

Streszczenie

Geometria tkanin to obszerna i dobrze zbadana dziedzina matematyki. Do tej pory znalazła ona szereg rozmaitych zastosowań w wielu obszarach nauki. Jednym z nich jest fizyka matematyczna, gdzie przykładowo tzw. tkaniny Veronese stanowią ważny budulec teorii układów bihamiltonowskich. Warto tu zwrócić uwagę, że wychodząc o krok poza ramy klasycznej definicji tkaniny napotkamy w tym obszarze prawdziwe bogactwo struktur posiadających naturalne całkowalne dystrybucje styczne, takie jak *struktury bilagranżowskie*, których źródło leży w rozważaniach dotyczących kwantowania geometrycznego, czy *foliowane różniczkowe pseudoriemannowskie* utwierdzone w kanonie numerycznej ogólnej teorii względności pod postacią *formalizmu 3+1 ADM*. Strukturom tym zwyczajowo nie nadaje się nazwy „tkanina”, gdyż jest ona zarezerwowana jedynie dla tych układów foliacji, które posiadają nietrywialną różniczkowo-geometryczną strukturę lokalną. Niemniej, pomimo jej braku z punktu widzenia geometrii różniczkowej, w natywnej geometrii wybranego zagadnienia nietrywialna struktura lokalna tych obiektów staje się jawna i namacalna.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników podstawowych badań struktury lokalnej tkanin w geometriach bogatszych niż geometria różniczkowa. Skupimy się w niej na tkaninach w geometrii unimodularnej oraz w geometrii symplektycznej, kontynuując wstępne badania S. Tabachnikova zawarte w jego pracy z 1993 roku. Zaprezentujemy szereg konstrukcji nowych niezmienników lokalnych *tkanin w obecności formy objętości*, *2- tkanin lagranżowskich* (znanych jako *struktury bilagranżowskie*) oraz *generycznych 2- tkanin symplektycznych*. Wśród opisanych niezmienników znajdują się zarówno te natury krzywiznowej, indukowane przez naturalne koneksje niezmiennicze charakterystyczne dla poszczególnych geometrii, jak i ich czysto geometryczne odpowiedniki, inspirowane klasycznym zjawiskiem *holonomii 3- tkaniny* dostrzeżonym przez W. Blaschkego i G. Bóla w latach 30. XX wieku. Następnie zastosujemy je w celu odnalezienia postaci normalnych niektórych tkanin względem formy objętości lub formy symplektycznej przestrzeni tła. Podamy również przykłady zastosowań wyprowadzonej teorii w szeroko pojętej fizyce matematycznej, w tym w numerycznej relatywistyce.

Słowa kluczowe: *foliacje, formy różniczkowe, geometria różniczkowa, geometria symplektyczna, koneksje liniowe, postacie normalne, tkaniny*

Abstract

Web geometry is a vast, well-developed field of mathematics, with many applications in various domains of human knowledge. Some of its most celebrated contributions are to mathematical physics, where, for example, the notion of *Veronese web* has become a basic building block of the theory of *bi-Hamiltonian systems*. It is worthwhile to note that, by stepping slightly outside of bounds of classical definitions, one finds there a true wealth of geometrical structures carrying several natural integrable tangent distributions, such as *bi-Lagrangian structures*, the source of which can be traced back to research on methods of geometric quantization, and *foliated pseudo-Riemannian structures*, widely used in numerical relativity via *ADM 3+1 formalism*. It has become the norm that these structures are not designated with the term “web”, which is traditionally reserved for systems of foliations with nontrivial differential-geometric local structure. Nevertheless, despite its local triviality from the point of view of differential geometry, its local structure in the native geometry of the setting becomes apparent and tangible.

The goal of this thesis is to present a systematic study of webs in geometries richer than ordinary differential geometry, focusing specifically on the geometry of volume preserving transformations and symplectic geometry. Our work continues the preliminary research of S. Tabachnikov outlined in his work from 1993. We construct novel local invariants of *webs in unimodular geometry*, *Lagrangian 2-webs* and *generic symplectic 2-webs*. Some of these invariants include differential invariants derived from curvatures of certain natural linear connections invariant under the mappings defining the geometry, and their purely geometric counterparts, inspired by the classical *planar 3-web holonomy* phenomenon described by W. Blaschke and G. Bol in 1930s. Using these, we derive local normal forms of some of the webs in question with respect to the ambient volume or symplectic form. We also provide applications of the developed theory in mathematical physics, including numerical relativity.

Keywords: *foliations, differential forms, differential geometry, linear connections, normal forms, symplectic geometry, webs*