Recenzja rozprawy doktorskiej

Tomasz Penza

Sufficient Conditions for a Maltsev Product of Two Varieties To Be a Variety

(30 czerwca 2023)

Przedstawiona rozprawa doktorska dotyczy produktów Malcewa rozmaitości, a konkretnie ma za cel poszukiwanie warunków na to, aby produkt Malcewa był rozmaitością. Chodzi tu o rozmaitości algebraiczne (varieties), tzn. klasy struktur algebraicznych ustalonego typu, definiowane poprzez układy równości (equations). Każda rozmaitość jest zamknięta na podalgebry, iloczyny kartezjańskie oraz obrazy homomorficzne. Klasyczny fakt mówi, że jest też odwrotnie: każda klasa zamknięta na podalgebry, iloczyny kartezjańskie oraz obrazy homomorficzne jest wyznaczona przez układ równości.

Produkt Malcewa (Maltsev product) jest dosyć specyficzną, asymetryczną, operacją na parze rozmaitości, która w wyniku daje rodzinę algebr. Produkty Malcewa są dobrze znane w algebrze, jako, że dają możliwości konstruowania nietrywialnych nowych naturalnych obiektów matematycznych.

Ogólne zagadnienie rozważane w niniejszej rozprawie, to pytanie kiedy produkt Malcewa daje w wyniku rozmaitość. Najważniejszy wynik rozprawy to twierdzenie 8.6 pokazujące dość zgrabny warunek wystarczający, przy założeniu, że druga z pary rozmaitości jest termowo (wyrażeniowo) idempotentna. Aby ten wynik otrzymać, Autor wykonał sporo pracy, uzyskując różne pomocnicze wyniki, które doprowadziły do twierdzenia 8.6. W ostatnim rozdziale przedstawione są zastosowania oraz przykłady. Można też tam znaleźć pytania otwarte, bardziej szczególne niż ogólne oczywiste pytanie o warynek konieczny i wystarczający na to, aby produkt Malcewa był rozmaitością.

Rozprawa jest napisana starannie, od strony matematycznej nie znalazłem żadnych specjalnych usterek ani błędów. Dowody głównych twierdzeń oraz pomocniczych lematów polegają na analizowaniu różnych równości, wyrażeń oraz własności kongruencji. Bywa to czasami całkiem nietrywialne i wymaga doświadczenia oraz dobrego obeznania z tematem. Czytając przedstawioną rozprawę nie miałem wątpliwości, że Autor dobrze czuje się w temacie, potrafi w sposób zwięzły i logiczny zaprezentować swoje główne tezy.

Wyniki rozprawy znajdują się też w trzech artykułach opublikowanych w dość prestiżowym specjalistycznym czasopiśmie *Algebra Universalis*. Wszystkie artykuły są wspólne z promotorką, prof. Anną Romanowską, przy czym jeden z nich jest dodatkowo wspólny z C. Bergmanem. Niemniej jednak, skądinąd wiem, że wkład Autora w wyniki rozprawy jest istotny. Co ważniejsze, główny wynik rozprawy (Theorem 8.6) jest **znaczącym wzmocnieniem** wyniku z najnowszego (2022) spośród wyżej wspomnianych artykułów.

Podsumowując, trzy współautorskie publikacje w cenionym specjalistycznym czasopiśmie to całkiem przyzwoity dorobek w początkowej fazie potencjalnej kariery naukowej.

Poniżej kilka drobnych uwag krytycznych. Wszystkie dotyczą strony redakcyjnej i nie wpływają na ogólną pozytywną ocenę rozprawy.

1. Praca mogłaby być zredagowana trochę lepiej. Mianowicie, Autor mógł użyć podrozdziałów, wtedy struktura rozprawy byłaby bardziej czytelna. To widać we wstępie, gdzie Autor odwołuje się tylko do rozdziałów 2, 4 i 7. Przy czym rozdział 2 to „Preliminaries” czyli rozdział wstępny.

2. Srona 18, „direct product”. Wiedząc, że jest to część definicji pojęcia *prevariety*, domyśliłem się, że chodzi o iloczyn kartezjański, czyli po prostu produkt. Przymiotnik „direct” sugeruje, że chodzi o koprodukt, podobnie jak „direct limit” to kogranica a „limit” lub „inverse limit” oznacza granicę funktora. Być może w środowisku algebraików ogólnych pojęcie „direct product” (czyli „produkt prosty”) nie budzi żadnych wątpliwości, ale dla szerszego grona matematyków jest to trochę mylące. Nie jestem w tym odosobniony, ponieważ na stronie Wikipedii dotyczącej pojęcia „direct product” można znaleźć polemikę:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Direct_product`.

3. Strona 20, Example 2.4: Autor mógł bardziej się wysilić i podać odrobinę mniej trywialny przykład, chociażby dodając operację typu

$$f'(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}),$$

   gdzie σ jest permutacją.

4. Strona 26. Pojęcie algebry wolnej należy do teorii kategorii, co można było odpowiednio skomentować. Ponadto, algebra wolna to para złożona z algebry oraz odpowiedniego odwzorowania.

5. Strona 68. Symbol $\mathcal{A}$ oznacza rozmaitość złożoną z wszystkich algebr danego typu. W rozdziale 2 znajdujemy bardziej czytelne oznaczenie $\mathcal{A}_\Omega$. Na początku dowodu Twierdzenia 8.6 powinien być dodany komentarz w stylu „where $\mathcal{A}$ denotes ...”. Znaczenie symbolu $\mathcal{A}$ jest wprawdzie przypomniane na stronie 66, ale czytając tekst wyrywkowo można tego nie dostrzec. Inna opcja to użycie bardziej specjalnego symbolu na największą rozmaitość danego typu.

6. Uwaga czysto techniczna. Wersja elektroniczna rozprawy nie zawiera aktywnych odnośników, co znacząco utrudnia przeglądanie. Jest to niewątpliwie usterka redakcyjna, którą można naprawić w kilka sekund, dodając pakiet *hyperref*. Mając aktywne odnośniki, wygodnie czytam tekst z ekranu, bez potrzeby drukowania, oszczędzając w ten sposób papier.

Konkluzja. Przedstawiona rozprawa doktorska zawiera nowe i nietrywialne wyniki w dość aktywnym dziale czystej matematyki, jakim jest algebra ogólna. **Wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów postępowania doktorskiego.**

Bardziej formalnie: Przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustanowione przez Artykuł 187 ust. 1-3 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2022 r. poz. 574 ze zm.).

30 czerwca 2023

Wiesław Kubiś

Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences