**42-201 Częstochowa**

tel.: (034) 3250505; fax: (034) 3250555

e-mail: artur.tyliszczak@pcz.pl

Częstochowa, 15.01.2026

## Recenzja

rozprawy doktorskiej mgr. inż. Jakuba Gałęckiego pt. "Efficient and Scalable Application of the Least-Squares Spectral/*hp* Element Method to Incompressible Flow Problems"

Recenzja została opracowana na zlecenie RDN Inżynieria Mechaniczna Politechniki Warszawskiej zawarte w skierowanym do mnie piśmie z dnia 20 października 2025r. od dr. hab. inż. Marka Wojtyry, prof. uczelni.

### 1. Ocena ogólna.

Tematyka pracy doktorskiej dotyczy rozwoju metody elementów skończonych w ujęciu spektralnym w połączeniu z metodą najmniejszych kwadratów do rozwiązywania zagadnień przepływu płynu nieściśliwego. W języku angielskim, *Least-Squares Spectral/hp Element Method*, w skrócie LSFEM. Umożliwia ona modelowanie pola przepływu w domenach obliczeniowych o bardzo skomplikowanych kształtach z dokładnością znacznie większą niż ta uzyskiwana w oparciu o metodę objętości kontrolnych powszechnie stosowaną w programach CFD. Tym samym, udoskonalenie i analiza metody LSFEM są niewątpliwie ważne zarówno z naukowego jak i z praktycznego, inżynierskiego punktu widzenia. **W mojej ocenie, temat pracy i użyte w niej metody kwalifikują ją do dyscypliny inżynieria mechaniczna.** Podstawy teoretyczne LSFEM zostały w pracy przedstawione w sposób bardzo szczegółowy. Precyzyjnie omówiono stosowany algorytm obliczeniowy wraz ze specyfiką jego implementacji i stosowanymi bibliotekami matematycznymi. Przeprowadzono szereg testów mających na celu ocenę poprawności i efektywności przygotowanych procedur. Ich kompilacja pozwoliła stworzyć (udoskonalic) program obliczeniowy L3STER, który testowano w oparciu o typowe zadania testowe CFD i następnie wykorzystano do modelowania skomplikowanego przepływu w szczelinie o nieregularnym przekroju. Udostępnienie opracowanego programu L3STER środowisku naukowemu zasługuje na pochwałę. Proszę o informację czy program L3STER jest autorskim i samodzielnym dziełem doktoranta. Moja ogólna ocena pracy jest bardzo pozytywna. **Praca jest oryginalna i reprezentuje stopień złożoności rzadko spotykany w pracach doktorskich.** Pod kątem zaawansowanego opisu stosowanych metod i ich implementacji doktorant musiał wykazać się ponadprzeciętnymi umiejętnościami. Doktorant niewątpliwie ma dużą wiedzę na temat mechaniki płynów, metod obliczeniowych, algorytmów CFD i doskonale posługuje się aparatem zaawansowanym matematycznym.



## 2. Ocena szczegółowa.

Układ pracy jest typowy i podobny do tego jaki dotychczas spotykałem w recenzowanych przeze mnie pracach doktorskich. Praca napisana jest w języku angielskim w sposób zrozumiały i czytelny. Zasadnicza część pracy składa się z wprowadzenia, czterech rozdziałów (2-5) definiujących zakres prac, analizowane równania wraz z opisem stosowanych metod i algorytmów, po których w rozdziale 6 przedstawiono wyniki symulacji i analizy dokładności i efektywności opracowanego programu obliczeniowego. Pracę kończy zwięzłe podsumowanie, wskazanie możliwych kierunków badań i spis cytowanych w pracy artykułów. Wśród nich jeden, którego doktorant jest głównym autorem, a współautorem promotor niniejszej pracy. Jest to artykuł z 2022r. w liczącym się czasopiśmie *Computers and Mathematics with Applications*. Proszę o informację, czy od tego czasu ukazały się inne prace, których doktorant jest autorem lub współautorem.

Teza pracy, sformułowana w wprowadzeniu, brzmi *LSFEM może być zastosowane do efektywnego rozwiązania zagadnień przepływów nieściśliwych*. Nie jestem przekonany czy takie postawienie sprawy jest właściwe. To, że *LSFEM* jest stosowane w CFD jest powszechnie wiadome. Zakładam więc, że słowo klucz to „efektywny”, ale to wg mnie jest bardzo niemiarodajne, szczególnie w przypadku zagadnień CFD. Jak doktorant to rozumie? Czy efektywnie to znaczy w ciągu dnia czy tygodnia, czy miesiąca? Czy też po prostu szybciej niż stosując inną metodę zapewniającą porównywalną dokładność? Czy też „efektywnie” ma być synonimem „dokładnie” poprzez wyeliminowanie mankamentów *LSFEM* (dysypatywność, brak zachowania energii, problem z zachowaniem masy)? Proszę o klarowne wyjaśnienie tej kwestii. Ponadto, mając na uwadze wady metody *LSFEM*, proszę również o komentarz odnośnie jej stosowania w modelowaniu przepływów turbulentnych przy dużych liczbach Reynoldsa.

