POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Rozprawa doktorska

Inżynieria Lądowa, Geodezja i Transport

Dziedzina Nauk Inżynieryjno-Technicznych

mgr inż.
Kamila Martyniuk-Sienkiewicz

Konstrukcje i metamateriały tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym

Promotor
dr hab. inż. **Anna Al Sabouni – Zawadzka,** prof. uczelni

Warszawa 2026

Podziękowania

Niniejsza praca powstała dzięki wsparciu i zaangażowaniu wielu osób, którym pragnę wyrazić serdeczne podziękowania.

Szczególne podziękowania składam Pani dr hab. inż. Annie Al Sabouni - Zawadzkiej, mojej Promotor, za nieocenione wsparcie, opiekę merytoryczną, zaangażowanie oraz motywację do pracy na każdym etapie przygotowywania niniejszej rozprawy. Dziękuję za wszystkie cenne wskazówki, inspirujące rozmowy, cierpliwość oraz życzliwość, które towarzyszą mi od początku mojej pracy. Jestem szczególnie wdzięczna za wieloletnią inspirację do podążania ścieżką naukową i za to, że dzięki tej współpracy mogłam zrozumieć, jak wartościowa, rozwijająca i piękna może być praca badawcza.

Serdeczne podziękowania kieruję również do Pana prof. dr. hab. inż. Wojciecha Gilewskiego, który okazał mi ogromną pomoc i wsparcie na każdym etapie kształtowania moich badań. Dziękuję za przekazaną wiedzę, cenne doświadczenie, wsparcie merytoryczne oraz wskazówki, które miały istotne znaczenie dla rozwoju mojej pracy naukowej. Jestem również bardzo wdzięczna za cierpliwość, życzliwość oraz gotowość do dzielenia się wiedzą, które stanowiły dla mnie ważne oparcie.

Zakładowi Budownictwa Ogólnego Wydziału Inżynierii Lądowej PW składam serdeczne podziękowania za możliwość współpracy, życzliwość oraz stworzenie przestrzeni do kreatywnego rozwoju naukowego i zawodowego.

Moim Rodzicom i Dziadkom składam najserdeczniejsze podziękowania za cały trud włożony w mój rozwój, nieustanne wsparcie oraz motywację, które towarzyszyły mi na każdym etapie mojej edukacji, a później pracy nad rozprawą. Dziękuję za cierpliwość, wyrozumiałość oraz dobre słowo w trudnych momentach.

Moim Przyjaciołom (w szczególności Katarzynie i Ewelinie) dziękuję za wsparcie, za wszystkie spotkania — zarówno te, na których mogłam być, jak i te, które musiały poczekać — za wyrozumiałość oraz za godziny cierpliwego słuchania o mojej pracy naukowej.

Przede wszystkim chciałabym podziękować mojemu Mężowi Krzysztofowi, który uwierzył we mnie, zanim ja w siebie uwierzyłam. Dziękuję za nieustanne wsparcie, wyrozumiałość, obecność i za wszystkie rozmowy, także te naukowe, za trafne uwagi i motywację. Twoja obecność, spokój i wsparcie były dla mnie bezcennym źródłem siły.

Streszczenie

Rosnące wymagania stawiane współczesnym konstrukcjom zwiększają znaczenie rozwiązań zdolnych do adaptacji do zmiennych warunków pracy przy jednoczesnym ograniczeniu zużycia materiału. Jednym z kierunków takich poszukiwań są struktury tensegrity, charakteryzujące się lekkością, modułowością oraz możliwością kształtowania ich odpowiedzi mechanicznej. Praca koncentruje się na ocenie możliwości ich wzmacniania za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego, którego układ inspirowany jest wynikami optymalizacji topologicznej oraz wzorami metamateriałów auksetycznych.

Głównym celem pracy było sprawdzenie, czy lokalne, niejednorodne wzmacnianie struktur tensegrity umożliwia uzyskanie korzystniejszej odpowiedzi mechanicznej niż w przypadku wzmocnienia równomiernego. Drugim celem była ocena możliwości nadania tym strukturom właściwości auksetycznych poprzez zastosowanie inteligentnego szkieletu odwzorowującego wzory metamateriałów. W ramach pracy opracowano bazę modułów i struktur tensegrity oraz autorski algorytm w programie *Mathematica*, służący do budowy, modyfikacji i analizy badanych układów. Dodatkowo, przeprowadzono analizy numeryczne struktury typu płytowego zbudowanej z modułów przestrzennych tensegrity z wykorzystaniem programu *Abaqus*.

Uzyskane wyniki potwierdziły, że obszarowe wzmacnianie struktur tensegrity inteligentnym szkieletem opartym na optymalizacji topologicznej pozwala skuteczniej ograniczać przemieszczenia niż wzmocnienie jednorodne. Wzmocnienie może być realizowane zarówno poprzez zmianę wartości *self-stressu* w modułach, jak i poprzez modyfikację geometrii elementów. Wykazano również możliwość odwzorowania układów topologicznie optymalnych w ciągłych, modularnych konstrukcjach tensegrity. Efekt auksetyczny wystąpił jedynie w wybranych przypadkach i miał ograniczony, niestabilny charakter. Praca wskazuje, że inteligentny szkielet wewnętrzny może być skutecznym narzędziem sterowania zachowaniem struktur tensegrity.

Słowa kluczowe: tensegrity, inteligentny szkielet, struktury adaptowalne, konstrukcje adaptowalne, metamateriały auksetyczne

Abstract

The growing demands placed on modern structures increase the need for solutions that can adapt to changing operating conditions while reducing material consumption. One promising direction in this field is the study of tensegrity structures, which are characterised by lightness, modularity, and the possibility of controlling their mechanical response. This study focuses on assessing the potential of strengthening such structures by means of an smart internal framework, whose configuration is inspired by the results of topology optimisation and by patterns found in auxetic metamaterials.

The main objective of the study was to determine whether local, non-uniform strengthening of tensegrity structures can lead to a more favourable mechanical response than uniform reinforcement. A second objective was to assess the possibility of introducing auxetic properties into these structures through the use of an smart framework reflecting metamaterial patterns. As part of the research, a database of tensegrity modules and structures was developed, together with an original algorithm in *Mathematica* for generating, modifying, and analysing the investigated systems. In addition, numerical analyses of a plate-like structure composed of spatial tensegrity modules were carried out in *Abaqus*.

The results confirmed that regional strengthening of tensegrity structures with an smart framework based on topology optimisation can reduce displacements more effectively than uniform reinforcement. Strengthening may be achieved both by changing the self-stress level in the modules and by modifying the geometry of the elements. The study also demonstrated the possibility of mapping topologically optimal layouts onto continuous modular tensegrity structures. The auxetic effect was observed only in selected cases and was limited and unstable. Overall, the study shows that an smart internal framework can be an effective tool for controlling the behaviour of tensegrity structures.

Keywords: tensegrity, smart internal framework, adaptive structures, adaptable structures, auxetic metamaterials

Spis treści

Streszczenie 5
Abstract 6
Spis symboli 10
1. Wprowadzenie 13
1.1. Tematyka i motywacja 13
1.2. Cel i zakres pracy 15
1.3. Układ pracy 18
Część I – Podstawy teoretyczne 20
2. Tensegrity 20
2.1. Definicja i klasyfikacja 20
2.2. Zastosowania konstrukcji tensegrity w architekturze 27
2.3. Metamateriały tensegrity 35
2.4. Matematyczne podstawy tensegrity 40
2.4.1. Geometria tensegrity 40
2.4.2. Poszukiwanie formy (*form-finding*) 42
2.4.3. Mechanika tensegrity 46
2.4.4. Rozkład według wartości osobliwych (SVD, *Singular Value Decomposition*) 50
2.4.5. Budowa struktur tensegrity z pojedynczych modułów 52
Część II - Konstrukcje tensegrity ze szkieletem opartym na zadaniach optymalizacji topologicznej 59
3. Konstrukcje tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym 59
3.1. Struktury zdolne do adaptacji 59
3.2. Tensegrity – struktury inteligentne 61
3.3. Optymalizacja topologiczna 63
3.4. Szkielet oparty na wynikach optymalizacji a optymalizacja topologiczna tensegrity 70
3.5. Wprowadzanie inteligentnego szkieletu 76
4. Analizy – struktury typu tarczowego zbudowane z modułów płaskich (2D) 86
4.1. Klasyczne zadania optymalizacji topologicznej 87
4.2. Struktury komórkowe tensegrity 88
4.3. Przykłady obliczeniowe 96
4.3.1. Przykład 1 - wspornik krótki 96

4.3.2. Przykład 2 - wspornik średniej długości 105
4.3.3. Przykład 3 - wspornik długi 111
4.3.4. Przykład 4 - belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą 117
4.3.5. Przykład 5 - belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą 124
4.3.6. Przykład 6 - belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami 129
4.3.7. Przykład 7 - belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami 135
4.3.8. Podsumowanie 141
5. Analizy – struktury typu płytowego zbudowane z modułów przestrzennych (3D) 145
5.1. Zadania optymalizacji topologicznej 146
5.2. Struktury komórkowe tensegrity 148
5.3. Przykłady obliczeniowe 157
5.3.1. Struktury zbudowane z modułów *Simplex* czterozastrzałowy 157
5.3.2. Struktury zbudowane z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) 173
5.3.3. Podsumowanie 186
6. Przykład zastosowania – wiata przystankowa węzła tramwajowego 189
6.1. Opis konstrukcji 189
6.1.1. Geometria konstrukcji oraz model numeryczny 189
6.2. Model obliczeniowy 192
6.2.1. Obciążenia 193
6.3. Wzmocnienie przy użyciu szkieletu wewnętrznego 202
6.3.1. Wzmocnienie pasa modułów – Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu 203
6.3.2. Wzmocnienie pojedynczych modułów – Przypadek pracownika stojącego w miejscu 204
6.3.3. Wzmocnienie obszarowe – Przypadek zalegającego śniegu 205
6.3.4. Wzmocnienie krawędzi – Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych 206
6.4. Wyniki 208
6.4.1. Wzmocnienie pasa modułów – Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu 208
6.4.2. Wzmocnienie pojedynczych modułów – Przypadek pracownika stojącego w miejscu 211
6.4.3. Wzmocnienie obszarowe – Przypadek zalegającego śniegu 212

6.4.4. Wzmocnienie krawędzi – Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych 216
6.5. Podsumowanie 220
Część III – Metamateriały tensegrity o cechach auksetycznych 221
7. Struktury auksetyczne tensegrity 221
7.1. Materiały auksetyczne 221
7.2. Zastosowania metamateriałów 2D 228
7.3. Analizy – struktury auksetyczne płaskie (2D) 230
7.3.1. Przykłady materiałów auksetycznych 231
7.3.2. Struktury komórkowe tensegrity 234
7.3.3. Wyniki 239
7.3.4. Podsumowanie 257
8. Podsumowanie pracy 259
8.1. Wnioski 259
8.2. Dalsze badania 267
Bibliografia 271
Spis rysunków 294
Spis tabel 310
Spis załączników 311

Spis symboli

a – długość jednostkowa boku modułu w jednostce: m

B, C, D – długość boku struktury w jednostce: m

$A_c = k \cdot A_z$ – pole przekroju cięgien w jednostce: m^2

A_z – pole przekroju zastrzałów w jednostce: m^2

$k = \frac{A_c}{A_z}$ – współczynnik określający stosunek przekroju cięgien (prętów rozciąganych) do przekroju zastrzałów (prętów ściskanych)

$m = \frac{A_{z,A}}{A_{z,B}}$ - współczynnik określający stosunek pola przekroju zastrzałów A do pola przekroju zastrzałów B

σ – współczynnik określający poziom sprężenia prętów w tensegrity, bez jednostki

S – siła sprężająca pojedynczy pręt $(S = E \cdot A \cdot \sigma)$, w jednostce: N

E – moduł Younga w jednostce: $\mathrm{Pa}, \mathrm{GPa}$

P – obciążenie siłą skupioną w jednostce: N, kN

δ – przemieszczenie węzła pod siłą skupioną w jednostce: $\frac{P \cdot a}{E \cdot A}$

$r_k = \frac{k_{wzm}}{k_{norm}}$ – iloraz wartości współczynnika k w obszarach wzmocnionych do wartości współczynnika k w obszarach niewzmocnionych

$r_m = \frac{m_{wzm}}{m_{norm}}$ – iloraz wartości współczynnika m w obszarach wzmocnionych do wartości współczynnika m w obszarach niewzmocnionych

$r_\sigma = \frac{\sigma_{wzm}}{\sigma_{norm}}$ – iloraz wartości wartości współczynnika σ w obszarach wzmocnionych do wartości współczynnika σ w obszarach niewzmocnionych

ν – współczynnik Poissona

p – mnożnik określający stosunek wartości sił sprężających w poszczególnych zestawach prętów

F_0 – siła sprężająca pojedynczy pręt $(F_0 = p \cdot F)$, w jednostce: N

F – siła osiowa, w jednostce: N

F_{kr} – siła krytyczna w pręcie ściskanym obliczona zgodnie z wzorem Eulera, w jednostce: N

d – średnica pręta, w jednostce: m

D_z – średnica zewnętrzna pręta, w jednostce: m

D_w – średnica wewnętrzna pręta, w jednostce: m

I – moment bezwładności przekroju, w jednostce: m^4

L – długość pręta, w jednostce: m

1. Wprowadzenie

1.1. Tematyka i motywacja

Jednym z istotnych wyzwań współczesnego świata jest próba dostosowania się do coraz bardziej gwałtownych zmian napędzanych przez zmieniające się przepisy, rozwój technologii, a także przemiany społeczne i klimatyczne. Dostosowanie się do tych zmian, następujących w coraz większym tempie, wymusza dostosowywanie się na każdej gałęzi przemysłu. Obszar inżynierii lądowej nie jest wyjątkiem i również styka się z wymaganiami ze strony zarówno społeczeństwa, norm prawnych, jak i inwestorów. Z upływem czasu obiekty budowlane przestają odpowiadać wymaganiom technicznym, użytkowym oraz funkcjonalnym. Wynika to ze zmian związanych z eksploatacją konstrukcji spowodowaną przez zmiany klimatyczne powodujące gwałtowne zjawiska klimatyczne, nowych potrzeb użytkowników i zmian w funkcji budynków wynikających z przemian pokoleniowych lub migracji ludności na danym terenie, a także rozwoju wymagań technicznych i oczekiwań wobec obiektów budowlanych. Przykładem takich zmian mogą być wyzwania związane ze zrównoważonym rozwojem i efektywnością energetyczną konstrukcji lub przemiany wynikające z popularyzacji pracy zdalnej.

Współczesne budownictwo zaczyna skupiać się na adaptacji konstrukcji (zarówno istniejących, jak i projektowanych) do otaczających warunków poprzez regulowanie geometrii i odpowiedzi konstrukcji na obciążenia, zmianę właściwości materiału, z którego jest ona zbudowana lub adaptację układu funkcjonalnego. Każde z tych działań odpowiada na liczne, coraz częściej pojawiające się potrzeby ze strony użytkowników budynków, a także ich bezpieczeństwo. Jedną z coraz bardziej popularnych form konstrukcji stają się struktury aktywnie adaptujące się do otaczających warunków. Są one szczególnie istotne właśnie ze względu na bezpieczeństwo użytkowania, ale również na możliwość wykorzystywania ich w obszarach nieznanych, dalekich lub poddanych ekstremalnym warunkom (eksploracja kosmosu lub głębin oceanów, w których utrudnione warunki uniemożliwiają często szybką naprawę struktury). Konstrukcje takie mogą być również wykorzystywane w warunkach typowych obszarów miejskich, jako elementy budynków, które zwiększają komfort ich użytkowania, takie jak aktywne fasady zacieniające okna. Innym przykładem mogą być konstrukcje zadaszeń lub mostów i kładek, które zwiększają swoją nośność na czas gwałtownych zjawisk klimatycznych (na przykład padający śnieg

połączony z silnym wiatrem uniemożliwiający odśnieżenie obiektu lub gwałtowny wiatr wpływający na drgania kładki). Przykładem mogą być również coraz częstsze zmiany wynikające z użytkowania budynków, które potrafią przejść wiele zmian w czasie funkcjonowania wynikających ze zmiany najemców budynku lub wymogów technicznych.

Częstą odpowiedzią na powyższe potrzeby jest wybudowanie konstrukcji, która jest zaadaptowana do określonych warunków. Z pomocą przychodzą tu liczne rozwiązania związane z optymalizacją, w szczególności optymalizacją, która jest często idealną odpowiedzią na aktualne potrzeby dręczące współczesne budownictwo – poszukiwanie balansu pomiędzy największą możliwą efektywnością konstrukcji, jej elementów lub procesów w stosunku do kosztów produkcji, transportu, montażu lub kosztów operacyjnych i użytkowania. Analogicznie, można spotkać rozwiązania adaptujące materiał, z którego wykonana jest konstrukcja lub jej istotne elementy. Są to rozwiązania, w których projektuje się materiał auksetyczny lub wykazujący ekstremalne własności, które pozwolą na jeszcze lepsze wykorzystanie konstrukcji.

Powyższe rozwiązania jednak pozwalają na adaptację konstrukcji do określonego, często wąskiego, zakresu warunków brzegowych. Nie są to tym samym konstrukcje aktywnie reagujące na otaczające je warunki. W przypadku optymalnej odpowiedzi na jedno ekstremalne zjawisko, konstrukcja może całkowicie zawieść w przypadku innego krytycznego zjawiska, o odmiennych cechach. Stwarza to ryzyko, że konstrukcja nie odpowie w wystarczająco bezpieczny sposób, a tym samym często wyklucza możliwość wykorzystania jej w praktyczny sposób. Istotne jest zatem poszukiwanie struktur (konstrukcji i materiałów) mogących aktywnie i szybko dostosowywać się do otaczających warunków, a tym samym zwiększać bezpieczeństwo ich użytkowania.

W takim przypadku bardzo często wykorzystywane są konstrukcje inteligentne, które posiadają immamentne cechy pozwalające na aktywną odpowiedź na obciążenia. Takie cechy posiadają między innymi struktury origami oraz konstrukcje tensegrity. Tensegrity są znane ze swojej zdolności do adaptacji do warunków otoczenia, wykazując zwiększoną sztywność pod wpływem rosnącego wstępnego sprężenia i obciążeń zewnętrznych. Inteligencja konstrukcji tensegrity wynika z obecności nieskończenie małych mechanizmów (infinitezymalnych) równoważonych przez wstępne sprężenie (*self-stress*). Mechanizmy te pozwalają tensegrity

aktywnie reagować na zmiany warunków obciążenia lub uszkodzenia konstrukcji. Struktury te są stosowane zarówno w większych konstrukcjach (takich jak pawilony wystawowe, kładki piesze, fasady budynków), jak i na znacznie mniejszą skalę w postaci metamateriałów, czyli materiałów zaprojektowanych przez ludzi, często o właściwościach niespotykanych w naturze. Ponadto istnieje możliwość kontrolowania cech mechanicznych tensegrity poprzez zmianę wartości *self-stressu*, a także poprzez zmianę geometrii poszczególnych prętów w konstrukcji.

Wśród licznych prac omawiających optymalizację topologiczną konstrukcji tensegrity oraz projektowanie metamateriałów (na przykład o cechach auksetycznych) za ich pomocą, autorka nie spotkała się badaniami omawiającymi wprowadzanie optymalnego topologicznie szkieletu w tego typu strukturach w celu uzyskania aktywnej odpowiedzi na wiele przypadków obciążeń w sposób optymalny dla każdego z nich. Autorka nie spotkała się również z literaturą omawiającą wykorzystanie inteligentnego szkieletu imitującego kształt komórek metamateriałów. Tym samym pojawiło się pytanie czy można wzmocnić lub osłabić konstrukcję tensegrity za pomocą inteligentnego szkieletu, który jest zmienny wraz ze zmiennością warunków otaczających strukturę i jednocześnie pozwala na najlepszą odpowiedź na obciążenie.

W związku z powyższym autorka w niniejszej pracy stawia następującą tezę: Obszarowe wzmacnianie konstrukcji tensegrity inteligentnym szkieletem opartym na wynikach optymalizacji topologicznej umożliwia uzyskanie rozwiązania lepszego niż w przypadku wzmocnienia jednorodnego dostosowanego do występujących zmiennych sytuacji obliczeniowych. Obszarowe wzmacnianie metamateriałów tensegrity inteligentnym szkieletem opartym na wzorach struktur auksetycznych pozwala uzyskać odpowiedź auksetyczną na działające siły ściskające i rozciągające.

1.2. Cel i zakres pracy

Głównym celem pracy jest zbadanie możliwości wykorzystania inteligentnego szkieletu opartego na wynikach optymalizacji topologicznej w celu wzmocnienia struktury tensegrity tak, aby odpowiadała w sposób lepszy niż konstrukcja wzmocniona jednolicie (dla każdego przypadku obciążeń). Drugim głównym celem jest zbadanie możliwości wykorzystania inteligentnego szkieletu opartego na wzorach metamateriałów auksetycznych w celu uzyskania struktury odpowiadającej auksetycznie w przypadku ściskania/rozciągania.

W ramach celu głównego wyznaczono cele szczegółowe, których zadaniem jest sprecyzowanie kluczowych etapów pracy:

- Zbudowanie bazy modułów oraz struktur tensegrity, które mogą być podstawą do kreowania konstrukcji i metamateriałów z inteligentnym szkieletem wewnętrznym.
- Opracowanie algorytmu służącego do budowy struktur i wprowadzania do nich inteligentnego szkieletu oraz analizy struktur z inteligentnym szkieletem wewnętrznym.
- Porównanie odpowiedzi konstrukcji wzmocnionej równomiernie z odpowiedzią konstrukcji wzmocnionej za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego opartego na wynikach optymalizacji topologicznej w przypadku różnych obciążeń w celu oceny możliwości zastosowania takiego rozwiązania.
- Zbadanie wpływu rozmiaru konstrukcji na możliwość zastosowania inteligentnego szkieletu wewnętrznego w konstrukcjach tensegrity.
- Analiza możliwych zastosowań konstrukcji z inteligentnym szkieletem wewnętrznym dokonana na podstawie wybranych przykładów konstrukcji.
- Ocena odpowiedzi struktury wzmocnionej za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego opartego na wzorze struktury auksetycznej w przypadku ściskania i rozciągania w celu oceny możliwości zastosowania powyższego rozwiązania.

W związku z tym teza postawiona w niniejszej pracy jest związana z następującymi pytaniami badawczymi:

- Czy możliwe jest odwzorowanie kształtu konstrukcji optymalnych topologicznie lub struktur auksetycznych w ciągłych i jednolitych konstrukcjach modularnych tensegrity?
- W jaki sposób inteligentny szkielet wewnętrzny wpłynie na zachowanie struktury tensegrity?
- W jakim stopniu możliwe jest sterowanie zachowaniem struktury tensegrity poprzez inteligentny szkielet wewnętrzny?
- Jakie ograniczenia ma zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego? Które parametry mają kluczowe znaczenie w analizach?
- Jakie korzyści może za sobą nieść zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego w konstrukcjach tensegrity?

Zakres pracy obejmuje analizy numeryczne konstrukcji zbudowanych z płaskich oraz przestrzennych modułów tensegrity. Zdecydowano się na ograniczenie do struktur modularnych ze względu na możliwość wprowadzania wzmocnienia do pojedynczych modułów, a tym samym łatwiejszego wprowadzania zmiennego inteligentnego szkieletu. Ograniczono liczbę modułów do czterech powszechnie wykorzystywanych modułów tensegrity (dwóch płaskich: sześciokątnego oraz ośmiokątnego, dwóch przestrzennych: *Simplexa* czterozastrzałowego oraz rozszerzonego ośmiościanu) jako reprezentatywnej próbki. Skupiono się na dwóch sposobach wprowadzania inteligentnego szkieletu do układu modularnego: za pomocą geometrii (zmiany przekrojów prętów) oraz za pomocą zmiany wartości *self-stressu* w poszczególnych modułach. W ramach analiz przebadano struktury typu tarczowego oraz struktury typu płytowego. Struktury typu tarczowego modelowano za pomocą płaskich (dwuwymiarowych) modułów tensegrity, natomiast struktury typu płytowego za pomocą modułów przestrzennych (trójwymiarowych). W celu ograniczenia zakresu pracy nie rozważano struktur typu powłokowego (zakrzywionych ani wielopłatowych) ani struktur trójwymiarowych, w których wszystkie trzy wymiary są równorzędne. W ramach metamateriałów przebadano struktury zbudowane z modułów płaskich (metamateriały auksetyczne). W niniejszej pracy analizę ograniczono do wybranych rodzajów obciążeń oraz kilku schematów statycznych w przypadku konstrukcji oraz jednego przypadku metamateriału z wyjątkowymi cechami – auksetycznego, który jest jednym z najpowszechniejszych typów metamateriałów. W analizach wykorzystano autorski algorytm wykonany w programie *Mathematica (wer. 13.3)* oraz badania wykonane w komercyjnym oprogramowaniu *Abaqus (wer. 2018).* Wyniki optymalizacji topologicznej będące podstawą do dalszych analiz uzyskano w programie *Interactive 2D TopOpt App (wer. 2.4)* oraz *Interactive 3D TopOpt App (wer. 1.03)*. Powyższy zakres opracowania wynika przede wszystkim z ograniczeń czasowych oraz złożoności przygotowania części eksperymentalnej. Realizacja badań laboratoryjnych wymagałaby wykonania odpowiednich modeli lub próbek, jak i również opracowania szczegółowych rozwiązań konstrukcyjnych (m.in. węzłów), co stanowi odrębne i rozbudowane zagadnienie projektowe. Dodatkowo w przypadku rozwiązań opartych na technologiach addytywnych konieczne byłoby przygotowanie oraz wykonanie elementów w procesie wytwarzania przyrostowego, co znacząco poszerzałoby zakres pracy. Celem przeprowadzonych badań numerycznych jest

uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy dana koncepcja jest wykonalna oraz czy stanowi uzasadniony kierunek dalszych badań.

1.3. Układ pracy

Zasadnicza część pracy została podzielona na 8 rozdziałów oraz trzy główne części: Część I omawiającą postawy teoretyczne tensegrity (rozdział 2), Część II, w której opisane zostały konstrukcje oparte na zadaniach optymalizacji topologicznej (rozdziały 3-6) oraz Część III opisującą metamateriały tensegrity o cechach auksetycznych (rozdział 7). Praca rozpoczyna się Rozdziałem 1 stanowiącym wstęp do dalszej części rozprawy, opisującym tematykę i motywację pracy, a także jej cel i zakres.

Rozdział 2 przedstawia podstawy teoretyczne tensegrity rozpoczynając od opisu definicji i klasyfikacji tych struktur. Omówiono również krótko historię tensegrity oraz zastosowania tensegrity w architekturze oraz metamateriałach. Rozdział zamyka opis matematycznych podstaw tensegrity: opis geometrii, poszukiwania formy, mechaniki tensegrity, rozkładu SVD oraz budowy struktur z pojedynczych modułów.

Rozdział 3 poświęcony jest konstrukcjom tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym. Zaprezentowane w nim są istniejące rozwiązania dotyczące konstrukcji zdolnych do adaptacji oraz optymalizacji topologicznej wraz z wykorzystaniem jej w konstrukcjach tensegrity. Rozdział skupia się również na opisie struktur tensegrity jako inteligentnych konstrukcji, a także przedstawia przyjęty sposób wprowadzania inteligentnego szkieletu do konstrukcji modularnej.

Rozdział 4 szczegółowo omawia przeprowadzone badania struktur typu tarczowego zbudowanych z modułów płaskich tensegrity wzmocnionych inteligentnym szkieletem wewnętrznym wraz z dokładnym opisem metodyki oraz koncepcji proponowanego rozwiązania. Analizie zostały poddane przypadki wsporników o różnych długościach oraz belek swobodnie podartych. W każdej z analiz przedstawiono założenia, geometrię, warunki brzegowe oraz wyniki ilościowe dla poszczególnych przypadków. Rozdział kończy się analizą uzyskanych wyników oraz sformułowanych na ich podstawie wniosków.

Rozdział 5 przedstawia analizy struktur typu płytowego zbudowanych z przestrzennych modułów tensegrity wzmocnionych inteligentnym szkieletem wewnętrznym. Rozpatrywano

konstrukcje składające się z jednej oraz dwóch warstw modułów podparte w narożach lub na bokach. Rozdział prezentuje metodykę badawczą przyjętą w przypadku struktur przestrzennych, uzyskane wyniki oraz wnioski z uzyskanych eksperymentów.

Rozdział 6 przedstawia przykładowe zastosowanie konstrukcji tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym na przykładzie wiaty przystankowej węzła tramwajowego. W rozdziale zawarty jest opis konstrukcji wraz z modelem obliczeniowym oraz opisem przypadków obciążeń. Rozdział kończy się podsumowaniem wyników analiz przypadków oraz wnioskami omawiającymi możliwość zastosowania konstrukcji tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym.

Rozdział 7 skupia się na materiałach auksetycznych tensegrity. W rozdziale opisano podstawy teoretyczne materiałów auksetycznych oraz zastosowania metamateriałów 2D. W dalszej części opisano analizy dotyczące możliwości wprowadzenia inteligentnego szkieletu opartego na schemacie struktury auksetycznej, wraz z opisem wyników i wniosków płynących z analiz.

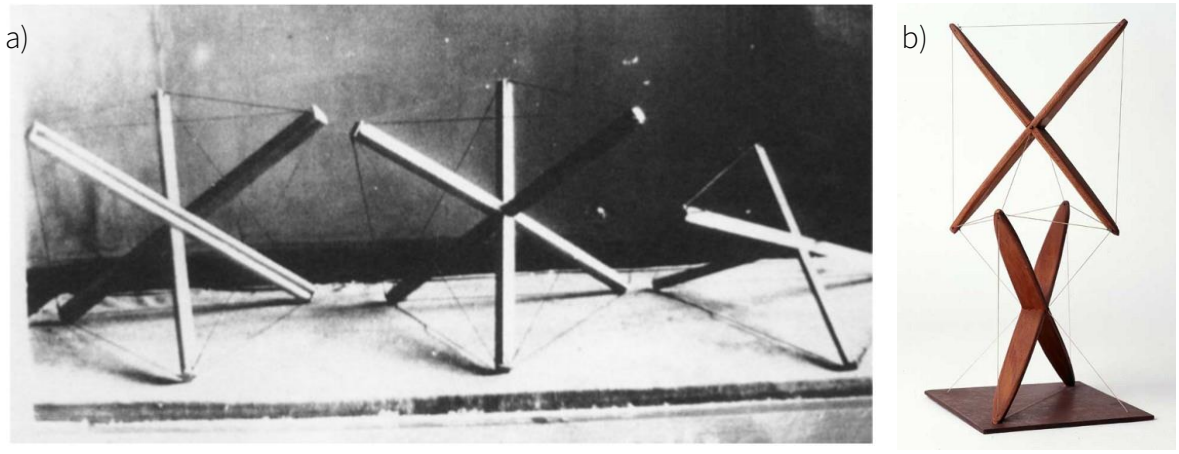
Rozdział 8 zawiera podsumowanie oraz wnioski końcowe dotyczące możliwości zastosowania inteligentnego szkieletu wewnętrznego jako możliwości wzmocnienia struktur tensegrity.

Część I – Podstawy teoretyczne

2. Tensegrity

2.1. Definicja i klasyfikacja

Historia struktur tensegrity swoje początki ma w sztuce – za pierwszy moduł tensegrity na świecie uznawana jest rzeźba Praca X (*X-piece*), którą w 1948 roku zaprezentował Kenneth Snelson (Rys. 2.1b). To po zobaczeniu jej amerykański architekt Richard Buckminster Fuller stworzył jako pierwszy pojęcie tensegrity i opisał regułę nią rządzącą. W podobnym czasie nad tego typu strukturami pracował francuski architekt David George Emmerich. Do dzisiaj panują liczne spory o to kto jako pierwszy zaproponował koncepcję tensegrity ze względu na znaczną bliskość pomiędzy uzyskaniem patentów: 1962 (Fuller), 1964 (Emmerich) oraz 1965 (Snelson). Zgodnie z informacjami przekazanymi przez Rene Motro zarówno Emmerich, jak i Snelson powoływali się na inspirację rosyjskim konstruktywizmem, a dokładnie na prace z lat 20. XX wieku autorstwa Karla Iogansona, łotewskiego artysty tworzącego w latach 1919-1921 w Moskwie serię rzeźb przypominających podstawowe moduły tensegrity (Rys. 2.1a) (Gomez Jauregui 2009; Kasprzak 2014; Micheletti, Podio-Guidugli 2022).



Rysunek 2.1 Pierwsze rzeźby tensegrity: a) rzeźby Karla Iogansona (źródło: (Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023)), b) Praca X (X-piece) (źródło: (Micheletti, Podio-Guidugli 2022)).

Po wystawie z rzeźbami Snelsona nastąpił spór pomiędzy nim a Fullerem o pierwszeństwo w kwestii wynalezienia tensegrity. Miał on się zakończyć w takcie wystawy prac Fullera w roku 1959 w Museum of Modern Art w Nowym Jorku, jednak sytuacja ostatecznie nie znalazła swojego rozwiązania. Z perspektywy współczesnych naukowców wymienieni wcześniej

naukowcy zostali uznani na równi za pionierów (Gómez Jáuregui 2004). W tym momencie również doszło do podziału w rozwoju tensegrity: Snelson dalej kontynuował pracę artystyczną i tworzenie rzeźb, zaś Fuller i Emmerich skupili się na wykorzystaniu tensegrity w architekturze.

Pomysłodawca terminu tensegrity, Richard Buckminster Fuller, określał te konstrukcje poetyckim zwrotem nazywając je strukturami, w których „*elementy ściskane stają się małymi wyspami pośród oceanu rozciągania*" (Fuller 1962; Kasprzak 2014). W zwrocie tym znajduje się reguła rządząca tensegrity, w których zastrzały (elementy ściskane) otoczone są przez cięgna (elementy rozciągane) i elementy te wzajemnie się stabilizują. Sama nazwa tensegrity łączy w sobie dwa słowa: „tension" (naprężenie) i „integrity" (spójność), które powielają definicję tych struktur (Kasprzak 2014). Pręty w tym układzie połączone są ze sobą przegubowo, co powoduje, że każdy z nich pracuje tylko w stanie rozciągania (cięgna, pręty wiotkie) lub ściskania (zastrzały, pręty sztywne) – tensegrity są zatem z perspektywy mechaniki konstrukcji kratownicami i do ich opisu wykorzystywane są równania mechaniki kratownic. Jedną z najważniejszych cech, z perspektywy możliwości sterowania i inteligencji struktur tensegrity, jest istnienie mechanizmów infinitezymalnych (nieskończenie małych) równoważonych poprzez wprowadzenie sprężenia w postaci określonego zestawu sił. Konstrukcja taka, po wprowadzeniu samorównoważnego układu sił sprężających, pozostaje sztywna, niezależnie od warunków podparcia i obciążenia zewnętrznego.

Warto jednak zwrócić uwagę również na wcześniejsze, znane definicje tensegrity. Kenneth Snelson podkreślał, że istotny w tych strukturach jest nieciągły układ elementów ściskanych wewnątrz elementów rozciąganych (Gomez Jauregui 2009). David Emmerich, ostatni z trzech pionierów, w swoim patencie podkreślił natomiast, opisując jej działanie, że istotny jest samorównoważny układ sił i stan samonaprężenia konstrukcji (*self-stress*) (Kasprzak 2014; Gomez Jauregui 2009).

W kolejnych latach rozwój i zastosowania tensegrity gwałtownie zwolniły ze względu na niewystarczająco skuteczne oraz powolne podejścia obliczeniowe i metody poszukiwania kształtu (*form-finding*). W 1976 roku Anthony Pugh rozpoczął kolejną falę zainteresowania tensegrity poprzez sformalizowanie opisu konstrukcji i zwrócił uwagę na fakt wzajemnego oddziaływania elementów ściskanych i rozciąganych (Pugh 1976). Dopiero w 1984 Motro zastosował metodę relaksacji dynamicznej do zagadnienia nieliniowości spotykanych

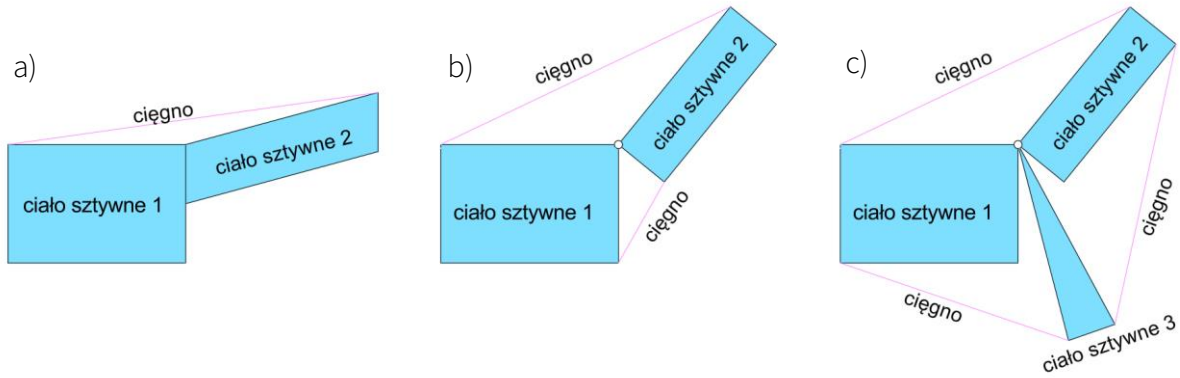
w konstrukcjach tensegrity. René Motro podkreślił ponownie stan istnienia samonaprężenia konstrukcji łącząc go z wcześniej wspomnianym oddziaływaniem elementów, a także rozdziałem ściskania od rozciągania (Motro, Raducanu 2003). Działania Motro doprowadziły do pierwszej klasyfikacji, w której konstrukcje podzielono na zgodne z pierwszymi patentami oraz konstrukcje o cechach tensegrity zgodne z definicją Anthony'ego Pugh.

Dopiero Miura i Pellegrino w swoich definicjach zwrócili uwagę na istnienie mechanizmu infinitezymalnego i stanu samonaprężenia jako warunku wymaganego do zachowania sztywności pierwszego rzędu struktur tensegrity (Tibert, Pellegrino 2003; Tibert 2002). W 1986 roku Pellegrino sformułował równoważny problem minimalizacji z ograniczeniami. Skelton i Oliveira potwierdzili wcześniejszą definicję powtarzając wymóg stabilizacji elementów sztywnych przez elementy rozciągane, dodali jednak informację o projektowaniu konstrukcji w tej samej konfiguracji jako obciążonej i nieobciążonej. Zaznaczyli, że tensegrity w stabilnym stanie równowagi powraca do swojej początkowej konfiguracji, nawet będąc pod wpływem niewielkich zakłóceń. Odeszli również od jednego elementu ściskanego w węźle, który zaproponował Motro (Oliveira, Skelton 2009).

Liczne kwestie sporne dotyczące definicji i podejść do konstrukcji tensegrity mają swoje odzwierciedlenie również w klasyfikacjach. Najpopularniejszą i ciągle aktualną jest wcześniej wspomniany podział na czyste tensegrity oraz struktury o cechach tensegrity. „Czyste tensegrity" (*pure tensegrity*), nazywane również „klasycznymi tensegrity" (*classical tensegrities*) lub „tensegrity z pływającą kompresją" (*floating-compression tensegrities*) są opisywane przez definicję przedstawioną na początku rozdziału (Kasprzak 2014; Micheletti 2025). Jest to definicja stosowana przez matematyków, która zakłada, że tensegrity to zespół prętów, cięgien i zastrzałów połączonych na końcach, w których pręty są poddawane rozciąganiu i ściskaniu, cięgna tylko rozciąganiu, a zastrzały wyłącznie ściskaniu. Ta ogólna definicja obejmuje zarówno układy, które posiadają mechanizmy infinitezymalne i samorównoważne układy sił (układy możliwe do wstępnego sprężenia), jak i takie, które tych własności nie wykazują (wtedy mówimy o „strukturach o cechach tensegrity") (Kasprzak 2014). Wszystkie powyższe cechy wraz z faktem, że układ elementów ściskanych musi być nieciągły i zawarty w ciągłym układzie elementów rozciąganych (wcześniej wspominane „*wyspy ściskania w oceanie rozciągania*") posiadają „czyste tensegrity". „Struktury o cechach tensegrity" to te, które muszą spełniać jeden z trzech

powyższych warunków (Kasprzak 2014; Micheletti 2025). Możemy zatem znaleźć w literaturze i licznych rozwiązaniach konstrukcje oparte o podstawowe moduły tensegrity, które opierają się na bryłach platońskich i archimedesowych, które dzielą się na tensegrity o wzorze rombowym, zygzakowym i obwodowym zgodnie z klasyfikacją Anthony'ego Pugh (Pugh 1976). W przypadku konstrukcji o cechach tensegrity możemy wymienić konstrukcje cięgnowe kopuł, na przykład kopuły Geigera, sieci pajęcze oraz konstrukcje powstałe z podstawowych modułów czystych tensegrity, które w skutek wbudowania straciły część istotnych cech (Kasprzak 2014; Obara, Solovei et al. 2024).

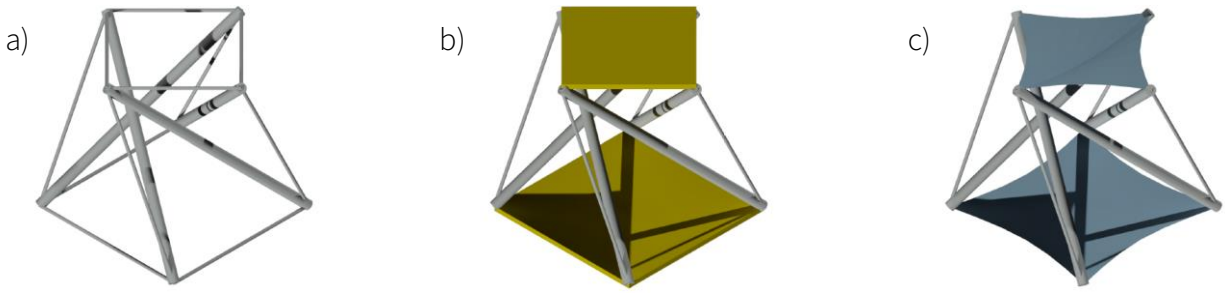
Powstała również klasyfikacja dzieląca tensegrity ze względu na liczbę sztywnych elementów w węźle (wcześniej wspomniana definicja Skeltona i Oliveiry) – liczba stykających się w węźle elementów sztywnych określa klasę konstrukcji: klasa 1 zawiera jeden element sztywny w węźle, klasa 2 – dwa, a struktury klasy k-tej mają w węźle k-elementów (Oliveira, Skelton 2009). Klasyfikację przedstawia Rysunek 2.2.



Rysunek 2.2 Struktura tensegrity: a) klasy 1, b) klasy 2, c) klasy 3. Wykonane na podstawie: (Oliveira, Skelton 2009).

Istotny jest również podział biorący pod uwagę elementy budujące moduły tensegrity, na tej podstawie dzielimy struktury na tensegrity prętowe (*tensegrity*), tensegrity prętowo-płytowe (*plate tensegrity*) oraz tensegrity prętowo-membranowe (*membrane tensegrity, knit tensegrity*) – wszystkie przedstawione na Rys. 2.3. Prętowe konstrukcje są podstawowymi i powszechnie znanymi układami, które związane są z całą historią tensegrity. W wyniku zamiany części prętów (zazwyczaj cięgien) na element płytowy (lub powierzchniowy) uzyskujemy tensegrity prętowo-płytowe. Element powierzchniowy staje się częścią układu i nadaje mu sztywność, a także stanowi przekrycie do ochrony przed deszczem lub słońcem, a nawet powierzchnię pomostową (Falk 2006; Falk, Tibert 2005; Falk, Kirkegaard 2012; Martyniuk-Sienkiewicz, Al

Sabouni-Zawadzka 2021). W przypadku zmiany części lub wszystkich cięgien na ciągły element membranowy, uzyskujemy tensegrity prętowo-membranowe. Element membranowy otacza elementy ściskane i tym samym konstrukcja może zostać ciągle uznana za czyste tensegrity. Moduły te mogą być wykorzystywane w konstrukcjach zwijalnych albo lekkich konstrukcjach przekryć, jak na przykład konstrukcje pawilonów wystawowych (Yang, Sultan 2016, 2019; Gupta, Tan et al. 2020; Melnyk 2023).



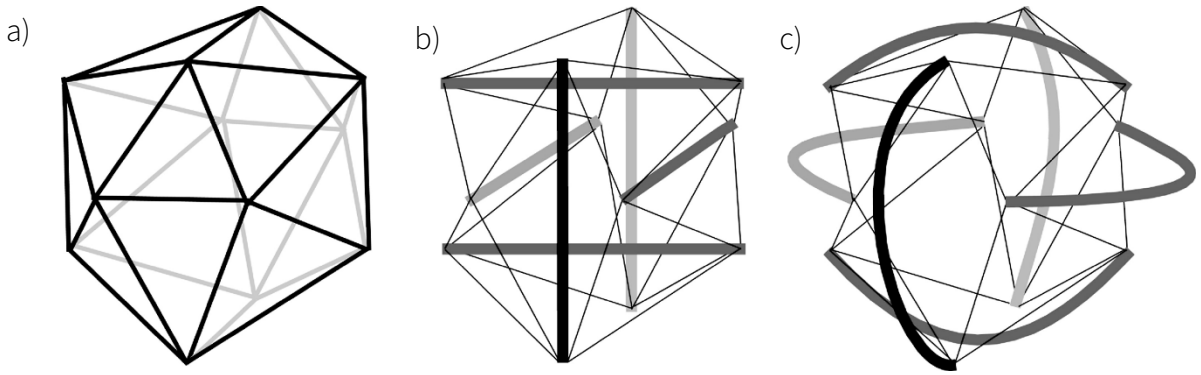
Rysunek 2.3 Moduły tensegrity a) prętowego, b) prętowo-płytowego oraz c) prętowo-membranowe na przykładzie modułu Simplex czterozastrzałowy (opracowanie własne).

W ostatnich latach pojawił się również dodatkowy podział ze względu na pojawienie się konstrukcji tensegrity z elementami, które nie są wyłącznie ściskane osiowo. W przypadku konstrukcji, które składają się wyłącznie z elementów obciążonych osiowo (tj.: elementów przenoszących siły osiowe) mówimy o klasycznych tensegrity lub po prostu strukturach tensegrity. W przypadku, gdy w konstrukcji zawierają się również ciała sztywne oprócz elementów obciążonych osiowo, na przykład kopuły kablowe, tensegrity o budowie podobnej do kręgosłupa, można mówić o konstrukcjach nazywanych ogólnym tensegrity (*general tensegrity*), ponieważ ciała sztywne są zwykle traktowane jako ogólne elementy ściskane. Różnica ta wpływa również na zachowanie konstrukcji - struktura może być układem kinematycznie wyznaczalnym, pozbawionym mechanizmów w przeciwieństwie do czystych tensegrity, w których istnieją mechanizmy infinitezymalne jako ich istotna cecha. Takie tensegrity określa się wtedy jako nieskończenie sztywne (*infinitesimally rigid*). Konstrukcja ogólnego tensegrity nie jest jednak równoważna kinematycznie określonej kratownicy o tej samej topologii elementów, ponieważ cięgna w tensegrity nie mogą przenosić ściskania. Tym samym wstępne sprężenie może być nadal wymagane do stabilizacji nieskończenie sztywnego tensegrity (Hangai, Wu 1999; Wang, Xu et al. 2020, 2023).

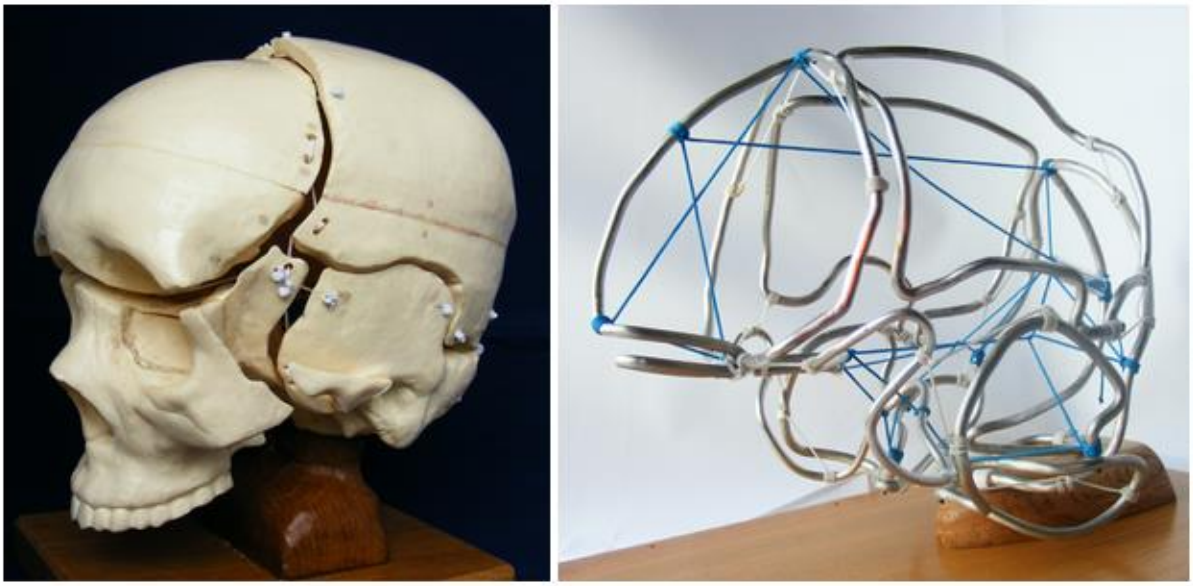
Tensegrity dzieli się również na dwie kategorie nazywane pasywnymi (*passive tensegrity*) oraz aktywnymi tensegrity (*active tensegrity*). Struktury pasywne w pełni polegają na mechanizmach infinitezymalnych oraz równoważących je wstępnych siłach sprężających w kwestii kształtu, stabilności i sztywności konstrukcji. Ich cechą immamentną jest usztywnienie pod wpływem obciążenia zewnętrznego, jednak bez wykorzystania dodatkowych narzędzi pozwalających na zmianę długości prętów. Aktywne konstrukcje tensegrity poza podstawowymi elementami posiadają również dodatkowe siłowniki, a także czujniki i moduły sterowania, które pozwalają na aktywne zmiany kształtu, pozycji węzłów, rozkładu sił wewnętrznych. Takie struktury aktywnie przeciwstawiają się obciążeniom, a w robotyce pozwalają na poruszanie się (Wang, Xu et al. 2021b).

Mówiąc o tensegrity, należy również wspomnieć o dużym obszarze badawczym jakim są biotensegrity. Pojęcie to zostało wydzielone w 2002 roku z obszaru badawczego tensegrity jako rozwinięcie zagadnienia w biologii. Termin tensegrity odnosi się przede wszystkim do zasady mechanicznej i strukturalnej, zaś pojęcie biotensegrity dotyczy w znacznej mierze wektorów sił i dynamicznej złożoności układu, czyli – jak ujęli to Dupre i Nicholson – „*świata procesów, a nie świata rzeczy*" (Levin 2002; Oh, Choong et al. 2022; Scarr 2025). Biotensegrity opisuje zatem, w jaki sposób organizmy żywe efektywnie przenoszą obciążenia poprzez rozkład sił mechanicznych wzdłuż określonych ścieżek transmisji. Zewnętrzne oddziaływania wywołują odpowiedzi zarówno w ich punkcie, jak i odległe od punktu oddziaływania, ostatecznie składają się na globalną deformację całego układu biologicznego. Otrzymujemy zatem odizolowane elementy ściskane (podobne do zastrzałów) oraz ciągłą sieć elementów rozciąganych, w tym mięśni, dzięki czemu organizm funkcjonuje poprzez skoordynowane kurczenie się i rozszerzanie. Wiele struktur składowych jest wzajemnie zrównoważonych, tworząc stabilną, samorównoważącą się konstrukcję, która – po zaburzeniu – może spontanicznie powracać do stanu pierwotnego lub dokonywać rekonfiguracji (Scarr 2025). W strukturach biotensegrity, które w swoich założeniach są bardzo zbliżone do czystych tensegrity i głównie na nich się opierają, możemy znaleźć całkiem odmienne kształty w porównaniu do znanych nam konstrukcji tensegrity – pojawiają się tutaj na przykład zastrzały o zaokrąglonych kształtach, jak na Rys. 2.4. i 2.5. Biotensegrity są głównie wykorzystywane w celu modelowania zachowań ludzkiego organizmu, od skali mikro (modelowanie pracy komórek lub pojedynczych mięśni)

do skali makro (modelowanie pracy poszczególnych części ciała, jak na przykład kręgosłup, ręka lub czaszka przedstawiona na Rys. 2.5.) (Scarr 2025).



Rysunek 2.4 Schemat pokazujący przekształcenie a) dwudziestościanu w b) moduł tensegrity z prostymi prętami oraz c) moduł tensegrity z zakrzywionymi prętami (źródło: (Scarr 2008)).



Rysunek 2.5 Model czaszki biotensegrity (źródło: https://jeanine.looman.ca/).

Tensegrity, mimo prawie 100 lat istnienia i 70 lat intensywnych badań, są nadal bardzo interesującym obszarem badawczym dla wielu naukowców. Aktualny rozwój wytwarzania przyrostowego oraz elektroniki pozwala na jeszcze lepsze wykorzystanie istotnych cech tensegrity, przede wszystkim możliwości sterowania cechami mechanicznymi tych konstrukcji. Pozwala to odejść od postrzegania tensegrity wyłącznie jako struktur statycznych i skupić uwagę na konstrukcjach zdolnych do adaptacji do zmiennych warunków oraz poddających się sterowaniu. Powstają rozwiązania, w których układy mogą zmieniać swoją sztywność i geometrię, reagować na określone drgania, a także wykorzystywać coraz częściej elementy aktywne, takie jak siłowniki, czujniki oraz algorytmy kontroli umożliwiające rekonfigurację

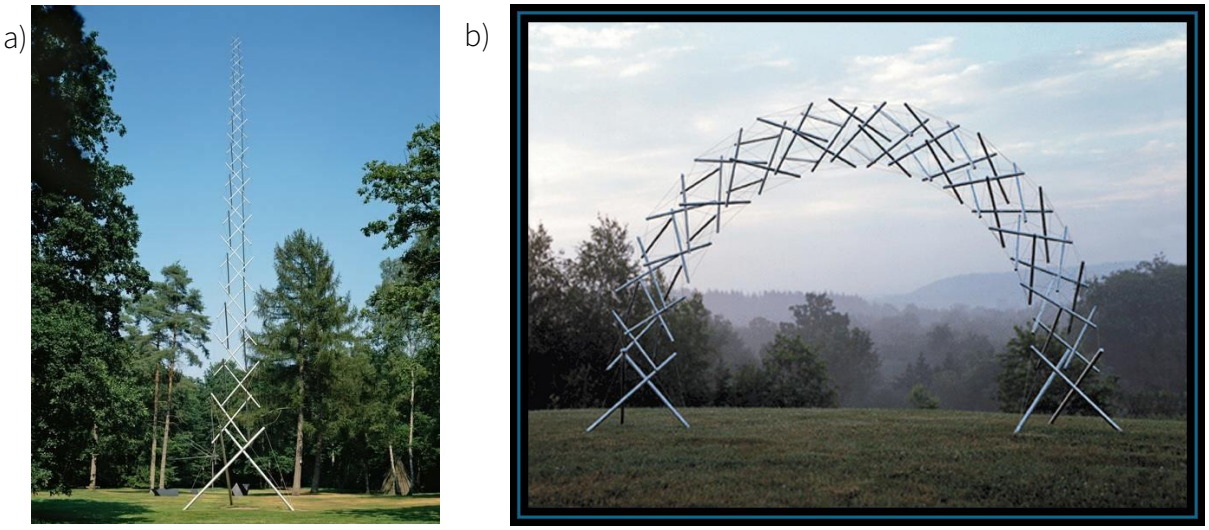
układu. W efekcie struktury tensegrity stają się podstawą nowych konstrukcji i urządzeń zdolnych do sterowania, rekonfiguracji lub samoczynnego dostosowywania się do warunków otoczenia.

2.2. Zastosowania konstrukcji tensegrity w architekturze

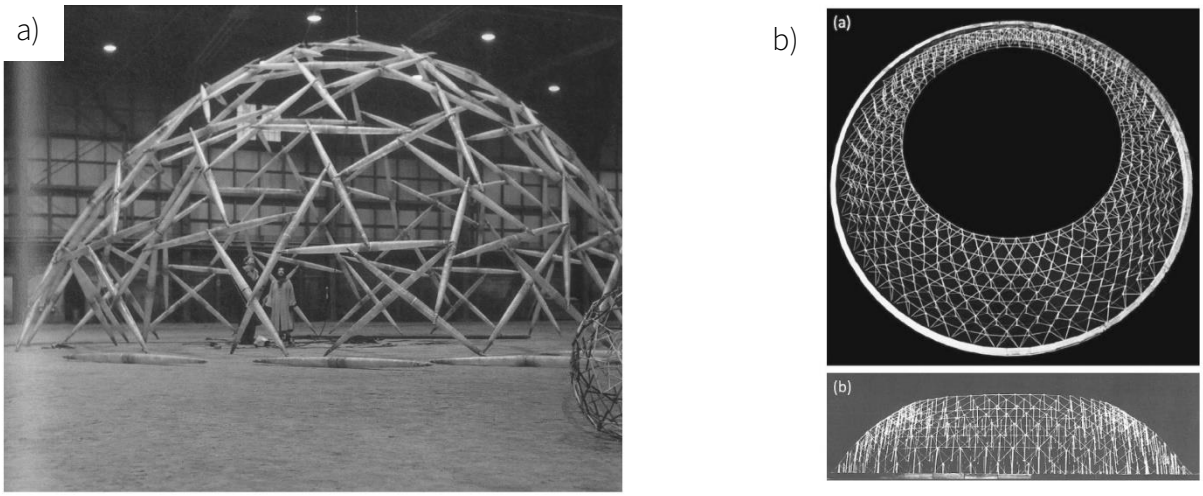
Struktury tensegrity inspirują zarówno architektów, jak i inżynierów budownictwa od wielu lat. Szczególnie w ostatnich dekadach można zauważyć wzrost liczby projektów i koncepcji wykorzystujących ideę tensegrity jako ich podstawę. Wśród licznych realizacji możemy znaleźć takie konstrukcje jak: mosty oraz kładki piesze, pawilony wystawowe, stropy oraz przekrycia strukturalne, a także ściany i fasady.

W początkowym okresie rozwoju konstrukcji tensegrity możemy spotkać się ze strukturami na granicy rzeźb i funkcjonalnych konstrukcji. Jako taki przykład można podać *Skylon*, konstrukcję wzniesioną i rozebraną w 1951 roku w Londynie z okazji *Festival of Britain*. Sama w sobie konstrukcja nie była czystym tensegrity, gdyż brakowało im typowej konfiguracji z ciągłą siecią elementów rozciąganych i nieciągłymi elementami ściskanymi w stanie naprężenia wstępnego, nadal jest postrzegana jako jedne z pierwszych dzieł tego typu (Micheletti, Podio-Guidugli 2022). Kolejne, podobne struktury, są już dziełami Snelsona, z których najpopularniejsze są Needle Tower I (1968) wzniesiona w Waszyngtonie, USA oraz Needle Tower II (1968) w Otterlo, Holandii (Rys. 2.6a). W 1959 r. zaprojektował on *Bead Arch*, w którym zdecydował się na przebieg krzywoliniowy wcześniejszej wieżowej konstrukcji. W późniejszych latach zrealizował kolejny łuk o nazwie *Rainbow Arch* (Rys. 2.6b).

W podobnym czasie Fuller pracował nad masztami, oraz kopułami, z których najpopularniejsza jest *Aspension Dome* (A(scending su)spension Dome), którą opatentował w 1964 roku (Micheletti, Podio-Guidugli 2022) (Rys. 2.7). Według najnowszych badań (Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023) pierwszą kopułę cięgnową zaprojektował Snelson w 1949 roku, przygotowując się do swojej wystawy podczas Summer Institute w Black Mountain College.



Rysunek 2.6 Rzeźby Kennetha Snelsona: a) Needle Tower I (źródło: https://krollermuller.nl/en/kenneth-snelson-needle-tower) i b) Rainbow Arch (źródło: https://tensegritywiki.com/images/b/b3/Snelson_Rainbow_Arch.jpg).

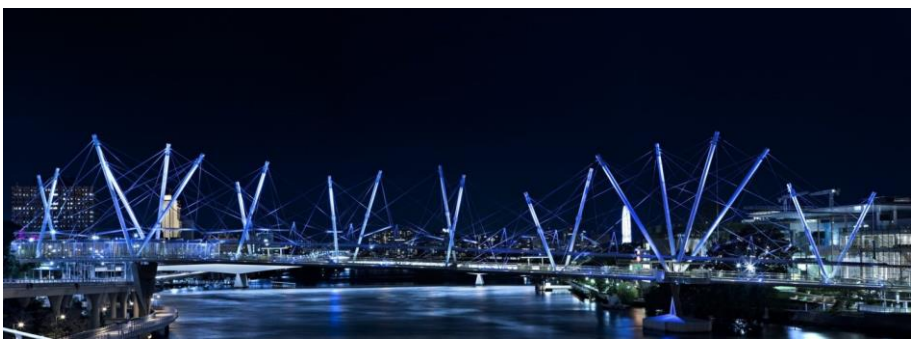


Rysunek 2.7 Kopuły zaprojektowane przez Buckminstera Fullera: a) Tensegrity Dome i b) Aspension Dome (źródło: (Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023)).

Najsłynniejszą i największą konstrukcją kojarzoną ze strukturami tensegrity jest kładka pieszo-rowerowa *Kurilpa Bridge* (*Tank Street Bridge*) w Brisbane w Australii widoczna na Rys. 2.8a (Micheletti, Podio-Guidugli 2022). Z perspektywy definicji struktura ta jest konstrukcją o cechach tensegrity, mierzy 470 m długości, z najdłuższym przęsłem o długości 120 m. Podwieszana kładka ma szerokość 6,5 m. Została zaprojektowana przez biuro projektowe Arup Engineers. Kolejną konstrukcją, która realizacji doczekała się w podobnym okresie jest kładka piesza *Forthside Bridge* (*Spiky Bridge*) w Stirling w Szkocji o długości 113 m i szerokości 4 m, z najdłuższym przęsłem o długości 88,2 m (Kasprzak 2014). Kładkę zaprojektowało biuro Wilkinson Eyre Archite and Gifford for Nuttall. W ostatnich latach ogłoszono również informację, że w miasto Yueqing w prowincji Zhejiang (Chiny) rozpoczęło budowę kładki tensegrity

o długości 280 m, składającej się z czterech przęseł, z których najdłuższe ma mieć długość 154 m (Tian, Zhang et al. 2024). Mosty te były inspiracją dla wielu kolejnych konstrukcji tego typu, które do dzisiaj pozostały w sferze projektowo-koncepcyjnej. Odnajdziemy tutaj koncepcję kładki KL-03 nad trasą S-7 Salomea-Wolica stworzoną przez Bogusława Markockiego oraz Radosława Oleszka z biura DHV Polska Sp. z o.o (Markocki, Oleszek 2011). Planowana kładka miała mieć 76,4 m długości, z przęsłem długości 67 m. Struktura ta miała być analogiczna do konstrukcji z Australii oraz Szkocji i miała składać się z pomostu podwieszonego na konstrukcji o cechach tensegrity. Popularnym przykładem jest również projekt kładki pieszej Landolfa Rhode-Barbarigosa, która miałaby być wybudowana w Szwajcarii jako przeprawa przez niewielką rzekę (Rys. 2.8b). Kładka miałaby mieć długość 20 m i szerokość 1,3 m oraz składać się z czterech modułów pierścieniowych (*ring modules*) nazwanych tak ze względu na pustą przestrzeń wewnątrz (Rhode-Barbarigos, Hadj Ali et al. 2010). W analizach rozważano strukturę o kształcie cięgien kwadratowym, pięciokątnym oraz sześciokątnym. W kolejnych projektach Landolf Rhode-Barbarigosa przedstawił kolejną koncepcję omówionej wyżej struktury, która mogłaby być wykorzystana jako rozwijalna konstrukcja (Rhode-Barbarigos, Ali et al. 2012). Analogiczną konstrukcję z wykorzystaniem pięciokątnego modułu pierścieniowego w swojej publikacji zaprezentowali Sumit Kumar oraz Subhamoy Sen, którzy wykorzystali algorytm genetyczny do zaprojektowania 20 metrowej konstrukcji rozwijalnej tensegrity (Kumar, Sen 2025). Warto również wspomnieć o projekcie kładki pieszej TorVergata Footbridge przedstawionym przez Andrea Michelettiego oraz Silvano Stucchi w 2003 roku, która miała służyć studentom TorVergata School of Engineering jako 30 metrowe przejście nad ulicą na kampusie uczelni (Rys. 2.8c). Struktura miała być zbudowana z modułów TS stworzonych specjalnie do tego projektu (Micheletti, Podio-Guidugli 2022). Konstrukcje podobne do wyżej wymienionych były również projektowane i analizowane w pracach dyplomowych (Szybiński 2012; Zhachek 2025).

a)

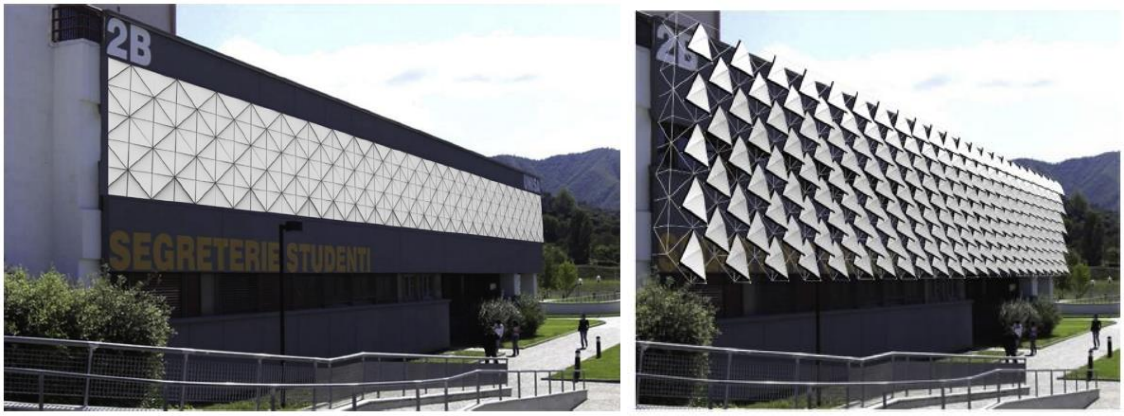


b)

c)

Rysunek 2.8 Przykładowe konstrukcje tensegrity – kładki piesze i rowerowe: a) Kurilpa Bridge (źródło: www.coxarchitecture.com.au/project/kurilpa-pedestrian-bridge/), b) kładka piesza Landolfa Rhode-Barbarigosa (źródło: (Markocki, Oleszek 2011)), c) TorVergata Footbridge (źródło: (Micheletti, Podio-Guidugli 2022)]) .

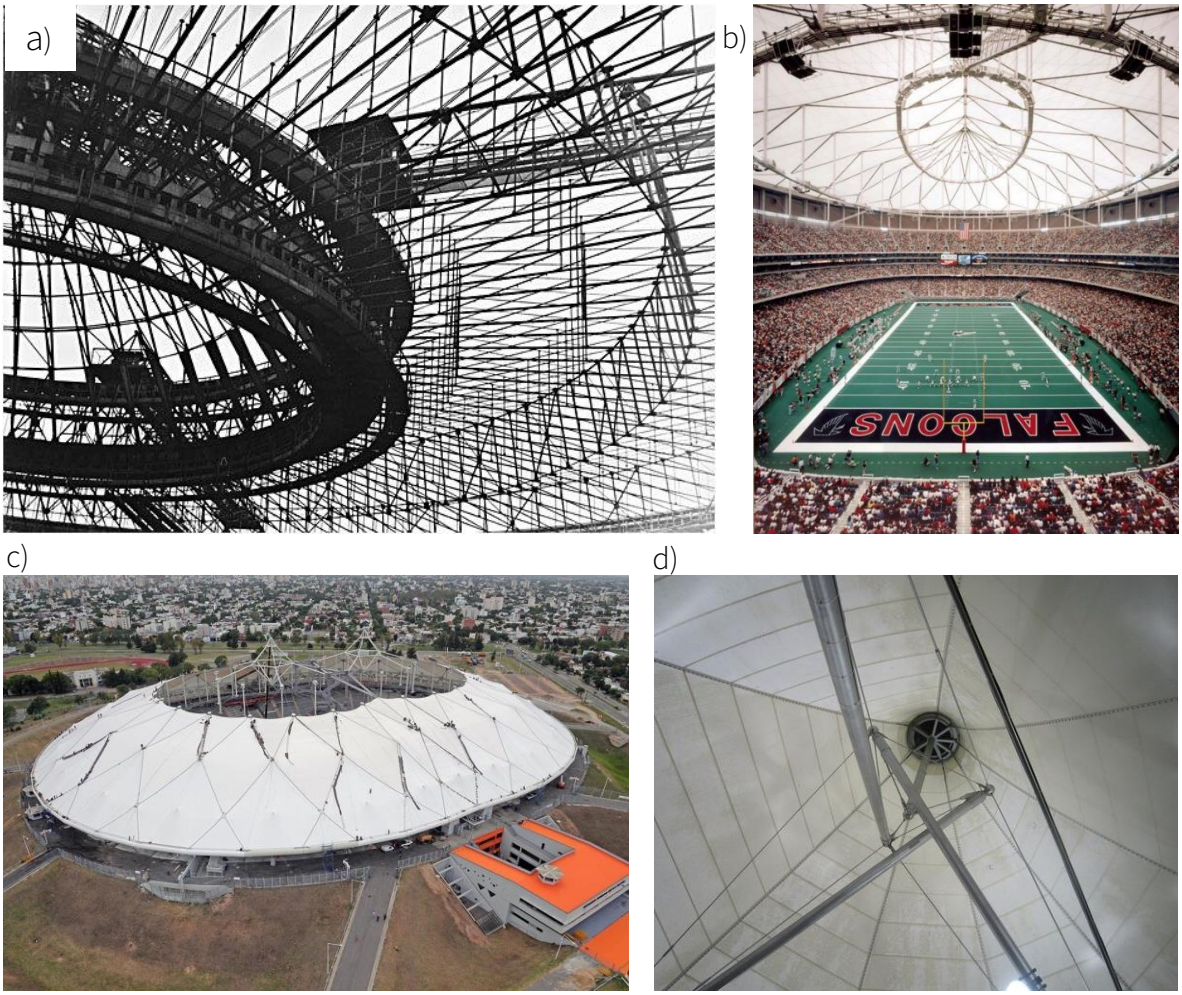
Popularnym obszarem wykorzystania struktur tensegrity w budownictwie jest zastosowanie ich w konstrukcjach fasad lub ścian oddzielających przestrzenie. Jednymi z najpopularniejszych projektów są projekty fasad inspirowanych żaluzjami, w których podstawą struktury jest konstrukcja tensegrity rozkładająca i składająca panele słoneczne (Fraternali, De Chiara et al. 2015). Panele te służą jednocześnie jako zacienienie okien, gdy ściana jest oświetlana przez słońce, oraz jako generator prądu dla budynku. Kolejnym rozwinięciem tego projektu są fasady oparte na konstrukcji tensegrity, które dodatkowo zawierają generatory, które przekształcają energię zgromadzoną w cięgnach wzbudzanych wiatrem na energię elektryczną (przedstawiona na Rys. 2.9) (Cimmino, Miranda et al. 2017; Babilio, Miranda et al. 2019). W literaturze można spotkać również analizy dotyczące fasad łączących ze sobą strukturę tensegrity oraz origami, opierające się na przykładzie okien wykuszowych Mashrabiya (Fraternali, Babilio et al. 2024). W tym przypadku moduły origami są wyposażone w ogniwa fotowoltaiczne – jak we wcześniejszych przypadkach struktura nie tylko zacienia pomieszczenia w budynku, ale również pozyskuje energię słoneczną. Wśród projektów znaleziono również projekt „zielonej" ściany, w której podstawowa konstrukcja nośna zbudowana jest z konstrukcji tensegrity wykonanej z GFRP (kompozytu zbrojonego włóknami szklanymi) na której umieszczone są rośliny pozwalające uzyskać ekologiczną i naturalną przegrodę w pomieszczeniu (Liu, Davis-Sikora 2017).



Rysunek 2.9 Przykładowa konstrukcje tensegrity – fasada zawierająca panele słoneczne (źródło:(Cimmino, Miranda et al. 2017)) .

Jednymi z pierwszych konstrukcji, w projektowaniu których wykorzystywane były konstrukcje tensegrity i konstrukcje o cechach tensegrity były różnego rodzaju stropy, przekrycia stadionów oraz kopuły. Najpopularniejszymi strukturami o cechach tensegrity, które spotykamy w wielu budynkach są kopuły cięgnowe. Pierwsze kopuły tensegrity projektował już Buckminster Fuller w latach 50. XX wieku. Najpopularniejszymi przykładami kopuł Geigera, które posiadają cechy tensegrity, są: przedstawiony na Rys. 2.10a dach hali sportowej „Spodek" w Katowicach w Polsce (Polinceusz 2019), a także dach Olympic Fencing and Gymnastic Arena w Seulu w Korei Południowej (Obara, Solovei et al. 2023). Jako najpopularniejszy przykład kopuły Levy'ego wymienia się dach nieistniejącego już stadionu Georgia Dome w Atlancie (Rys. 2.10b), która była największą na świecie kopułą cięgnową i pierwszą w systemie tensegrity (Obara, Solovei et al. 2023). Konstrukcja ta wymagała wstępnego sprężenia, charakterystycznego dla konstrukcji tensegrity. W latach 90. XX wieku powstał dach stadionu La Plata Stadium w Argentynie, którego pierwsza kopuła o podwójnym szczycie zbudowana na bazie opatentowanego modułu „twinstar" jest przedstawiona na Rys. 2.10c (Micheletti, Podio-Guidugli 2022). Kopuły nie są jedynymi rodzajami przekryć, spotykamy również struktury dachów pokryte membranami. Tutaj na wspomnienie zasługuje konstrukcja White Rhino (Rys. 2.10d) stworzona przez laboratorium eksperymentalne Uniwersytetu w Tokio, która stanęła w Chiba w Japonii (Gilewski, Kłosowska et al. 2015). Konstrukcja składa się z dwóch słupów opartych na modułach tensegrity, które są jej podstawą. Podobnym przykładem jest projekt schronienia dla ofiar klęsk żywiołowych, który opiera się na module tensegrity zbudowanym z bambusa (Tedjosaputro, Maurina 2025). Struktura taka może być w szybki sposób wzniesiona i może być wykorzystana w sytuacjach natychmiastowej pomocy. W przypadku stropów zbudowanych z tensegrity warto

wspomnieć również o wykorzystaniu modułów z elementami płytowymi (*plate tensegrity*), które w 2006 roku zaproponował Andreas Falk (Falk 2006; Falk, Kirkegaard 2012). Moduły te mogą tworzyć różnego rodzaju konstrukcje, zawierając zarówno płyty przezroczyste pełniące rolę świetlików, jak i tradycyjne pokrycia dachowe, jak w przykładzie projektu dachu hali jeździeckiej Flyinge w Lund, w Szwecji. Popularne są również projekty i prototypy mniejszych struktur, które mogą pokrywać niewielkie obszary dachu (Franta, Zając 2022) lub mogą służyć jako konstrukcja wsporcza dla paneli fotowoltaicznych (Carpentieri, Skelton et al. 2017).

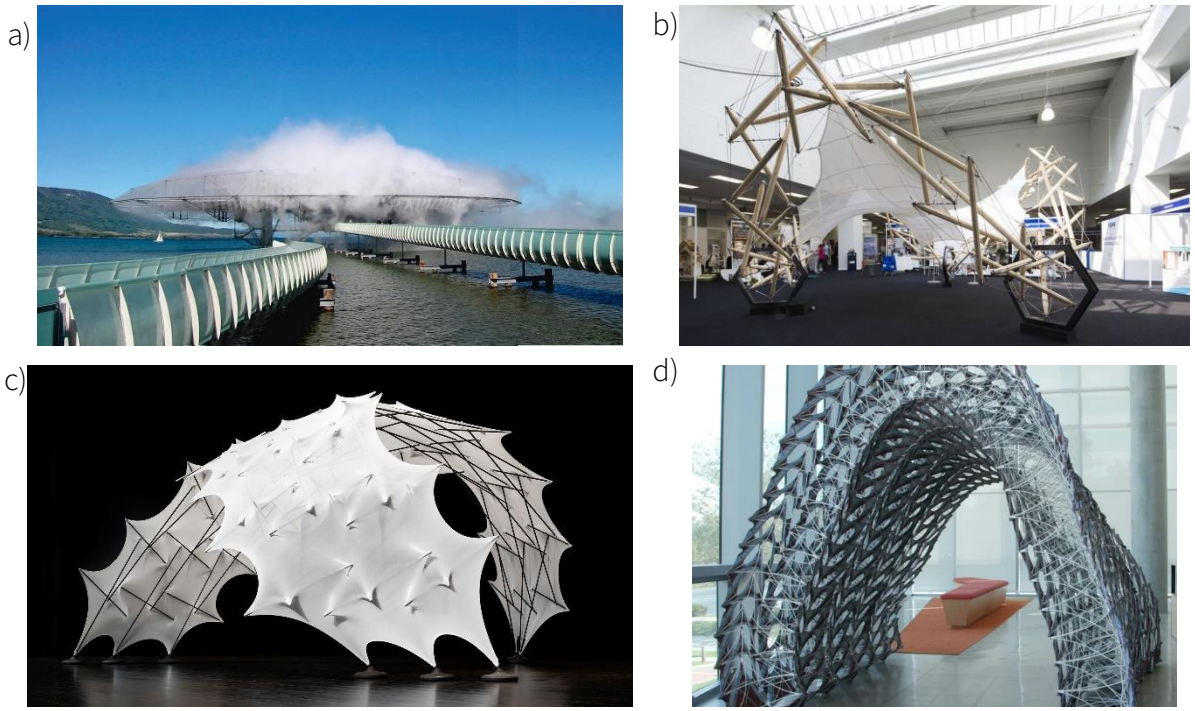


Rysunek 2.10 Przykładowe konstrukcje tensegrity – kopuły i stropy: a) hala sportowa „Spodek" w Katowicach (źródło: https://www.bryla.pl/bryla/56,85301,8496801,Architektura_w_Katowicach_TOP_10___przewodnik_po_najciekawszych,,ga.html),), b) Georgia Dome w Atlancie (źródło: https://www.thorntontomasetti.com/project/georgia-dome) , c) La Plata Stadium w La Plata (źródło: https://www.thorntontomasetti.com/project/la-plata-stadium), d) White Rhino (źródło: https://www.tensinet.com/index.php/component/tensinet/?view=project&id=4679).

Ostatnim popularnym zastosowaniem struktur tensegrity w architekturze i budownictwie jest wykorzystanie ich w budowie pawilonów wystawowych. Ze względu na wysokie walory estetyczne modułów tensegrity projekty tego typu konstrukcji są jednym z najbardziej

eksplorowanych obszarów. Znajdziemy tutaj struktury zbudowane z tradycyjnych prętowych modułów, jak również, coraz popularniejsze, konstrukcje zbudowane z modułów z elementami membranowymi (*knit tensegrity*). Jednym z przykładów konstrukcji prętowych jest zbudowany w 2002 roku Blur Building (Rys. 2.11a), zaprezentowany na Swiss Expo 2002 na jeziorze Neuchatel (Gilewski, Kłosowska et al. 2016). Stacja meteorologiczna ma długość około 91 m, szerokość 61 m oraz wysokość 23 m, a jej charakterystyczny projekt pozwala na kontrolowanie wytwarzanej ilości mgły w odpowiedzi na zmieniające się warunki klimatyczne. W przypadku konstrukcji cięgnowych popularne są struktury do których dodatkowo montowane są fragmenty materiału, których celem jest zacienienie obszaru pod pawilonem – takim typem konstrukcji były m.in. pawilon wystawowy zaprezentowany podczas "Patras Cultural Capital of Europe" w 2006 roku Patras w Grecji (Liapi, Kim 2009; Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023), przedstawiony na Rys. 2.11b demontowalny Tension Pavilion zaprezentowany na trzech wystawach: w Vision London, w atrium budynku HOK's London oraz na kampusie Westminster University (Morrow 2018) oraz TensyDome wzniesiony w parku Villa dei Cedri w Bellinzona w Szwajcarii (Pauli 2023). Powstało również wiele projektów pojedynczych modułów pozwalających na wybudowanie rozkładalnych pawilonów tensegrity jak na przykład moduł T4 zaproponowany w (Pizzigoni, Micheletti et al. 2019) lub projekt struktury w (Liapi, Georgopoulos et al. 2015). Spotykane są również bardziej artystyczne formy jak podwieszane konstrukcje zaprezentowane podczas wystawy „Time Space Existence" podczas 14 edycji Biennale of Architecture (Liapi, Papantoniou 2025). Wyżej wymienione struktury zmierzają jednak powoli w kierunku konstrukcji tensegrity, w których część cięgien lub zastrzałów jest zastępowana przez materiał pełniący funkcję membrany. W przypadku usuwania zastrzałów w konstrukcji jednym z najpopularniejszych przykładów jest The Underwood pavilion, który miał zostać przenośnym pawilonem wykorzystywanym przez Ball State University w Muncie, Indiana, USA (Riether, Wit et al. 2015). Znacznie popularniejszym podejściem jest zastępowanie części lub wszystkich cięgien poprzez membranę wykonaną z różnego rodzaju materiałów. Możemy wśród przykładów znaleźć: MOOM pavilion – tymczasowy pawilon zaprojektowany i zbudowany w 2011 roku w Tokyo University of Science's Noda campus w Japonii (Feng 2019); zbudowany z tensegrity z elementami membranowymi M-shell pavilion, którego prototyp został zaprezentowany na IASS Annual Symposium 2023 Integration of Design and Fabrication w Australii (Tan, Tracy et al. 2023); pawilon zbudowany z modułów z elementami

membranowymi (Rys. 2.11c), które są dzianiną stworzoną w maszynie CNC (nazwane *knit tensegrity*) zaprezentowany na IASS Form&Force Expo 2019 (Gupta, Tan et al. 2020) oraz BeTA pavillion (Rys. 2.11d) – zbudowany z modułów tensegrity o zakrzywionych prętach inspirowanych kręgami, wykorzystującym logikę biotensegrity (Davis-Sikora, Liu et al. 2020).



Rysunek 2.11Przykładowe konstrukcje tensegrity – pawilony wystawowe: a) Blur Building (źródło: https://dsrny.com/project/blur-building), b) Tension Pavilion (źródło: https://parametrichouse.com/tension-pavilion/), c) pawilon zbudowany z knit tensegrity (źródło: https://dmand.sutd.edu.sg/research2/knitting-and-textiles/architecture/knit-tensegrity-shell/#), d) BeTA pavillion (źródło: https://www.dianedavissikora.com/projects/beta_s-pavilion).

W ostatnich dekadach widoczny jest gwałtowny rozwój konstrukcji tensegrity w ramach którego tworzone są nowe moduły oraz rodzaje struktur, połączony ze znacznym rozwojem technologii takich jak wytwarzanie przyrostowe (*additive manufacturing*) i obróbka CNC (*Computer Numerical Control*). Pozwala on nie tylko na coraz częstsze wykorzystanie tensegrity na mniejszą skalę (elementy ozdobne, niewielkie pawilony wystawowe), ale również w przypadku większych konstrukcji jak mosty, kładki piesze, fasady i stropy. Otwarcie rynku architektoniczno-budowlanego na struktury tensegrity stwarza również perspektywę wykorzystania ich w typowych konstrukcjach użytku publicznego i zakorzenienie ich w naszej codzienności.

Powyższy rozdział przedstawia możliwości zastosowania konstrukcji tensegrity w architekturze i budownictwie, wskazując na ich rosnącą popularność oraz potencjał aplikacyjny. Większość omówionych przykładów dotyczy konstrukcji i obiektów funkcjonujących w przestrzeni

publicznej. Przeprowadzona analiza możliwych zastosowań stanowiła podstawę do wyboru przykładu konstrukcji z inteligentnym szkieletem wewnętrznym, omówionego w Rozdziale 6.

2.3. Metamateriały tensegrity

Metamateriałami nazywamy struktury, które są zaprojektowane i wykonane przez człowieka, a zatem nie jest możliwe zaobserwowanie ich w naturze. Daną metastrukturę możemy nazwać metamateriałem, kiedy rozmiar komórki budującej system jest bardzo mały w porównaniu do całej struktury (Chen, Hu et al. 2023; Kumar, Kumar et al. 2022). Metamateriały odznaczają się nietypowymi cechami, które zazwyczaj są głównym celem ich zaprojektowania – są to materiały, które mają odpowiadać określonym wymaganiom. Struktury te posiadają liczne wyjątkowe cechy, na przykład mogą być auksetykami, czyli posiadać ujemny współczynnik Poissona (pod wpływem ściskania, kurczą się w kierunku poprzecznym, analogicznie pod wpływem rozciągania – puchną). Materiały auksetyczne zostały szerzej opisane w Rozdziale 7.1. Kolejną cechą, którą posiadają metamateriały, może być bardzo duży moduł ściśliwości objętościowej (*bulk modulus*), w szczególności w relacji do modułu ścinania, którego wartość dąży do zera (*vanishing shear modulus*). Przykładem takiego metamateriału są metamateriały pentamodowe o własnościach ekstremalnych (*extremal pentamode metamaterials*). Inną cechą, którą można spotkać w przypadku metamateriałów jest ujemna ściśliwość (*negative compressibility*) – struktura pod wpływem ciśnienia hydrostatycznego rozszerza się, zachowując się w sposób przeciwny do zaobserwowanego w naturze. Dodatkowo, metamateriały mogą deformować się w kierunku poprzecznym do zadanej siły – mówi się wtedy o ujemnej sztywności (*negative stiffness*). Można również zaprojektować metamateriał łączący w sobie cechy dodatniej i ujemnej sztywności, a zatem uzyskać niezwykle wysoki współczynnik tłumienia (*damping coefficient*). Wśród takich metamateriałów znajdziemy także struktury bistabilne lub takie, które posiadają wiele stanów równowagi, pomiędzy którymi przeskakują w sposób gwałtowny. Metamateriały mogą również być bardzo lekkie lub mogą wykazywać nietypowe cechy dynamiczne. Cechy metamateriałów mogą być również dostosowywane do potrzeb, przykładem są struktury, których wartością współczynnika Poissona można sterować od wartości dodatnich do ujemnych (Al Sabouni-Zawadzka 2022).

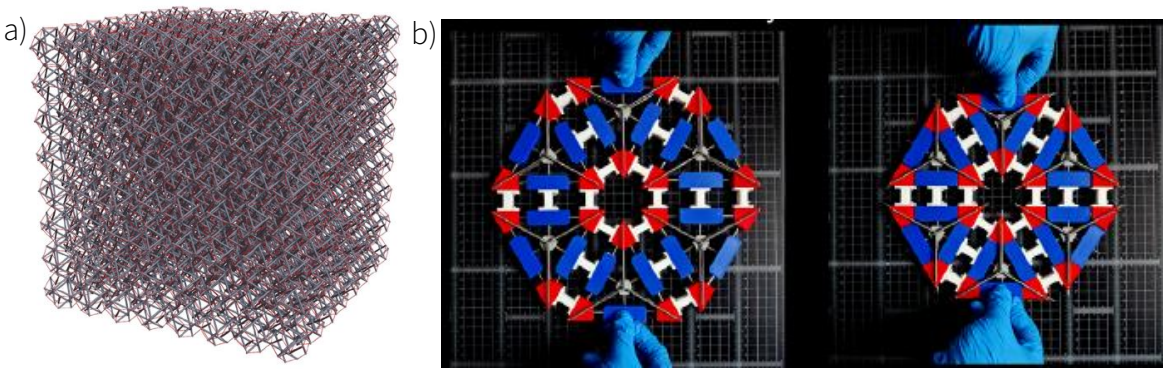
Większość metamateriałów to materiały komórkowe, które składają się z pojedynczej komórki lub zestawu komórek (płaskich lub przestrzennych), który jest wielokrotnie powtarzany

w strukturze – jest to układ zaczerpnięty z naturalnych materiałów, takich jak na przykład kość. Tak określony układ, w połączeniu z cechami pierwotnego materiału (na przykład żywicami), cechami komórek, gęstością i skalą wzoru pozwala uzyskiwać nietypowe, a często ekstremalne cechy, jak te wymienione w poprzednim akapicie (Al Sabouni-Zawadzka 2022).

Pierwszy raz o metamateriałach tensegrity wspomniał Fernando Fraternali w 2014 roku w publikacji dotyczącej dynamiki struktur łańcuchowych tensegrity (Fraternali, Carpentieri et al. 2014), która jest kontynuacją badań z 2012 roku (Fraternali, Senatore et al. 2012). Publikacja dotyczyła metamateriałów, w których moduły tensegrity pełniły rolę nieliniowych sprężyn łączących masy skupione poddane impulsom ściskającym, które przekształcają się w fale odosobnione. Analizy te zapoczątkowały badania nad silnie nieliniowymi metamateriałami opartymi na koncepcjach tensegrity, które mogłyby być wykorzystywane w celu ochrony przed uderzeniami. Badania były następnie rozwijane w (Fabbrocino, Carpentieri et al. 2017), gdzie rozważano zastosowanie metamateriału jako podstawy siłowników akustycznych wykorzystywanych do bezkontaktowej manipulacji małymi obiektami (na przykład nanorobotami) lub czujników analizujących stan konstrukcji. Rozpatrywano również optymalizację metamateriałów zbudowanego z komórek tensegrity (De Tommasi, Marano et al. 2017), a także analizowano struktury zbudowane z modułów klasy $\boldsymbol{\theta = 1}$, czyli piętrowych modułów z dwoma zestawami cięgien łączących odpowiednio wewnętrzne i zewnętrzne węzły konstrukcji (Modano, Mascolo et al. 2018). Badania te prowadziły do projektu metamateriału, który służyłby do produkcji nowych izolatorów sejsmicznych, do wzmacniania ram odpornych sejsmicznie w budynkach stalowych i żelbetowych, a także do wprowadzania mechanizmów dyssypacji energii w ścianach murowanych, płytach stropowych oraz w węzłach połączeń pomiędzy elementami konstrukcji odpornych sejsmicznie (Santos, Singh et al. 2021; Santos 2023, 2025). Ostatnie badania związane z propagacją fal odosobnionych w łańcuchach tensegrity torują drogę do opracowania modeli analitycznych służących do projektowania metamateriałów odpornych na uderzenia (Motta, Fraternali et al. 2024).

Rimoli i Pal opracowali metodę konstruowania trójwymiarowych kratownic tensegrity na bazie elementarnych komórek w postaci ściętego ośmiościanu (*truncated octahedron*), a następnie analizowali odpowiedź mechaniczną otrzymanych struktur w pełni nieliniowym podejściu przyjmując model dyskretny, jak i również przybliżony model ośrodka ciągłego – model

kontynualny (Rys. 2.12a) (Rimoli, Pal 2017), w późniejszych badaniach analizowano również wpływ efektu skali (Gilewski, Al Sabouni-Zawadzka 2021). Był to kolejny krok w analizach metamateriałów tensegrity pozwalający spojrzeć na strukturę jako materiał. Badania te również skupiały się na dynamicznej odpowiedzi metamateriału, który mógłby absorbować energię. Badania były rozwijane w (Rimoli 2018; Rimoli, Garanger et al. 2025), a także analizowano przejścia fazowe symetrii materiałowej w trójwymiarowych metamateriałach tensegrity, które występuje wyłącznie pod wpływem wstępnego sprężenia w cięgnach modułów (Salahshoor, Pal et al. 2018). Rozpatrywano zwiększoną odporność na zniszczenie oraz absorbcję energii metamateriału tensegrity pod wpływem delokalizacji deformacji wynikającej z nieciągłości elementów ściskanych w porównaniu do tradycyjnych struktur (Bauer, Kraus et al. 2021), a także wpływ defektów strukturalnych na wymuszenie fal sprężystych (Zhang, Yin et al. 2021). Badania te są również wiązane z auksetycznym zachowanie metamateriałów tensegrity (Rys. 2.12b) (Sun, Gai et al. 2025). W przypadku badań (Zhang, Zhang et al. 2025) zaprojektowano nowy moduł tensegrity pozwalający na uzyskanie metamateriału możliwego do wykorzystania w robotyce. Znajdziemy również membranowe metamateriały tensegrity wykorzystywane w izolacji akustycznej w zakresie niskich częstotliwości (Pan, Li et al. 2025) oraz kanapkowe struktury wykorzystujące cechy tensegrity, które pozwalają na projektowanie programowalnych metamateriałów służących do ochrony przed uderzeniami (Tan, Jawed et al. 2025).



Rysunek 2.12 a) Trójwymiarowa struktura metamateriału rozpatrywana w analizie propagacji fal (źródło: (Rimoli, Pal 2017)), b) Sześciokątna komórka metamateriału auksetycznego inspirowanego tensegrity (źródło: (Sun, Gai et al. 2025))

Kolejnym krokiem było opracowanie struktury inteligentnego metamateriału tensegrity opartego na superkomórkach składających się z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (*4-strut Simplex*), który wykazywał właściwości ortotropowe (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2018a). Metamateriał ten wykazywał zmienne wartości współczynnika Poissona w zależności

od wartości siły sprężającej moduły struktury. Analizowano również metamateriały tensegrity z aktywnym bistabilnym mechanizmem skrętnym z umiarkowaną odpowiedzią lepkosprężystą (Vangelatos, Micheletti et al. 2020; Intrigila, Micheletti et al. 2022; Micheletti, Santos et al. 2023). Badania te były również rozwijane przez (Yang, Zhang et al. 2025) oraz . Rozpatrywano również metamateriały mechaniczne, które pozwalają na programowanie cech: przechodzenie od stanu monostabilnego do bistabilnego, a także multistabilnego (Wang, Zhang et al. 2025). Zaprojektowano również chiralny przestrzenny moduł tensegrity pozwalający uzyskanie metamateriału auksetycznego tensegrity (Mathias Oster, Marcelo A. Dias et al. 2021), model ten był następnie wykorzystany w procesie opisania zachowania metamateriału – filcu (Verma, L. Smith et al. 2022), a także hydrożelu (Xue, Han et al. 2025). Inspiracje nowych kształtów metamateriałów tensegrity są również odnajdywane w biologii, przykładem mogą być struktury o kształcie helisy DNA, które umożliwiają sprzężenie ściskania ze skręcaniem, nieliniową sztywność oraz adaptacyjność strukturalną – podejście to pozwala na uzyskanie metamateriału o podwyższonej odporności zmęczeniowej, a także odpowiedź auksetyczną (Sun, Zhang et al. 2025). Metamateriały te są również wykorzystywane w procesie projektowania opon bezpowietrznych (*non-pneumatic tires*), w których poprzez regulację sztywności dwóch typów sprężyn umożliwia niezależne sterowanie sztywnością na ściskanie oraz sztywnością na ścinanie struktury (Wei, Pan et al. 2025).

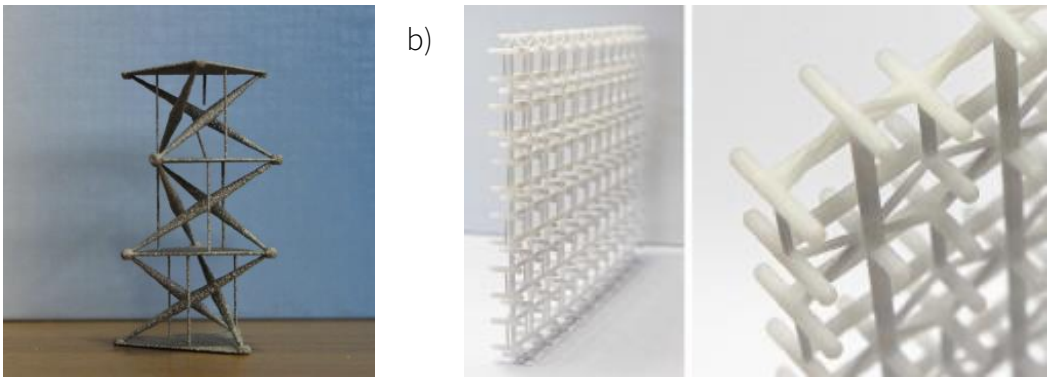
Wśród metamateriałów tensegrity odnajdziemy również bardzo specyficzny typ struktur, które są nazywane metamateriałami o własnościach ekstremalnych (*extremal metamaterials*). Termin ten odnosi się do zachowania struktury pod wpływem deformacji – przy niektórych z nich materiał wykazuje bardzo wysoką sztywność, przy innych zaś wykazuje ona bardzo dużą podatność – na przykładzie metamateriału składającego się z modułów *Simplex* czterozastrzałowy wykazano istnienie sześciu reprezentatywnych modów deformacji (sztywnych, miękkich i pośrednich) (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2019), a także przeanalizowano metamateriały zbudowane z innych modułów tensegrity (Al Sabouni-Zawadzka 2020). Dodatkowo, wiele metamateriałów o własnościach ekstremalnych wykazuje inne nietypowe cechy, na przykład ujemny współczynnik Poissona. W 2022 roku wykazano, że zarówno struktury tensegrity (zarówno metamateriały, jak i układy konstrukcyjne) mogą przejawiać ekstremalne właściwości mechaniczne (Al Sabouni-Zawadzka 2022, 2025).

Metamateriały tensegrity już od swoich początków wiążą się z procesem wytwarzania przyrostowego (*additive manufacturing*) – jednymi z pierwszych badań dotyczących produkcji modułów oraz struktur tensegrity w ten sposób, w celu wykorzystania ich w późniejszej produkcji metamateriałów, były badania (Amendola, Hernández-Nava et al. 2015a) – przykładowy wydruk przedstawiony na Rys. 2.13a. Rozwój w tej dyscyplinie pozwolił z czasem na wytwarzanie nanostruktur metamateriałów tensegrity (Vangelatos, Micheletti et al. 2020). Aktualnie istotnym obszarem badań jest analiza oraz modelowanie zachowania metamateriałów wytwarzanych w procesie wytwarzania przyrostowego w zależności od materiału bazowego i rozmiaru – zarówno w przypadku struktur przestrzennych, jak i płaskich (przedstawione na Rys. 2.13b) (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski et al. 2024a, 2024b; Gilewski, Zawadzki et al. 2025; Al Sabouni-Zawadzka, Micheletti et al. 2025). Celem badań była również analiza cech charakterystycznych dla tensegrity, jak i również cech takich jak auksetyczność. W tym samym roku analizowano również modelowanie modułów bez wykorzystania wytwarzania przyrostowego (Fraternali, Carpentieri et al. 2015). Powstała również metoda automatycznego generowania i montażu struktur poprzez łączenie modułów tensegrity w kształcie ściętych wielościanów foremnych z podstawowymi modułami tensegrity opartymi na graniastosłupach (Zhang, Li et al. 2018), jak również środowisko projektowe do automatycznego tworzenia metamateriałów tensegrity na bazie pojedynczych bloków tesselacyjnych (analogicznych do superkomórek) (Liu, Zegard et al. 2019). Przedstawiona metoda pozwala nie tylko na wytwarzanie wielkoskalowych struktur tensegrity o określonych własnościach, ale również metamateriałów. Innym podejściem do produkcji metamateriałów tensegrity było zaprojektowanie modułu tensegrity opartego o graniastosłup z wykorzystaniem zastrzałów z kompozytu metalowo-gumowego (*metal rubber*) (Ma, Zhang et al. 2018; Zhang, Zhang et al. 2018). Powstałe w ten sposób moduły mogą być wykorzystane w celu produkcji metamateriału o zmniejszonej sztywności pozwalającej na zwiększoną absorbcję energii.

Obserwując rozwój metamateriałów tensegrity, widać wyraźnie, że zainteresowanie nimi stale rośnie wraz z postępem inżynierii materiałowej i technologii wytwarzania. Ich charakterystyczna budowa, oparta na współpracy elementów ściskanych i rozciąganych, otwiera nowe możliwości kształtowania właściwości mechanicznych struktur. Z czasem rozwiązania te zaczęto postrzegać nie tylko jako interesującą koncepcję teoretyczną, ale także jako realną

podstawę nowoczesnych zastosowań technicznych. Dzięki temu metamateriały tensegrity coraz częściej pojawiają się w kontekście konstrukcji adaptujących się (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2018a; Liu, Zegard et al. 2019), robotyki (Wen, Pan et al. 2020), biomedycyny (Xue, Han et al. 2025) i systemów pochłaniania energii (Bauer, Kraus et al. 2021; Yang, Zhang et al. 2025).

a) b)



Rysunek 2.13 Przykładowe komórki metamateriałów wydrukowane przyrostowo: a) kolumna składająca się z trzech modułów (Amendola, Hernández-Nava et al. 2015b), b) metamateriał płaski zbudowany z komórek sześciokątnych (Gilewski, Zawadzki et al. 2025).

Analiza zastosowań metamateriałów tensegrity pozwoliła Autorce dostrzec lukę badawczą w zakresie możliwości ich wykorzystania. W żadnej z przytoczonych pozycji literaturowych nie przedstawiono koncepcji inteligentnego szkieletu wewnętrznego, który umożliwiałby zaprojektowanie adaptowalnego metamateriału tensegrity, wykazującego określone właściwości mechaniczne w zależności od rodzaju obciążeń, warunków środowiskowych oraz bieżących wymagań użytkowych. Przykład takiego rozwiązania, w postaci adaptowalnego metamateriału auksetycznego tensegrity, zaprezentowano w Rozdziale 7.3.

2.4. Matematyczne podstawy tensegrity

2.4.1. Geometria tensegrity

Uogólniony wzór Maxwella opisuje warunek, który musi spełnić trójwymiarowa kratownica przenosząca obciążenia we wszystkich kierunkach. W przypadku układu wolnostojącego (gdzie wszystkie węzły są swobodne), uogólniony wzór Maxwella ma postać (Micheletti 2025):

$$3n_n - n_e - 6 = n_m - n_s, \tag{2.1}$$

gdzie:

n_n – liczba węzłów konstrukcji,

n_e – liczba prętów konstrukcji,

6 – liczba niezależnych ruchów sztywnego ciała w przestrzeni trójwymiarowej,

n_m – liczba wewnętrznych mechanizmów, tj. takich, które odpowiadają rzeczywistym zmianom kształtu układu,

n_s – liczba stanów samonaprężenia.

Wykorzystując powyższy wzór można sklasyfikować układy prętowe, dzieląc je na cztery podstawowe typy. Struktury nie zmieniają typu przy przekształceniach rzutowych, tzn. takich, które zachowują wzajemne relacje punktów, linii i płaszczyzn (Micheletti 2025). Ustalono zatem następujące typy układów prętowych:

Typ 1: układy izostatyczne (*isostatic frameworks*). W tym przypadku mamy $n_m = n_s = 0$ oraz $r = 3n_n = n_e$ (gdzie r to rząd macierzy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{B}$ – macierz wydłużeń, zdefiniowana dalej w rozdziale 2.4.3. Mechanika tensegrity), oznacza to, że układ jest zarówno statycznie, jak i kinematycznie wyznaczalny; równania równowagi statycznej i kinematycznej zawsze mają jednoznaczne rozwiązanie dla każdego wyboru obciążeń oraz wydłużeń.

Typ 2: układy niedowiązane (*underconstrained frameworks*). W tym przypadku mamy $n_m > 0$, $n_s = 0$ oraz $r = n_e < 3n_n$. Układ jest statycznie przewiązany (*overdetermined*). Oznacza to, że równanie równowagi ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy obciążenia wykonują zerową pracę na mechanizmach; w przeciwnym razie rozwiązanie nie istnieje. Układ jest również kinematycznie niedowiązany, ponieważ równania równowagi kinematycznej mają n_m-parametrową rodzinę rozwiązań.

Typ 3: układy przewiązane (*overconstrained frameworks*). W tym przypadku mamy $n_m = 0, n_s > 0$ oraz $r = 3n_n < n_e$. Układ jest statycznie niewyznaczalny. Oznacza to, że równanie równowagi statycznej zawsze ma n_s-parametrową rodzinę rozwiązań. Układ jest jednocześnie kinematycznie przewiązany, ponieważ równanie równowagi kinematycznej ma jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy praca wykonywana przez dowolny stan samonaprężenia na wydłużeniach jest równa zeru; w przeciwnym razie rozwiązanie nie istnieje.

Typ 4: układy jednocześnie niedowiązane i przewiązane (*simultaneously under-and overconstrained frameworks*). W tym przypadku mamy $n_m > 0, n_s > 0$ oraz $r <$

$\min\{3n_n, n_e\}$. Macierz równowagi nie ma pełnego rzędu, a własności opisane powyżej dla Typu 2 i Typu 3 zachodzą jednocześnie. Układ jest zarówno statycznie, jak i kinematycznie jednocześnie przewiązany i niedowiązany: równanie równowagi statycznej ma n_s - parametrową rodzinę rozwiązań, jeśli obciążenia wykonują zerową pracę na mechanizmach; w przeciwnym razie rozwiązania nie istnieją. Podobnie, równanie równowagi kinematycznej ma n_m-parametrową rodzinę rozwiązań, jeśli stany samonaprężenia wykonują zerową pracę na wydłużeniach; w przeciwnym razie rozwiązania nie istnieją.

Układy prętowe z niezerowym stanem naprężenia można przekształcić w tensegrity poprzez zastąpienie prętów rozciąganych cięgnami. Struktury tensegrity mogą występować w konfiguracjach należących do dowolnego z czterech wymienionych typów, jednak najczęstszym przypadkiem są układy Typu 3 lub Typu 4, w których cięgna pozostają w stanie rozciągania wskutek obecności pewnego stanu samonaprężenia. W przypadku układów Typu 1 lub Typu 2 stan naprężenia jest wzbudzany przez obciążenie stałe. Tak jest na przykład w konstrukcjach robotów tensegrity, w których cięgna są utrzymywane w naciągu przez obciążenie grawitacyjne.

2.4.2. Poszukiwanie formy (*form-finding*)

Naturalnym kolejnym krokiem po opisie mechaniki struktur tensegrity na podstawie uogólnionego wzoru Maxwella jest przejście do zagadnienia *form-findingu*, który pozwala wyznaczyć ich stabilną konfigurację równowagi. Jest to ogromny rozwoju związanym ze strukturami tensegrity skupiający się na poszukiwania kształtu (układu cięgien i zastrzałów), które pozwolą na uzyskanie cech istotnych dla tensegrity. Poszukiwany jest układ, w którym mamy opisane:

a) wzajemne relacje pomiędzy węzłami i krawędziami grafu konstrukcji,
b) oznaczenie cięgien i zastrzałów,
c) położenia węzłów,

a ponadto w powyższym układzie:

d) stan naprężenia jest zgodny z założeniami tensegrity (cięgna są rozciągane, a zastrzały ściskane),
e) układ jest stabilny (całkowita energia potencjalna przyjmuje minimum lokalne).

Problemy poszukiwania są dzielone na podstawie tego co jest uznane za dane, a co za szukane. Typowym problemem jest wyznaczenie c) położenia węzłów dla zadanych a) relacji pomiędzy węzłami i krawędziami oraz b) oznaczeń cięgien i zastrzałów, aby spełnić warunki d) i e). Innym problemem może być znalezienie a) wzajemnych relacji pomiędzy węzłami i krawędziami oraz b) oznaczenia cięgien i zastrzałów dla c) zadanego położenia węzłów, czyli podejście odwrotne (Micheletti 2025).

W tym procesie wykorzystuje się liczne metody: rozkład SVD macierzy wydłużeń prętów (J.Y. Zhang, Ohsaki 2006; Estrada, Bungartz et al. 2006; Tran, Lee 2013; Gilewski, Kasprzak 2013), a także metody statyczne, kinematyczne oraz łączących obie wyżej wymienione (podział dokonany przez Tiberta i Pellegrino (Tibert, Pellegrino 2003)). Współcześnie wiele metod opiera się na algorytmach uczenia maszynowego oraz sieci neuronowych (Yamamoto, Gan et al. 2011; Lee, Lieu et al. 2022; Shao, Guo et al. 2024).

Wśród metod statycznych (zgodnie z podziałem (Tibert, Pellegrino 2003)) znajdziemy metody, w których zadaniem jest wyznaczenie możliwych konfiguracji równowagi struktury tensegrity o zadanej topologii, tzn. przy danej liczbie węzłów i elementów łączących pomiędzy nimi. W przypadku metod kinematycznych w podejściu zakłada się, że długości zastrzałów są stałe, zaś długości cięgien są zmniejszane aż do uzyskania kształtu tensegrity. Możliwe jest również odwrotne podejście, w którym długości cięgien są stałe, a długości zastrzałów wydłużane. Jest to podejście, które odzwierciedla praktyczny sposób budowania struktur tensegrity, w których wykorzystując zastrzały o stałej długości wprowadzamy wstępne sprężenie poprzez naciąganie cięgien.

W przypadku metod statycznych, jedną z pierwszych, powszechnie używanych, jest statyczne rozwiązanie analityczne (Tibert, Pellegrino 2003), które opiera się na poszukiwaniu równowagi sił w węzłach struktur symetrycznych dla założonej wstępnie konfiguracji węzłów i elementów. W ten sposób Kenner w 1976 roku wyznaczył konfigurację rozszerzonego ośmiościanu foremnego (*expandable octahedron*), a z czasem także zostały w ten sposób wyznaczone bardziej skomplikowane struktury sześcio-ośmiościanu (*cuboctahedronu*) oraz dwudziesto-dwunastościanu (*icosidodecahedron*) opartych na bryłach archimedesowych (Kenner 1976). Jedną z powszechniej wykorzystywanych metod jest metoda gęstości siły (*force density method*), której głównym założeniem jest przekształcenie nieliniowych równań równowagi

węzłów w układ równań liniowych (Schek 1974; Vassart, Motro 1999; Masic, Skelton et al. 2005; J. Y. Zhang, Ohsaki 2006; Tran, Lee 2010; Koohestani, Guest 2013). Wykorzystanie tej metody pozwala na uzyskanie jednoznacznego rozwiązania, nawet w przypadku konstrukcji czysto cięgnowych. Takie rozszerzenie pozwala na wyznaczanie kształtu struktur membranowych, które pozwoliło na przejście do konstrukcji tensegrity prętowo-powłokowych. Metodę też wykorzystano w przypadku wyznaczenia struktur tensegrity i symetrii obrotowej z wykorzystaniem gęstości siły (*force density*) jako zmiennej w układzie liniowych równań równowagi (Connelly, Terrell 1995). Z czasem powstało również rozwinięcie tej metody nazwane adaptacyjną metodą gęstości sił (*adaptive force density method*) (J. Y. Zhang, Ohsaki 2006). W metodzie algebraicznej wprowadzono rozszerzenie metody gęstości sił o ograniczenia dotyczące kształtu konstrukcji (Masic, Skelton et al. 2005). Wraz z rozwojem tych metod powstały podejścia pozwalające na pracę z umiarkowanie dużymi i nieregularnymi modelami (Koohestani, Guest 2013). W celu poszukiwania struktur nieregularnych korzystano również z metod optymalizacji połączonych z metodą gęstości sił (Cai, Feng 2015). W ostatnich latach pojawiła się również metoda oparta na dekompozycji LU (*lower-upper*) macierzy gęstości sił, która jest następnie minimalizowana (Koohestani 2020). W przypadku metody energetycznej (*energy method*) poszukiwane jest minimum funkcji energii potencjalnej w przypadku konstrukcji naprężonej (Connelly, Terrell 1995). Metodę te również połączono z MES, tworząc dwustopniowe podejście (Pagitz, Mirats Tur 2009). Metodą statyczną jest również metoda zredukowanych współrzędnych (*reduced coordinates*), w której wykonywane są obliczenia symboliczne na uogólnionych współrzędnych definiujących geometrię (Sultan, Corless et al. 1999; Sultan 1999).

W przypadku metod kinematycznych również znajdziemy metodę rozwiązania analitycznego, którą wykorzystuje się w strukturach symetrycznych (jak w przypadku metody statycznej). W metodzie tej minimalizuje się (lub maksymalizuje) funkcję długości wybranych prętów (Tibert, Pellegrino 2003). Wśród metod kinematycznych znajdziemy również metody programowania nieliniowego, które sprowadzają proces poszukiwania kształtu do zadania minimalizacji z ograniczeniami (Pellegrino 1986). W tym podejściu znana jest topologia konstrukcji, zaś jeden (lub kilka) zastrzałów jest wydłużany przy zachowaniu stałych proporcji długości aż do osiągnięcia długości maksymalnej. W przypadku metody relaksacji dynamicznej

(*dynamic relaxation*) wykorzystywane są obliczenia dynamiczne konstrukcji obciążonej, która wstępnie nie jest w równowadze (Motro 1984, 1990). Siły wypadkowe prowadzają węzły konstrukcji w ruch, poszukiwany jest stan równowagi, który wyznacza konfiguracja uzyskująca największą wartość energii kinetycznej. Metoda relaksacji dynamicznej staje się nieefektywna w miarę wzrostu liczby węzłów i jest również nieefektywna w przypadku struktur o nieregularnych kształtach. Dopiero dalsze badania wprowadziły metodę relaksacji dynamicznej z tłumieniem kinetycznym (*dynamic relaxation method with kinetic damping*), która pozwoliła na poszukiwanie bardziej zawiłych, nieregularnych kształtów (Zhang, Maurin et al. 2006). Technika relaksacji dynamicznej z tłumieniem kinetycznym została rozwinięta poprzez włączenie do tzw. metody trójczłonowej (*three-term method*), aby rozwiązać zadanie optymalizacji (Zhang, Zhou et al. 2021). W metodzie tej zadanie rozpoczyna się od losowo zadanej konfiguracji początkowej oraz założonej topologii struktury, a także funkcję celu opartą na długościach prętów.

Z czasem zaczęły powstawać metody odchodzące od dwóch głównych podziałów. Powstała m.in. metoda numeryczna, która wymaga minimalnej wiedzy o strukturze – wymagana jest informacja o typie elementu (cięgno/zastrzał) oraz o łączności węzłów (Estrada, Bungartz et al. 2006). W procesie tym poszukiwana jest minimalna energia potencjalna sprężystości – metoda dzięki temu wyznacza nowe konfiguracje, bez wymogu założeń długości cięgien lub stosunków długości cięgien do zastrzałów. Powstała również procedura krocząca (*marching procedure*) do poszukiwania kształtu struktur tensegrity, która oferuje prostsze podejście do odkrywania przestrzeni możliwych geometrii dla zadanej topologii struktury tensegrity (Micheletti, Williams 2007). Poszukiwanie kształtu wychodzi od stabilnej konfiguracji początkowej, zaś długości elementów podlegają bezpośredniej kontroli. Metoda ta dzięki temu nadaje się do analizy struktur o zmiennej geometrii (konstrukcje rozwijalne, sterowane za pomocą cięgien). Wraz z rozwojem technologii, do poszukiwania kształtu konstrukcji tensegrity zaczęto również wykorzystywać algorytmy genetyczne (Yamamoto, Gan et al. 2011; Lee, Lee et al. 2017; Gan, Zhang et al. 2015; Wang, Cai et al. 2022). Metoda ta nie wymaga wielu informacji (wystarczająca jest informacja o cechach elementu (cięgno/zastrzał) oraz o łączności elementów), ponieważ kolejne konfiguracje są generowane jako potomkowie początkowej topologii. Bardzo często metoda ta jest łączona z metodą gęstości siły, pozwala na poszukiwanie kształtu struktur

tensegrity z wieloma stanami samonaprężenia. W analizach znajdziemy również metodę opartą o algorytm Monte Carlo (Li, Feng et al. 2010).

Rozpatrywano również analizę poszukiwania konstrukcji tensegrity z wieloma stanami samonaprężenia – w pierwszym kroku poszukiwane są dopuszczalne topologie konstrukcji, która posiada wiele stanów samonaprężenia, zaś w drugim kroku wprowadzane są liniowe ograniczenia na gęstości sił w celu określenia pojedynczego, całkowitego dopuszczalnego wektora gęstości sił (Tran, Lee 2011). Ostatnie lata pokazują ogromny rozwój w obszarze poszukiwania kształtu, związany z powstaniem wielu nowych metod, m.in.: metoda wykorzystująca metodę Levenberga–Marquardta (Yuan, Ma et al. 2017; Cao, Luo et al. 2024). Wśród nowych rozwiązań znajdują się również te oparte o rozwiązania znane w teorii sterowania i optymalizacji, jak na przykład podejście obliczeniowe oparte jest na liniowych nierównościach macierzowych z ograniczeniem rzędu, które pozwala zamiennie na poszukiwanie kształtu oraz poszukiwanie topologii tensegrity (Wang, Xu et al. 2021a). Ostatnim ogromnym skokiem okazało się również wprowadzenie sieci neuronowych i technik głębokiego uczenia do procesu poszukiwania kształtu (Lee, Lieu et al. 2022; Shao, Guo et al. 2024). Metody te sprawiają, że nie jest konieczne stosowanie dekompozycji wartości własnych macierzy gęstości sił ani analizy macierzy równowagi w celu określenia dopuszczalnych zbiorów współrzędnych węzłów.

Należy zauważyć, że w kilku pracach wskazano na rozróżnienie pomiędzy procesem poszukiwania kształtu konstrukcji, przy znanej topologii, a procesem poszukiwania topologii, przy założonym kształcie konstrukcji. Celem niniejszego rozdziału było precyzyjne określenie istoty oraz przebiegu procesu poszukiwania kształtu (*form-finding*), tak aby możliwe było jednoznaczne odróżnienie go od procesu poszukiwania topologii konstrukcji tensegrity, a także wykorzystania wyników optymalizacji topologicznej w procesie wprowadzania inteligentnego szkieletu. Zagadnienie optymalizacji topologii konstrukcji tensegrity zostało szczegółowo omówione w Rozdziale 3.4.

2.4.3. Mechanika tensegrity

Teoria tensegrity, zgodnie z ich definicją, zawiera się w teorii kratownic. Zakłada więc, że są to konstrukcje prętowe obciążone wyłącznie w węzłach, a połączenia prętów są przegubowe, zatem siły wewnętrzne to wyłącznie siły podłużne (zarówno ściskające, jak

i rozciągające), nie występuje zginanie i skręcanie. Zakłada się równomierny rozkład naprężeń wzdłuż osi pręta oraz przekroju. Opis matematyczny kratownic tensegrity jest spójny z opisem równań kratownic powszechnie znanym w literaturze (Lewiński 2001; Pełczyński, Gilewski 2019). Opis rozpoczynamy od zależności wiążących:

związki geometryczne:

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{B}\mathbf{q}, \tag{2.2.}$$

gdzie:

$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix}$ - wektor wydłużeń prętów w kratownicy niepodpartej (wymiar $n \times 1$),

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{bmatrix}$ - macierz wydłużeń (pozwalająca wyrazić wydłużenie prętów przez przemieszczenia ich końców) (wymiar $n \times m$),

$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}$ - wektor przemieszczeń węzłowych (wymiar $m \times 1$);

związki fizyczne:

$$\mathbf{N} = \mathbf{E}\mathbf{\Delta}, \tag{2.3.}$$

gdzie:

$\mathbf{N}$ – wektor sił podłużnych w kratownicy niepodpartej (wymiar $n \times 1$)

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{E_n A_n}{l_n} \end{bmatrix}$ - macierz współczynników sprężystości (wymiar $n \times n$)

oraz równania równowagi:

$$\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\,\mathbf{N} = \mathbf{P}, \tag{2.4.}$$

gdzie:

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_m \end{bmatrix}$ - wektor obciążeń węzłowych (wymiar $m \times 1$).

Kolejno po podstawieniu związków geometrycznych (2.2) i fizycznych (2.3) do równań równowagi (2.4) otrzymujemy układ równań w sfomułowaniu przemieszczeniowym:

$$\mathbf{K_L}\,\mathbf{q} = \mathbf{P}, \tag{2.5.}$$

gdzie macierz sztywności liniowej $\mathbf{K_L}$ opisana jest wzorem:

$$\mathbf{K_L} = \mathbf{B^T}\,\mathbf{EB}, \tag{2.6.}$$

Układ równań naprężeniowych zagadnienia uzyskujemy poprzez symetryzację równań równowagi (2.4):

$$\mathbf{DS} = \mathbf{BP}, \tag{2.7}$$

gdzie:

$\mathbf{D} = \mathbf{BB^T}$

Macierz wydłużeń prętów $\mathbf{B}$ można wyznaczyć bezpośrednio na podstawie geometrii struktury lub korzystając z metody elementów skończonych (MES) (Bathe 2006; Zienkiewicz, Taylor et al. 2005), wykorzystywany w szczególności w przypadku zadań trójwymiarowych.

Macierz sztywności liniowej $\mathbf{K_L}$ wyznacza się na podstawie wzoru (2.6.) lub poprzez agregację macierzy sztywności liniowej pojedynczych elementów skończonych $\mathbf{K_{Le}}$, przetransformowanych z opisu lokalnego do globalnego za pomocą uogólnionych macierzy Boole'a $\mathbf{C_e}$ (Bathe 2006; Zienkiewicz, Taylor et al. 2005):

$$\mathbf{K_{Le}} = \frac{E_e\,A_e}{L_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q_{Le}} = \{u_1, u_2\}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{K_L} = \sum_{e=1}^{n} \mathbf{C_e^T K_{Le} C_e}, \tag{2.9}$$

Opisane powyżej wzory obejmują opis dla kratownicy niepodpartej, w przypadku kratownicy podpartej wektor przemieszczeń węzłowych $\tilde{\mathbf{q}}$ ma odpowiednio mniejszą długość $\tilde{n}$, wpływając na równania liniowej mechaniki kratownic poprzez zmniejszenie wymiarów wszystkich elementów w związkach geometrycznych, fizycznych, równaniach równowagi i układach równań przemieszczeniowych.

Największa różnica pomiędzy strukturą kratownicową a strukturą tensegrity zawiera się w fakcie istnienia mechanizmów infinitezymalnych i wpływowi sprężenia na deformację konstrukcji. W celu uwzględnienia tej nieliniowości zadania należy do układu równań przemieszczeniowych (2.5.) dodać macierz sztywności geometrycznej $\mathbf{K_G}$ (lub $\widetilde{\mathbf{K_G}}$ w przypadku konstrukcji podpartej).

Wtedy macierzowy zapis układu równań ma następującą postać:

$$\mathbf{Kq} = \mathbf{P}, \tag{2.10}$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K_L} + \mathbf{K_G}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{K_L} = \mathbf{B^T}\,\mathbf{EB}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{K_G} = \mathbf{C^T}\,\mathbf{EC}, \tag{2.13}$$

gdzie:

$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nm} \end{bmatrix}$ – macierz kątów obrotu (wymiar $n \times m$)

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{S_1}{l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{S_2}{l_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{S_n}{l_n} \end{bmatrix}$ – macierz sił w prętach (wymiar $n \times n$)

Globalną macierz sztywności geometrycznej $\mathbf{K_G}$ wyznacza się podobnie do macierzy sztywności K_L ze wzoru (2.12.) lub przy wykorzystaniu uogólnionych macierzy Boole'a $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{e}$ (o wymiarach $m \times 6$) oraz $\mathbf{K_{Ge}}$ (poprzez formalizm MES):

$$\mathbf{K_G} = \sum_{e=1}^{n} \bar{\mathbf{C}}_\mathbf{e}^\mathbf{T} \mathbf{K_{Ge}}\, \bar{\mathbf{C}}_\mathbf{e}, \tag{2.14}$$

gdzie:

$\mathbf{K_{Ge}} = \frac{S_e}{L_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ – lokalna macierz sztywności geometrycznej elementu.

W przypadku rozpatrywania pojedynczych modułów zazwyczaj wystarczające są równania algebraiczne mechaniki kratownic, w szczególności gdy znana jest geometria i rozkład sił wstępnych. W przypadku większych układów takie postępowanie jest formalnie możliwe, lecz staje się nieefektywne i mało przejrzyste, ponieważ wraz ze wzrostem rozmiaru układu rośnie liczba stopni swobody i sił osiowych, liczba niewiadomych, a także należy uwzględnić połączenia pomiędzy modułami. Prowadzi to do dużego, sprzężonego, nieliniowego układu równań, dlatego w analizie całych konstrukcji stosuje się najczęściej MES, który pozwala uwzględnić siły wstępne, duże siły osiowe oraz nieliniowości geometryczne.

2.4.4. Rozkład według wartości osobliwych (SVD, *Singular Value Decomposition*)

Rozkład według wartości osobliwych (SVD, *Singular Value Decomposition*) to rozkład macierzy na iloczyn trzech macierzy, która pozwala na redukcję wymiaru macierzy (Golub, Reinsch 1970; Akritas, Malaschonok 2004; Micheletti 2025). Jest to metoda wykorzystywana powszechnie w wielu dyscyplinach, w szczególności w analizie statystycznej, rozpoznawaniu wzorców i analizowaniu dużych i różnorodnych zbiorów danych (*big data*) (Hashemipour, Aghaei et al. 2021), także w uczeniu maszynowym i związanej z nią kompresji obrazów (Huang, Zhao et al. 2022) oraz przetwarzaniu sygnałów i robotyce (Maciejewski, Klein 1989). Ponadto rozkład SVD pozwala na określenie jawnej reprezentacji przestrzeni wartości oraz jądra macierzy poddanej rozkładowi. Metoda ta zatem w prosty sposób wyznaczyć stany samonaprężenia oraz mechanizmy infinitezymalne przy użyciu rozkładu SVD macierzy wydłużeń prętów (Micheletti 2025):

$$\mathbf{B} = \mathbf{Y}\,\mathbf{D}\,\mathbf{X}^{\mathbf{T}}, \tag{2.15}$$

gdzie:

$\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$ - macierze ortonormalne (zawiera odpowiednio wektory własne wyrażenia $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}$ i $\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}$),

$\mathbf{D}$ - macierz diagonalna, zawiera na diagonali wartości osobliwe macierzy $\mathbf{B}$, dodatnie i uporządkowane malejąco, gdzie pierwsze r-elementów jest różnych od zera.

Macierz $\mathbf{Y}$ jest kwadratową macierzą o wymiarze $3n_n \times 3n_n$, a wektory kolumnowe tej macierzy $u_i, i = 1, \dots, n_n$ są lewymi wektorami własnymi macierzy $\mathbf{B}$. Pierwsze r lewych wektorów

tworzy ortonormalną bazę przestrzeni $\mathbf{col(B)}$, pozostałe n_m lewych wektorów tworzy ortonormalną bazę jądra $\mathbf{B^T}$, a tym samym przestrzeń mechanizmów infinitezymalnych.

Macierz $\mathbf{X}$ jest kwadratową macierzą o wymiarze $n_e \times n_e$. Wektory kolumnowe tej macierzy, $w_i, i = 1, \dots, n_e$ są prawymi wektorami własnymi macierzy $\mathbf{B}$. Pierwsze r prawych wektorów tworzy ortonormalną bazę przestrzeni $\mathbf{col(B^T)}$, pozostałe n_s lewych wektorów tworzy ortonormalną bazę jądra $\mathbf{B}$, a tym samym przestrzeń mechanizmów samonaprężenia.

Rozkład SVD można zatem przeprowadzić poprzez obliczenie wartości i wektorów własnych macierzy $\mathbf{BB^T}$ oraz $\mathbf{B^TB}$. W celu odnalezienia informacji o mechanizmach infinitezymalnych oraz równoważącym je zestawie sił sprężających należy rozwiązać dwa zagadnienia własne.

Pierwsze zagadnienie własne, odpowiadające na pytanie czy w danej konstrukcji istnieje mechanizm infinitezymalny, ma postać:

$$\mathbf{(BB^T - \lambda I)q_0 = 0}, \tag{2.16}$$

W przypadku tego zagadnienia własnego, jeżeli rozpatrujemy konstrukcję podpartą, to wszystkie wartości własne będą dodatnie – oznaczać będzie to brak mechanizmów skończonych. Tym samym konstrukcja nie jest w układzie pozwalającym nazwać ją czystym tensegrity. W przypadku, gdy występują zerowe wartości własne (co najmniej jedna), możemy mówić o konstrukcji tensegrity, a wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej będzie realizował mechanizm infinitezymalny.

Drugie zagadnienie własne, wskazujące na istnienie stanu samonaprężenia równoważącego istniejący mechanizm infinitezymalny, ma postać:

$$\mathbf{(B^TB - \mu I)S_0 = 0}, \tag{2.17}$$

Jeżeli konstrukcja jest poprawnie podparta i wszystkie wartości własne są dodatnie to rozpatrywana konstrukcja jest kratownicą. W przypadku występowania co najmniej jednej zerowej wartości własnej możemy mówić o konstrukcji tensegrity oraz o istnieniu stanu samonaprężenia, który powinien równoważyć istniejące mechanizmy infinitezymalne. Wektor własny związany z zerową wartością własną realizuje stan samonaprężenia, tj.: zawiera rozkład sił, który po wprowadzeniu do struktury, powinien zrównoważyć mechanizmy infinitezymalne.

Po wykonaniu analizy spektralnej macierzy $\mathbf{B}$ powinna zostać również wykonana analiza spektralna macierzy sztywności (liniowej oraz z uwzględnieniem nieliniowości), w celu sprawdzenia czy dany układ sił zrównoważy mechanizm infinitezymalny.

Rozpatrując strukturę poprawnie podpartą, bez wstępnego sprężenia, zagadnienie własne macierzy sztywności liniowej ma postać:

$$(\mathbf{K_L} - \kappa\mathbf{I})\mathbf{q_0} = \mathbf{0}, \tag{2.18}$$

W poprawnie zdefiniowanej konstrukcji tensegrity pojawi się co najmniej jedna zerowa wartość własna wskazująca na istniejący w strukturze mechanizm infinitezymalny. Po wprowadzeniu wcześniej znalezionego zestawu sił samorównoważących (w macierzy $\mathbf{K_G}$) należy przeprowadzić analizę spektralną macierzy sztywności z uwzględnieniem nieliniowości:

$$(\mathbf{K_L} + \mathbf{K_G} - \kappa\mathbf{I})\mathbf{q_0} = \mathbf{0}, \tag{2.19}$$

W przypadku uzyskania zerowych wartości własnych należy stwierdzić, że istniejący w konstrukcji mechanizm jest skończony. W przypadku występowania tylko dodatnich wartości własnych macierzy sztywności uzyskujemy konfigurację tensegrity, w której istnieje mechanizm infinitezymalny równoważony przez odpowiadający mu stan samonaprężenia.

Przedstawiona powyżej metoda jest wykorzystywana w niniejszej pracy do potwierdzenia cech tensegrity w konstrukcji. W szerszym spojrzeniu metoda rozkładu SVD jest również powszechnie wykorzystywana w przeprowadzaniu procesu *form-findingu* opisanego w Rozdziale 2.4.2.

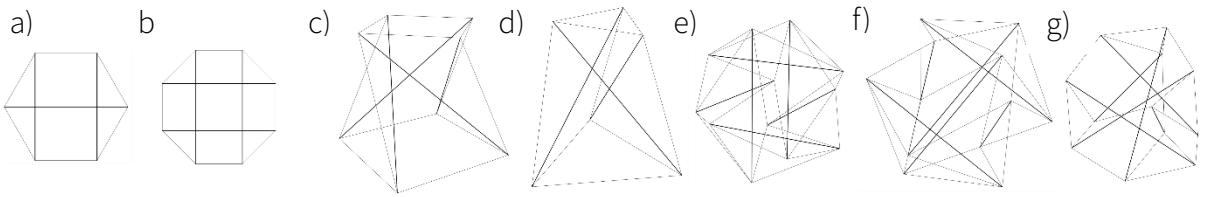
2.4.5. Budowa struktur tensegrity z pojedynczych modułów

Struktury tensegrity mogą być generowane na dwa podstawowe sposoby: pierwszy z nich to projektowanie oraz montaż całej konstrukcji na raz, drugi zaś to konstruowanie jej z pojedynczych modułów łączonych w określony sposób. Pierwszy sposób pozwala często uzyskać struktury w pełni dostosowanej do założeń projektu – od samego początku zakłada się końcowy kształt i zachowanie konstrukcji, który uzyskuje się przez *form-finding*, w jednym kroku. Takie podejście daje potencjalnie najlepszą konstrukcję dla określonego celu (na przykład masa, sztywność, ugięcia), ale jednocześnie w tym przypadku pojawia się bardzo duża złożoność konstrukcji na etapie projektowym (każda najmniejsza zmiana powoduje przebudowę całej konstrukcji, co ogranicza możliwości prototypowania). Struktura taka jest

dodatkowo trudna w montażu, ponieważ musi być wykonana możliwie „na raz” – złożona i jednocześnie sprężona.

W przypadku łączenia modułowego konstrukcji projektowany jest najpierw moduł, a potem sposób jego łączenia i wbudowanie konstrukcji w założenia projektowe. Złożoność obliczeniowa takiego projektu jest znacznie mniejsza ze względu na powtarzalność konstrukcji zbudowanej z pojedynczych modułów, jednocześnie parametryzacja takiej struktury jest znacznie łatwiejsza. Również montaż jest ułatwiony, ponieważ konstrukcja jest budowana w analogiczny sposób – pojedyncze, wstępnie sprężone moduły są ze sobą łączone. Drugi sposób jest metodą, która w przypadku produkcji masowej lub wykorzystania w warunkach budowlanych byłaby preferowana ze względu na możliwość produkcji w zakładzie prefabrykacji poszczególnych modułów, a następnie ułatwionego transportu i magazynowania, jak również naprawy struktury (wystarczy wymienić konkretny moduł w przypadku zniszczenia). Konstrukcje tensegrity są bardzo wrażliwe na nawet niewielkie zmiany w procesie wznoszenia, tym samym budowa modułowa pozwala uniknąć ryzyka związanego z niedokładnościami. W związku z powyższymi zaletami, w niniejszej pracy rozpatrywane są tylko struktury modularne tensegrity, zawierające powtarzalne elementy budujące, jak na przykład moduły lub superkomórki.

Struktury modularne mogą być budowane zarówno z podstawowych i powszechnie znanych modułów płaskich lub przestrzennych (jak przedstawione na Rys. 2.14), jak i również z modułów zaprojektowanych specjalnie dla danych projektów. Wśród dziesiątek popularnych modułów najbardziej znanymi modułami tensegrity w przypadku przestrzennych konstrukcji są: moduły typu *Simplex*, rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), geometrie ściętych wielościanów (na przykład czworościan (*truncated tetrahedron*)), zaś w przypadku modułów płaskich – moduły sześciokątne i ośmiokątne.



Rysunek 2.14 Moduły tensegrity płaskie: a) sześciokątny, b) ośmiokątny. Moduły tensegrity przestrzenne: c) Simplex trójzastrzałowy, d) Simplex czterozastrzałowy, e) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie sztywnym, f) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie podatnym, g) ścięty czworościan (truncated tetrahedron).

Moduły *Simplex* to moduły powstałe z graniastosłupów o podstawie wielokątów foremnych, w których podstawa jest obrócona o kąt $\theta = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{n}$, gdzie n – liczba kątów w wielokącie (Kenner 1976). Istnieje wiele modułów opartych na graniastosłupach prawidłowych, których liczba zastrzałów równa jest liczbie kątów wielokąta w podstawie, jednak *Simplex* trójzastrzałowy i czterozastrzałowy są jednymi z najpopularniejszych i wykorzystywanych powszechnie. Moduły tego typu posiadają określoną oś pionową, mogą być wpisane w walec lub ścięty stożek, a tym samym naturalnie są wykorzystywane w przypadku konstrukcji obciążanych osiowo (na przykład słupach). Moduły te mają szeroki zakres zmian pozwalających na budowanie różnego rodzaju struktur - można zmieniać ich wysokość oraz rozmiar podstaw bez utraty cech tensegrity. W przypadku modułu trójzastrzałowego i czterozastrzałowego jest to jeden mechanizm infinitezymalny stabilizowany przez jeden zestaw samorównoważnego układu sił.

Rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) to wyjątkowy moduł, który składa się z prostopadłych zastrzałów rozciągających cięgna. Moduł ten można ustawiać w układzie sztywnym (ściskając wzgłuż osi wybranej pary zastrzałów) lub w układzie podatnym (ściskając pod kątem do zastrzałów). Jest to moduł, w którym można zmieniać długości par poszczególnych zastrzałów bez utraty cech tensegrity. Moduł jest często wybierany do generacji elementów dwuwymiarowych, a także zakrzywionych dzięki charakterystycznemu układowi zastrzałów. Z podstawowego modułu można generować całą rodzinę modułów poprzez powielanie i rozsuwanie zastrzałów w sposób symetryczny (wykorzystując podstawowy wzór opisujący kształt modułu) lub niesymetryczny (poprzez analizę spektralną macierzy kratownic). Rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) w podstawowym układzie wpisany w sześcian z zastrzałami równej długości (nazywany również dwudziestościanem tensegrity) ma jeden mechanizm infinitezymalny stabilizowany przez jeden zestaw samorównoważnego układu sił.

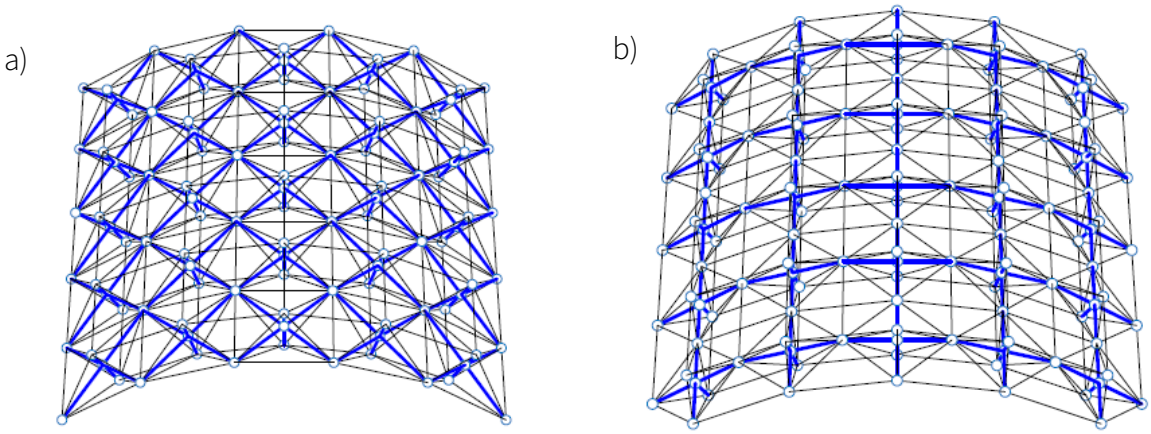
W przypadku wielościanów ściętych mówimy o modułach opartych na ściętej regularnej bryle (platońskiej), w której ścięte wierzchołki tworzą wierzchołki bryły. Przykładem takiej struktury jest czworościan ścięty, który jest oparty na wielościanie archimedesowym (półregularnym), gdzie wszystkie krawędzie są równe. W takim module występuje siedem mechanizmów infinitezymalnych i jeden stan samonaprężenia.

Wśród modułów płaskich znajdziemy moduły oparte na sześciokątach i ośmiokątach, w których wewnętrzne zastrzały rozpierają cięgna będące obrysem figury. Moduły sześciokątne mają jeden mechanizm infinitezymalny stabilizowany przez jeden zestaw samorównoważnego układu sił, zaś ośmiokątne – dwa mechanizmy infinitezymalne i jeden stan samonaprężenia. Moduły te również mogą być modyfikowane bez utraty cech typowych dla tensegrity – moduły mogą być bardzo wąskie lub szerokie, a długości boków mogą być różne tak długo jak posiadają jedną oś symetrii.

Istnieją również moduły projektowane specjalnie w celu wykonania określonej struktury – przykładem może być moduł w kształcie kwiatu, który jest wykorzystywany w procesie projektowania metamateriału, który może być wykorzystywany w budowie tłumików drgań (Santos 2023), moduł zaprojektowany tak, aby miał cechy auksetyczne (Mathias Oster, Marcelo A. Dias et al. 2021), moduły bistabilne (Micheletti, Santos et al. 2023; Yang, Zhang et al. 2025), moduły o dodatkowej liczbie cięgien rozszerzające podstawowe moduły o dodatkowe klasy opisane przez współczynnik θ (Bieniek 2017; Modano, Mascolo et al. 2018) lub moduły o dowolnych kształtach dopasowujących się do określonej przestrzeni (Liu, Paulino 2019).

Moduły można łączyć ze sobą na wiele różnych sposobów, najpopularniejszy z nich zakłada połączenia węzeł do węzła, które pozwalają na połączenie modułów w niezmienionej formie, zazwyczaj bez wspólnych prętów (Rys. 2.15a). Odmianą połączenia węzeł do węzła jest połączenie krawędź do krawędzi, kiedy moduły dzielą ze sobą wspólne krawędzie (i węzły) (Rys. 2.15b) (Mirzaaghazadeh, Abedi et al. 2021). Znaczną zaletą tego typu połączenia jest fakt, ze często struktura dziedziczy cechy tensegrity w naturalny sposób w tym przypadku, w szczególności, gdy moduły są tego samego rozmiaru i typu. Istotne jest tutaj jednak zaznaczenie, że często ma znaczenie kierunek skrętności modułów (w szczególności w przypadku modułów typu *Simplex*). Jeżeli połączymy ze sobą moduły o jednakowej skrętności to uzyskamy strukturę anizotropową, której ugięcia mogą być niewielkie, zaś mechanizmy infinitezymalne mogą się nawzajem blokować. W przypadku połączenia modułów z naprzemienną skrętnością możemy uzyskać strukturę o cechach ortotropowych i jednocześnie pracującą w pełni jako konstrukcja tensegrity (Al Sabouni-Zawadzka 2016; Mirzaaghazadeh, Abedi et al. 2021; Pełczyński, Martyniuk-Sienkiewicz 2025). Istotna bywa również orientacja modułów – czasem wymagane jest obrócenie modułów, aby połączenie

węzeł do węzła było spełnione. Można łączyć również moduły różnych typów i rozmiarów w celu uzyskania bardziej różnorodnych struktur (Zhang, Li et al. 2018).



Rysunek 2.15 Połączenie modułów piramidalnych: a) krawędź do krawędzi, b) węzeł do węzła (Mirzaaghazadeh, Abedi et al. 2021).

Innym typem połączeń modułów jest łączenie węzłów z krawędzią, które zazwyczaj prowadzi do podzielenia krawędzi lub dodania nowych prętów. Najczęściej ten typ połączeń jest spotykany w przypadku budowania wież, słupów lub masztów tensegrity, w których wymagane jest uzyskanie stabilizacji struktury (Safaei, Eriksson et al. 2013; Zawadzki, Al Sabouni-Zawadzka 2020). Istotne są decyzje zapadające w przypadku projektowania konstrukcji modularnych tensegrity często dotyczą kwestii takich jak wcześniej wspomniany wpływ orientacji modułów, unikanie kolizji prętów lub krzyżowania się cięgien, a także decyzje dotyczące nakładających się na siebie prętów – czy będą one uwspólnione, czy traktowane jako podwójne pręty (co może ułatwić montaż moduł po module). Takie podwójne pręty można w analizie traktować dwojako: zaznaczając je jako dwa oddzielne elementy lub generując jako pojedynczy pręt o podwójnym polu powierzchni.

W literaturze istnieją liczne przykłady konstrukcji modularnych tensegrity, od struktur jednowymiarowych do trójwymiarowych. Same struktury mogą być zbudowane z modułów płaskich lub przestrzennych. Pierwszymi strukturami były konstrukcje jednowymiarowe, które były połączone z ruchem tensegrity i pierwszymi rzeźbami. Wśród struktur jednowymiarowych znajdziemy zatem maszty, łuki, łańcuchy, słupy oraz belki. W przypadku struktur łańcuchowych znajdziemy zazwyczaj połączenia węzeł do węzła, w zależności od typu modułu mogą być one ułożone skrętnością naprzemiennie w różnych układach lub cała konstrukcja składa się

z modułów o jednakowej skrętności. Łańcuchy są zazwyczaj spotykane w przypadku pracy z metamateriałami tensegrity (Amendola, Krushynska et al. 2018; Xu Yin, Shuai Zhang et al. 2020; Intrigila, Micheletti et al. 2023). W przypadku słupów, masztów i łuków można odnaleźć kilka sposobów łączenia modułów w strukturę – znajdziemy tutaj zarówno połączenia węzeł do węzła, jak również węzeł do krawędzi, wraz z wymogiem dodatkowych prętów zapewniających stabilizację konstrukcji (Safaei, Eriksson et al. 2013; Zawadzki, Al Sabouni-Zawadzka 2020). W przypadku połączeń wymaganych do zaprojektowania belek tensegrity możemy zaobserwować głównie skupienie się na połączeniach węzłów z krawędziami struktur (Micheletti, Ruscica et al. 2019).

Wśród konstrukcji modularnych powierzchniowych znajdziemy od dawna badane struktury typu płytowego i powłokowego. W przypadku struktur płytowych są to liczne przykłady konstrukcji modularnych, głównie łączonych węzeł do węzła (lub krawędź do krawędzi w zależności od podejścia) – już w latach 80. można było spotkać się z pierwszymi analizami Ariela Hanaora, które zostały opisane w (Gómez Jáuregui 2004), zaś w 1998 roku Wang potwierdził, że połączenie węzeł do węzła pozwala na uzyskanie najbardziej optymalnych struktur pod względem minimalizacji masy konstrukcji i redystrybucji sił (Wang 1998). Są to płaskie elementy powierzchniowe, których grubość jest znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów, są obciążone prostopadle do swojej płaszczyzny. W wyniku tego struktury te należy modelować za pomocą przestrzennych modułów tensegrity, gdzie grubość płyty odpowiada jednemu z równorzędnych wymiarów modułu. Grubość konstrukcji może wynikać z jednej lub więcej warstw modułów. Przykładem modularnych konstrukcji płytowych mogą być płyty zbudowane z modułów *Simplex* trójzastrzałowy (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2018b; Martyniuk-Sienkiewicz, Al Sabouni-Zawadzka 2021; Obara, Tomasik 2021) lub *Simplex* czterozastrzałowy (Obara, Tomasik 2020). Z wykorzystaniem modułów płaskich można również budować konstrukcje typu tarczowego tensegrity, które są obciążane w swojej płaszczyźnie, a ich grubość odpowiada grubości prętów modułów. Konstrukcje te są również budowane poprzez łączenie typu węzeł do węzła (Cimmino, Miranda et al. 2017; Al Sabouni-Zawadzka, Martyniuk-Sienkiewicz et al. 2023). Analogicznie do przypadku konstrukcji płytowych, konstrukcje powłokowe są głównie łączone węzeł do węzła (Falk 2006; Falk, Kirkegaard 2012; Mirzaaghazadeh, Abedi et al. 2021; Martyniuk-Sienkiewicz, Gilewski 2023). Struktury

przestrzenne modularne tensegrity to głównie metamateriały, które zazwyczaj składają się z wielu warstw konstrukcji przypominających struktury płytowe – stąd też najczęstsza forma połączenia modułów to węzeł do węzła (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski et al. 2024a).

Po przeanalizowaniu możliwości kształtowania konstrukcji tensegrity, w niniejszej pracy przyjęto podejście oparte na budowie struktur modularnych z podstawowych modułów płaskich (sześciokątnych i ośmiokątnych) oraz przestrzennych (*Simplex* czterozastrzałowy oraz rozszerzony ośmiościan (*octahedron*)). Ze względu na zakładany dwuwymiarowy układ konstrukcji zdecydowano się na połączenie typu węzeł do węzła, które umożliwia łączenie modułów w ich niezmienionej postaci. Takie rozwiązanie pozwala na naturalne dziedziczenie cech poszczególnych modułów w strukturze złożonej. Konstrukcje utworzone w opisany sposób poddano analizie w Rozdziałach 4–7.

Część II - Konstrukcje tensegrity ze szkieletem opartym na zadaniach optymalizacji topologicznej

3. Konstrukcje tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym

3.1. Struktury zdolne do adaptacji

W ostatnich latach coraz popularniejsze stały się struktury pozwalające sobie radzić ze zmiennością różnego rodzaju, w szczególności w budownictwie, które zaczyna stykać się z licznymi zmiennymi warunkami. Współczesne zmiany klimatu wpływają na tkankę miejską i wiejską, coraz więcej budynków jest przegrzanych latem, a także styka się z gwałtownymi zjawiskami: nawalnymi opadami, śnieżycami lub wichurami. Dodatkowo, miasta i wsie mierzą się ze zmiennym napływem i odpływem mieszkańców, zmianami w ich demografii, która również wymusza zmienną adaptację budynków, na przykład na danym osiedlu na początku potrzebne są przedszkola i żłobki, z czasem jednak szkoły, a później budynki o przeznaczeniu społecznym, jak biblioteki lub ośrodki kultury. Również w budynkach biurowych można spotkać ciągłe zmiany układów funkcjonalnych wynikających z potrzeb najemców. Ciągłe zmiany w otoczeniu budynków wynikają z różnych potrzeb inwestorów – budynki powinny być jak najtańsze w budowie, najlepiej dostosowane do najemców, a jednocześnie spełniające wszystkie warunki wytrzymałościowe i użytkowe. Budownictwo zaczyna wykraczać poza obszar ziemi, budowane są konstrukcje wykorzystywane w coraz bardziej ekstremalnych warunkach: głęboko pod ziemią, pod wodą albo w przestrzeni kosmicznej. W takich warunkach konstrukcje nie tylko muszą adaptować się do rozlicznych, ekstremalnych, warunków, ale również muszą być łatwe w naprawie. W wyniku tych licznych potrzeb w budownictwie pojawiły się nowe sposoby adaptacji zarówno elementów, jak i całych budynków.

Adaptację możemy podzielić na: związaną ze strukturą konstrukcji, czyli regulowanie odpowiedzi struktury na obciążenia statyczne i dynamiczne; związaną z właściwościami materiału wykorzystywanego do budowy elementów konstrukcji, jak i całej konstrukcji, czyli regulowanie na przykład przewodnością cieplną, paroprzepuszczalnością, sztywnością;

związaną z geometrią konstrukcji, czyli pojawienie się elementów, które fizycznie się poruszają, a także adaptacją przestrzeni i jej funkcji, czyli zmiennością układu funkcjonalnego.

Aktualnie, dzięki rozwojowi elektroniki oraz inteligentnych struktur, coraz więcej konstrukcji zdolnych do adaptacji jest w stanie adaptować się w czasie rzeczywistym do otaczających warunków. Przykładem mogą być fasady i powłoki budynków, których celem jest redukcja zysków ciepła latem lub doświetlenie określonych pomieszczeń (Aelenei, Aelenei et al. 2018; Güney, Arpacıoğlu 2024). Takie ruchome fasady lub żaluzje pozwalają zmniejszyć dyskomfort osób przebywających w budynku, jednocześnie często posiadają dodatkowe funkcje, jak na przykład panele fotowoltaiczne pozwalające na zasilanie tego typu układów. Innym przykładem struktur stosowanych w budownictwie energooszczędnym i pasywnym są: adaptacyjne wentylacje z elementami sterowanymi na podstawie otaczających warunków (Seuntjens, Belmans et al. 2022), dynamiczne przeszklenia, w których są stosowane materiały zmiennofazowe (Kułakowski, Krempski-Smejda et al. 2021) lub elektrochromatyczne szkło (Malekafzali Ardakan, Sok et al. 2017), a także materiały magazynujące ciepło (Dinker, Agarwal et al. 2017). Wszystkie te rozwiązania pozwalają poprawić komfort użytkowników, jak i również zmniejszają zużycie energii w budynku.

Powszechnie znanym przykładem konstrukcji adaptowalnych są również konstrukcje rozwijalne, na przykład zadaszenia stadionów, amfiteatrów lub rozwijalne mosty i kładki dla pieszych (Doroftei, Doroftei 2014; Fenci, Currie 2017). Mogą być wykorzystywane zarówno w przypadku kontroli warunków użytkowania: zasłonięcie dachu przy opadach deszczu lub zbyt intensywnym świetle lub złożenie mostu, aby rzeką mogły przepłynąć większe jednostki. Znajdziemy również liczne konstrukcje tymczasowe (pawilony ekspozycyjne, hale namiotowe, sceny), które pozwalają na szybki montaż i demontaż, a także dopasowanie do wydarzeń. Wiele z tych konstrukcji opiera się na wykorzystaniu struktur kratowych z pneumatycznymi elementami.

Znanym rozwiązaniem jest wykorzystywanie struktur adaptowalnych w przypadku ochrony sejsmicznej lub odporności na drgania (od wiatru lub transportu) (Ramesh, Anbarasan et al. 2025; Bitaraf, Hurlebaus et al. 2012). Powszechnie wykorzystywane są tłumiki energii lub systemy adaptacyjne sterowane czujnikami, których celem jest ograniczenie uszkodzeń podczas trzęsienia ziemi. Istnieją również rozbudowane systemy redukcji drgań składające się

z tłumików (masowych lub lepko-sprężystych), a także systemy aktywne redukujące drgania i pozwalające na poprawę bezpieczeństwa i komfortu użytkowników. Wśród zastosowań znajdziemy również bariery energochłonne, które mogą być wykonane z materiałów pozwalających na dyssypację energii lub samą swoją konstrukcją pozwalają na jej zmagazynowanie.