W rozdziale 2 zdefiniowano analizowane zagadnienie konwekcji-dyfuzji oraz równania Navier-Stokesa (N-S) opisujące ruch płynu nieściśliwego. Nie ma czegoś takiego jak nieściśliwe równania Naviera-Stokesa, to żargon i najlepiej go unikać w pracach doktorskich. Przedstawiono metodę całkowania równań w czasie, metodę ekstrapolacji i algorytm rozwiązania równań N-S. Proszę o informację czy i jeśli tak, to w jakim stopniu błąd ekstrapolacji (2.17) wpływa na spełnienie równania ciągłości przez ekstrapolowaną prędkość w przypadku  $J > 1$  (Tabela 2.2). Czy przedstawione kroki algorytmu 2.18-2.20 wyglądałyby analogicznie w przypadku stosowania metody jawnej całkowania w czasie? Proszę o wyjaśnienie w jaki sposób wymuszone jest spełnienie równań 2.19a i b.

Rozdziały 3 i 4 stanowią szczegółowy opis metody *LSFEM*. Przyznaję, że dla „nie eksperta” w tej dziedzinie nie jest to łatwa część pracy i niełatwo się czyta te rozdziały. W punkcie 3.4 omawiane są metody obliczania całek. W równaniu 3.30b powinno być  $\tau_2$ . Pod równaniem (3.31) napisano, że aby uniknąć analitycznego całkowania stosowane są kwadratury Gaussa. Czy w ogólności analityczne całkowanie (3.31) jest wykonalne? W punkcie 4.3 przedstawiono technikę faktoryzacji obliczania sum, bez której metoda *spectral/hp* prawdopodobnie nie byłaby wykorzystywana w praktyce ze względu na ogromne koszty obliczeniowe. Adaptację tej techniki do *LSFEM* doktorant postrzega jako nowatorski element pracy. To doskonały pomysł, ale czy wobec tego należy rozumieć, że dotychczas *LSFEM* było stosowane bez faktoryzacji sum? Testy efektywności poszczególnych wariantów obliczania

operatorów i rozwiązywania równań N-S przedstawiono w punkcie 4.4. Testy te są bardzo szczegółowe, wykonano je zakładając dużą kartezjańską siatkę obliczeniową. Najefektywniejsza dla zagadnień 3D okazała się metoda wykorzystująca faktoryzację, ale co to znaczy dużą siatkę ( $10^3$  czy  $100^3$ ....)? Czy jest ona porównywalna do tych wykorzystywanych w rozdziale 6?

Rozdział 5 to opis programu L3STER, metodyki implementacji LSFEM i ponowne rzetelnie wykonane testy efektywności oraz test skalowalności. W tym ostatnim pokazano, że dla 15.5 mln zagadnienia rozwiązywanego na gęstej siatce (1.5mln stopni swobody) program skaluje się bardzo dobrze w zakresie do około 10 węzłów. Potem jednak skalowalność jest już gorsza i należy podejrzewać, że dla większej liczby węzłów (100-200) obserwowalibyśmy całkowite spłaszczenie linii skalowalności. To jest typowe, ale mam wrażenie, że w przypadku innych programów, np. Nektar++, Nek5000, efekt ten występuje znacznie później ( $> 1000$  CPU). Proszę o komentarz jak w tym świetle należy rozumieć wspomnianą w tezie pracy efektywność.

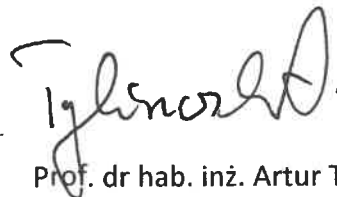
Rozdział 6 to weryfikacja opracowanego algorytmu na podstawie zagadnień przepływowych dla których znane są rozwiązania analityczne, tzw. rozwiązanie wytworzone (2D) oraz wiry Taylora-Greena (3D). W pierwszym przypadku pokazano, że zgodnie z oczekiwaniami błąd dyskretyzacji przestrzennej maleje eksponentalnie wraz z rzędem  $p$ . Słusznie zaobserwowano, że dla dużych  $p$  błąd jest zdeterminowany metodą całkowania w czasie i krokiem czasowym. Proszę o informację jaka była wartość liczby CFL w tych symulacjach dla poszczególnych  $p$ ? Ciekawa jest dyskusja dotycząca błędu całkowania w czasie i jego proporcjonalności do  $\Delta t^{2.8}$  i  $\Delta t^2$ . Przepływ Taylora-Greena to powszechnie stosowany przypadek testowy w 2D i 3D. Jego wersja „turbulentna” (Brachet et al. JFM, 1983) jest jednak znacznie ciekawsza. W tej przyjętej do analizy nic specjalnego się nie dzieje, wiry pozostają na swoich początkowych pozycjach a energia zanika w czasie. Niemniej jest to dobry przypadek testowy. Nie rozumiem, dlaczego nie można zastosować okresowych warunków brzegowych. Dla metod typu różnice skończone to trywialna sprawa jest. Zakłada się, że rozwiązanie w węźle  $i=N+1$  równe jest temu w węźle  $i=1$ . Jak więc warunek okresowy powinien być zaimplementowany w LSFEM? Problemy ze zbieżnością metody iteracyjnej w trakcie rozwiązania równania Poissona dla okresowych warunków brzegowych lub gdy postawiony jest warunek Neumanna dla ciśnienia na wszystkich brzegach rzeczywiście mogą się pojawić, jak doktorant słusznie zauważył. Równanie Poissona jest w tym przypadku osobliwe. Zwykle rozwiązuje się zakładając stałą wartość ciśnienia w dowolnym punkcie. Tak doktorant uczynił analizując ostatni przypadek testowy. Szkoda, że doktorant nie pokazał, jak wygląda błąd rozwiązania wirów Taylora-Greena w funkcji  $p$  lub liczby elementów. Optyw cylindra, kolejne zagadnienie, to też klasyczny przypadek testowy, tym razem jednak dla przepływu w warunkach przejścia laminarno-turbulentnego. Uzyskanie dobrych wyników w tym przypadku nie jest już tak łatwe jak w poprzednich testach. Gratuluję, że udało się tego dokonać. Na stronie 92 jest mowa o jakimś widocznym błędzie w okolicy wylotu z obszaru obliczeniowego i o jego zaniku, gdy obszar jest dłuższy. Nie rozumiem o co tu chodzi. Ja tego błędu nie widzę. Czy ta dyskusja to nie jest to czasem efekt „copy-paste” z jakiegoś wcześniejszego opracowania? Gdzie dokonano pomiarów przedstawionych na Rys. 6.5? Tuż za walcem czy bliżej wylotu? Na jakiej podstawie uzyskane wyniki określa się jako DNS? Ile wyniósł stosunek  $h/\eta$ ? Ostatni przypadek testowy to przepływ w szczelinie. W tym przypadku brak jest porównań z danymi eksperymentalnymi lub obliczeniowymi innych autorów. Celem jest zademonstrowanie możliwości programu L3STER i analizy zagadnienia przepływowego w naprawdę skomplikowanej geometrii stosując różne modele opisu przepływu. Wyniki są

bardzo ciekawe, ale bez weryfikacji trudno jest je komentować. Pracę kończy zwięzłe podsumowanie opracowanych metod i wskazanie możliwych kierunków badań.

### 3. Konkluzja

Praca jest napisana w sposób jasny i komunikatywny. Rysunki są czytelne i dobrze opisane. Sformułowanych przeze mnie pytań i wątpliwości nie należy traktować jako zarzutów, a raczej jako element ciekawości naukowej. **Bez wątpienia przedstawiona praca wystawia pozytywne świadectwo wiedzy i umiejętnościom doktoranta. Uzyskane przez niego wyniki i opracowany program L3STER stanowią bardzo wartościowy wkład w rozwój efektywnych narzędzi do modelowania skomplikowanych procesów przepływowych.**

Reasumując, przedstawiona do recenzji rozprawa jest w mojej ocenie rozwiązaniem złożonego zadania naukowego. Uzyskane przez doktoranta wyniki i udostępniony program L3STER będą z pewnością wykorzystywane w przyszłości i stanowią doskonałą bazę do kontynuowania badań. Pozwala to stwierdzić, że zrealizowane zostały założone cele pracy. Przedstawiona rozprawa doktorska dowodzi wiedzy doktoranta w zakresie mechaniki płynów, CFD, metod numerycznych i informatyki. **Biorąc powyższe pod uwagę stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr. inż. Jakuba Gałęckiego spełnia wytyczne określone w Rozporządzeniu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego i wnioskuję o dopuszczenie jej do publicznej obrony. Ponadto, z uwagi na ponadprzeciętny poziom trudności w opracowaniu i implementacji metody LSFEM, stworzenie i udostępnienie społeczności naukowej opracowanego przez doktoranta programu L3STER, wnioskuję o wyróżnienie pracy.**



Prof. dr hab. inż. Artur Tyliczszak