Ostatnim przykładem są obiekty, które znajdują się w trudnych warunkach, na przykład klimatycznych lub wykorzystywane w przestrzeni kosmicznej (Paul, Sychterz 2022; Shang, Li et al. 2025). Wymagania bezpieczeństwa dotyczące tych konstrukcji są bardzo wysokie, jednocześnie jednak przewymiarowanie tego typu konstrukcji może negatywnie wpłynąć na ich użytkowanie. Konstrukcje takie nie tylko muszą być w stanie zmierzyć się z ekstremalnymi temperaturami lub obciążeniami na przykład od śniegu i lodu, ale również muszą pozwalać na odłożenie procesu naprawy konstrukcji lub muszą posiadać zdolność samonaprawy. Dodatkowo, tego typu struktury są też często wykorzystywane w przypadku remontów i adaptacji istniejących budynków (Manewa, Siriwardena et al. 2016; Askar, Bragança et al. 2021).

Typowe technologie wykorzystywane w przypadku takich rozwiązań opierają się bardzo często na rozbudowanych systemach czujników opartych na IoT (*Internet of Things*, internet rzeczy), które porozumiewają się z licznymi systemami silników oraz siłowników. Całość często jest sterowana za pomocą określonych algorytmów, opartych na uczeniu maszynowym (Zhang, Wang et al. 2023). Często jednak takie rozwiązania są również oparte o inteligentne materiały i struktury, które nie wymagają systemu sterującego i samodzielnie dostosowują się do licznych warunków. Przykładem takich materiałów mogą być stopy z pamięcią kształtu lub elektrochromatyczne szkło, zaś w przypadku struktur najpopularniejszym przykładem są struktury tensegrity.

3.2. Tensegrity – struktury inteligentne

Jednymi z najpopularniejszych typów konstrukcji, które sprawdzają się w adaptowalnych strukturach są tensegrity. Są one określane mianem struktur inteligentnych, które za pomocą wewnętrznych własności są w stanie zaadaptować się do otaczających warunków. Posiadają one wyjątkowe cechy, które pozwalają na sterowanie ich własnościami bez zewnętrznej

ingerencji. Tymi cechami są: samo-sterowanie, samo-diagnoza, samo-naprawa oraz aktywna kontrola (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2018b).

O samo-sterowaniu mówimy w przypadku samoistnego usztywnienia struktury tensegrity pod wpływem zewnętrznego obciążenia, które działa w takim przypadku jak dodatkowe samonaprężenie powodujące wzrost sztywności. Obciążenie takie powoduje przemieszczenie zgodne z postacią mechanizmu infinitezymalnego, a tym samym likwiduje osobliwość zadania. Samo-diagnoza odnosi się do możliwości identyfikacji uszkodzeń w elementach konstrukcji. Takie awarie są zauważalne od razu w konstrukcji ze względu na rekonfigurację układu sił sprężających strukturę wynikającą ze zmiany budowy konstrukcji. Możliwe jest zlokalizowanie takiego uszkodzenia poprzez pomiar sił wewnętrznych w elementach konstrukcji. Samo-naprawa związana jest z samo-diagnozą konstrukcji tensegrity – zniszczenie pojedynczego elementu w konstrukcji (a nawet modułu w konstrukcji wielomodularnej) nie powoduje zniszczenia całej struktury, zaś sterowanie samorównoważnym układem sił pozwala na przywrócenie układu do stanu sprzed awarii bez konieczności naprawy uszkodzonego elementu. Aktywna kontrola odnosi się do samo-regulacji konstrukcji wynikającej z wstępnego sprężenia struktury. Cecha ta pozwala na regulację własności tensegrity zarówno w całej konstrukcji, jak i wybranych fragmentów struktury (jak na przykład pojedynczych modułów **wprzypadku** struktury modularnej) poprzez zmianę wartości lub układu sił wstępnego sprężenia. Cechy immamentne tensegrity są w nich zauważalne niezależnie od rozmiaru modułów budujących konstrukcję oraz materiału, z którego są wykonane. Jak wcześniej wspomniano w Rozdziale 2, struktury tensegrity mogą być wykorzystywane zarówno w skali makro, jak i mikro, w obu z nich zachowują istotne cechy adaptacji.

Dzięki inteligencji struktur tensegrity sterowanie ich własnościami nie zachodzi czysto poprzez aktywne lub uczące się systemy sterowania, które posiadają mechanizmy zwrotne, a poprzez zmianę poszczególnych elementów lub cech struktury (tensegrity pasywne). Przykładem takich zmian może być regulacja sztywności konstrukcji tensegrity poprzez zmianę geometrii prętów, na przykład stosunku przekrojów cięgien i zastrzałów jak zostało wykorzystane w niniejszej pracy. Innym sposobem związanym ze sterowaniem właściwościami tensegrity jest zmiana wartości sił wstępnego sprężenia pozwalająca na zmianę sztywności konstrukcji lub jej elementów, która również jest wykorzystana w niniejszej pracy. Zmiana wartości sił

sprężających może być uzyskana przez zmianę długości zastrzałów (pneumatyczne pręty) lub zmianę długości cięgien (z wykorzystaniem siłowników). Analogiczne podejście jest wykorzystywane w przypadku rozwijalnych struktur tensegrity (Al Sabouni-Zawadzka 2014).

3.3. Optymalizacja topologiczna

Optymalizacja, jak przekazuje Słownik Języka Polskiego, to: „poszukiwanie za pomocą metod matematycznych najlepszego, ze względu na wybrane kryterium, rozwiązania danego zagadnienia gospodarczego, przy uwzględnieniu określonych ograniczeń" (SJP PWN brak daty). Optymalizacja jest zatem idealną odpowiedzią na aktualne potrzeby dręczące wiele dyscyplin i branży – poszukiwanie balansu pomiędzy największą możliwą efektywnością sprzętu, elementów lub procesów a kosztami produkcji, transportu, montażu lub kosztami operacyjnymi. W dyscyplinach technicznych, od dziesiątek lat jednym z najsilniej rozwijających się obszarów naukowych jest optymalizacja strukturalna, której celem jest poszukiwanie elementów, które przeniosą możliwie największe obciążenie przy wykorzystaniu najmniejszej możliwej ilości materiału – będą w stanie wykazywać „najlepsze zachowanie" (Christensen, Klarbring 2008). Rozwój tego obszaru szczególnie przyspieszył wraz z postępem obecnym w mocy obliczeniowej komputerów, stworzeniu nowych algorytmów i sposobów modelowania struktur (Haftka, Gürdal 1992).

Zadanie optymalizacji strukturalnej zawsze zawiera podstawowe elementy: zmienną projektową/decyzyjną (*design variables*), zmienną (wektor) stanu (*state variable*), funkcję celu (*objective function*) oraz ograniczenia nałożone na nie (*constraints*), które budują podstawową formę zadania optymalizacji jak poniżej (Christensen, Klarbring 2008):

$$(\mathbb{OS}) \begin{cases} \text{zminimalizuj funkcję } f(x,y) \text{ względem } x \text{ oraz } y \\ \text{przy ograniczeniach} \begin{cases} \text{ograniczenia dotyczące odpowiedzi } y \\ \text{ograniczenia projektowe względem } x \\ \text{warunek równowagi} \end{cases} \end{cases}, \tag{3.1}$$

gdzie:

$f(x,y)$ – funkcja celu,

x – zmienna projektowa,

y – zmienna stanu.

Funkcja celu $f(x, y)$ przekazuje informację o efektywności i jakości danego zadania w postaci liczby. Zwykle zakłada się zadanie minimalizacji, zatem wartość f dobierana jest tak, aby była jak najmniejsza. Funkcja ta może mierzyć przemieszczenia w danym kierunku, masę, częstość drgań własnych, siłę krytyczną, naprężenia efektywne, a także koszt. Zazwyczaj wyznacza się jedną funkcję celu, ponieważ praca z wieloma z nich może skomplikować w znaczny sposób zadanie – dokonuje się tego poprzez połączenie kilku funkcji celu w jedną lub poprzez wybranie najbardziej istotnej funkcji i nałożenie ograniczeń na pozostałe z nich (Christensen, Klarbring 2008; Haftka, Gürdal 1992).

Funkcję lub wektor opisujący zmienną (element) podlegający zmianie podczas optymalizacji nazywamy zmienną projektową x. Może ona reprezentować na przykład geometrię struktury (od przekrojów lub grubości po cały kształt) lub wybór materiału i jego właściwości. Potencjał zmian, których możemy dokonać w zmiennej projektowej jest zazwyczaj wyrażany w kategoriach zakresów dopuszczalnych zmian grupy parametrów. Zmienne projektowe mogą przyjmować wartości ciągłe (wtedy mają zakres zmienności, w którym mogą przyjmować dowolną wartość) lub dyskretne (mogą przyjmować tylko wartości izolowane, zazwyczaj z listy dopuszczalnych wartości). Przykładem zmiennej, która może być zarówno dyskretna, jak i ciągła, są przekroje elementów. Podejście jest zależne od wyboru projektanta – może on poszukiwać konkretnych przekrojów dostępnych na rynku (zmienna dyskretna) lub przeszukiwać wszystkie możliwe wartości (zmienna ciągła) i później dobierać producenta (Christensen, Klarbring 2008; Haftka, Gürdal 1992).

Zmienna stanu y jest zazwyczaj wektorem lub funkcją reprezentującą odpowiedź konstrukcji na zadane zmienne projektowe x. W przypadku konstrukcji mogą być to przemieszczenia, naprężenia, odkształcenia lub siły (Christensen, Klarbring 2008).

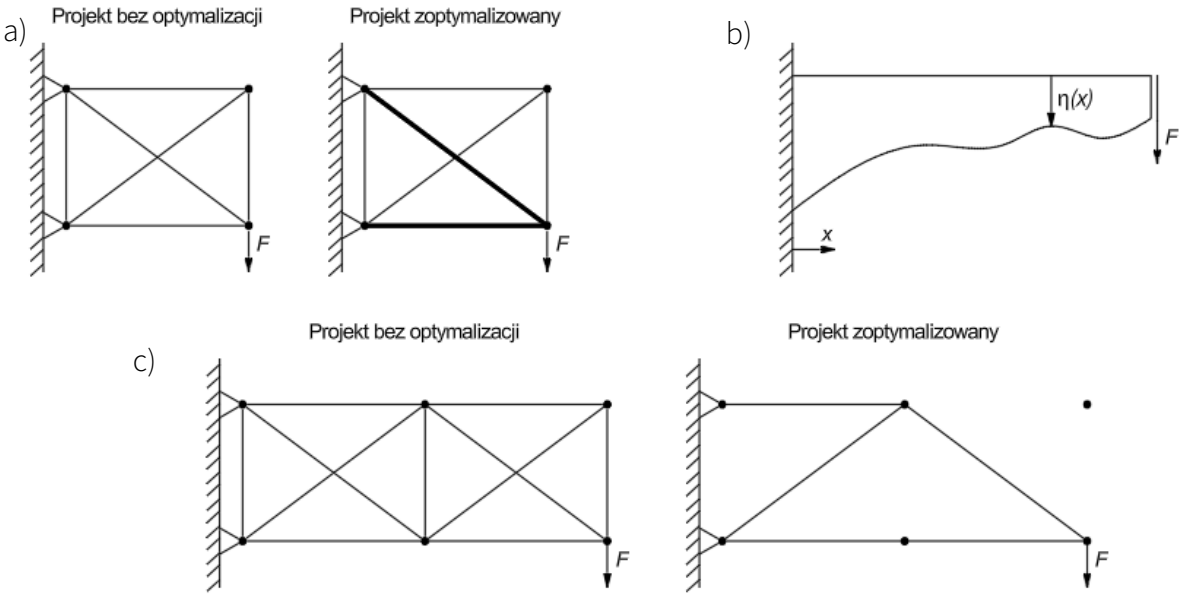
Zadanie optymalizacji strukturalnej zawiera również ograniczenia nałożone na zmienne projektowe oraz zmienne stanu – ograniczenia mogą być nałożone oddzielnie na poszczególne zmienne lub mogą je w sobie łączyć. Ograniczenia mogą mieć charakter nierównościowy przedstawiający pewien zakres, w którym wykonujemy zadanie – przykładem może być ograniczenie wartości naprężeń w elementach lub wartości przemieszczeń. Czasem również przyjmuje się ograniczenia równościowe – są nimi ograniczenia dotyczące na przykład warunku równowagi konstrukcji(Haftka, Gürdal 1992).

Klasycznym podziałem optymalizacji strukturalnej jest podział ze względu na to jakie cechy geometryczne reprezentuje zmienna projektowa $\boldsymbol{x}$. Rozróżniamy trzy rodzaje optymalizacji – optymalizacja kształtu, optymalizacja rozmiaru oraz optymalizacja topologiczna. W przypadku optymalizacji rozmiaru zazwyczaj zmienna projektowa opisuje pewien rodzaj grubości elementu – może być to na przykład przekrój pręta lub grubość płyty, a także liczba warstw drewna klejonego. Optymalny rozkład grubości minimalizuje wielkość fizyczną, taką jak średnia podatność (praca zewnętrzna), maksymalne naprężenie, ugięcie, przy spełnieniu zadanych ograniczeń i warunków. W wyniku zadania optymalizacji rozmiaru kształt i topologia struktury pozostaje taka sama, zmianie natomiast ulega geometria związana z grubością elementu, tak jak przedstawiono to na Rys. 3.1a (Christensen, Klarbring 2008). Dziedzina (obszar elementu) i zmienne stanu są znane a priori i pozostają niezmienne w trakcie procesu optymalizacji. W praktyce ten rodzaj optymalizacji jest najczęściej wykorzystywaną i jedną z podstawowych metod optymalizacji konstrukcji ze względu na prostotę algorytmów, niewielkie obciążenie obliczeniowe i łatwość wpisania jej w wymagania normowe, w szczególności w budownictwie.

W przypadku optymalizacji kształtu zmienna projektowa $\boldsymbol{x}$ opisuje kształt lub kontur struktury (dziedzinę obliczeniową konstrukcji, obszar projektowy). Celem jest znalezienie optymalnego kształtu tej dziedziny, co oznacza, że zadanie zdefiniowane jest na obszarze, który sam w sobie stanowi zmienną projektową. W wyniku optymalizacji kształtu nie zmienia się spójność struktury, nie powstaje nowa topologia – brak nowych granic lub otworów. Przykład optymalizacji kształtu dla belki dwuwymiarowej przedstawiony jest na Rys. 3.1b (Christensen, Klarbring 2008). Optymalizacja kształtu jest rzadziej wykorzystywaną metodą, chociaż jest spotykana w literaturze na przykład w przypadku ramowych konstrukcji cienkościennych, płytowych i powłokowych.

Optymalizacja topologiczna jest natomiast najogólniejszą formą optymalizacji strukturalnej. W jej przypadku pracujemy z topologią konstrukcji poprzez ustalanie wartości grubości elementu w danym obszarze, a zatem rozkładu materiału znajdującego się w nim. Optymalizacja ta polega na wyznaczeniu takich cech, jak liczba, lokalizacja i kształt otworów oraz łączność (spójność) obszaru projektowego. Odpowiada ona na pytanie: jak rozmieścić materiał w obrębie danego obszaru, aby najskuteczniej przenieść obciążenie. W przypadku kratownicy optymalizacja topologiczna może prowadzić do usuwania części prętów poprzez

przyjęcie pól przekrojów prętów jako zerowych (Rys. 3.1c). W przypadku dwuwymiarowym możemy na przykład określać w ten sposób grubość blachy, a trójwymiarowym na przykład gęstość materiału (Christensen, Klarbring 2008).



*Rysunek 3.1 Trzy rodzaje optymalizacji strukturalnej: a) optymalizacja rozmiaru: optymalizacja przekrojów prętów kratownicy, b) optymalizacja kształtu: poszukiwanie funkcji kształtu **η**(x) opisująca kształt belki, c) optymalizacja topologiczna: usunięcie części prętów kratownicy poprzez przyjęcie zerowej wartości przekrojów prętów. Rysunek wykonany na podstawie(Christensen, Klarbring 2008).*

W przypadku wykorzystania materiału izotropowego zadanie optymalizacji topologicznej jest znane już od kilku dekad. W zagadnieniu tym topologia, kształt i wymiary konstrukcji są reprezentowane przez zbiór funkcji rozłożonych w przestrzeni – stanowią parametryzację tensora sztywności ośrodka ciągłego. Zadanie optymalizacji jest sformułowane wtedy jako problem rozkładu materiału – z punktu widzenia obliczeń jest to zadanie wielkoskalowe, które posiada wiele zmiennych stanu, jak i projektowych. Pierwsze rozwiązania tego typu zadań opierały się na najprostszym typie sformułowania problemu projektowego, a zatem na projektowaniu pod kątem maksymalnej globalnej sztywności (czyli minimalnej podatności) (Bendsoe, Sigmund 2013).

W celu zaprojektowania zadania optymalizacji topologicznej jest określenie punktów w przestrzeni – wyznaczenie czy mają być one punktami materiałowymi, czy pustkami (bez materiału). W formie geometrycznej, na obrazie, przedstawia się to w postaci obszarów zamalowanych (z materiałem) oraz obszarów niezamalowanych (na przykład białych, jak na Rys. 3.2b).

Rysunek 3.2 Przykładowy wynik optymalizacji topologicznej w przypadku wspornika obciążonego pojedynczą siłą: a) schemat statyczny, b) wynik optymalizacji topologicznej z oznaczonymi na czarno obszarami wypełnionymi materiałem, na biało: obszary pustki, na czarno: obrys obszaru (opracowanie własne).

Istnieje wiele sposobów rozwiązania zadania optymalizacji topologicznej, zazwyczaj sprowadza się ono do zastąpienia zmiennych dyskretnych, zmiennymi ciągłymi i wprowadzeniem kary, która ogranicza rozwiązanie do wartości 0-1. Jednym z najbardziej popularnych rozwiązań jest metoda SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) (Bendsøe 1989). Przekształca ono problem całkowitoliczbowy w zadanie typu poszukiwanie rozmiaru (*sizing*), które zazwyczaj prowadzi do rozwiązań, które z praktycznego punktu widzenia można uznać za projekty 0–1 (Bendsoe, Sigmund 2013).

Wśród metod wykorzystywanych w optymalizacji topologicznej znajdziemy poza najpopularniejszą metodą SIMP (Bendsøe 1989; Zhou, Rozvany 1991; Mlejnek 1992), również m.in.: metodę opartą o continuum nazwaną ESO (*Evolutionary Structural Optimization*)(Xie, Steven 1993) oraz rozwinięcie tej metody - BESO (dwukierunkowa metoda ESO, *Bi-directional ESO*) (Xiong, Zhao et al. 2023), metodę pochodnej topologicznej (*topological dervative*) (Sokolowski, Zochowski 1999), metodę zbiorów poziomicowych (*level set method*) (Allaire, Jouve et al. 2002), metodę opartą o naprężenia (Yang, Chen 1996), a także integrację analizy niezawodności z zadaniami optymalizacji topologii - optymalizacja topologii oparta na niezawodności (RBTO, *Reliability-Based Topology Optimization*) (Kharmanda, Olhoff et al. 2004). Znana jest również metoda GSM (*Ground Structure Method*), w której topologia konstrukcji określana jest przez kratownicę (a dokładniej sieć prętów) z góry zdefiniowaną na pewnym zbiorze węzłów. Celem zadania optymalizacji jest usunięcie zbędnych prętów oraz ustalenie przekrojów prętów, które pozostają w docelowej konstrukcji. Rozwinięciem tej metody jest GGSM (*Growing Ground Structure Method*), w której początkowa struktura bazowa nie musi być gęsta, ponieważ konstrukcja jest optymalizowana w taki sposób, aby lepsze rozwiązanie można było uzyskać poprzez efektywną modyfikację struktury bazowej na podstawie wyników optymalizacji otrzymanych po zastosowaniu GSM (Hagishita, Ohsaki 2009). Metoda ta jest głównie wykorzystywana w optymalizacji kratownic, ale także struktur

tensegrity (Tibert, Pellegrino 2003; Xu, Wang et al. 2016; Liu, Paulino 2019) i metamateriałów (Li, Luo et al. 2021). Intensywny rozwój uczenia maszynowego, sieci neuronowych oraz głębokich sieci neuronowych wpłynął również na algorytmy wykorzystywane w optymalizacji topologicznej (Wang, Panesar 2022; Yan, Zhang et al. 2022; Woldseth, Aage et al. 2022).

Swoje początki optymalizacja topologiczna odnajduje w procesie projektowania układów kratownicowych i ramowych, gdzie pierwsze prace dotyczyły minimalizacji ich objętości. Pierwsze optymalne rozwiązanie zostało opracowane przez Maxwella, a następnie rozwinięte przez Mitchella. Konstrukcje te były potem rozwijane przez Kozlowskiego i Mroza, aż ponownie wybuchły w ostatnich dekadach XX wieku (Logo, Ismail 2020). Rozwiązania związane z kratownicami Mitchella są do dzisiaj poruszane, m.in. w (Lewiński, Sokół et al. 2018). Z czasem coraz bardziej istotnym obszarem stały się analizy związane z optymalizacją topologiczną płyt i powłok (Belblidia, Lee et al. 2001; Ansola, Canales et al. 2002).

Optymalizację topologiczną wykorzystuje się również do projektowania konstrukcji poddanej wielu przypadkom obciążeń, czyli rozpatrywanie sytuacji, kiedy konstrukcja może przyjmować różne zestawy obciążeń w różnym czasie. Jest to zgodne z tym co możemy zauważyć w codziennym życiu, kiedy na konstrukcje przychodzą czasowo zmienne obciążenia jak na przykład obciążenia atmosferyczne (śnieg, wiatr) oraz obciążenia tłumem (w przypadku budynków publicznych otwartych w określonych godzinach w ciągu dnia). Jednak problem optymalizacji topologicznej przy wielu przypadkach obciążenia jest trudniejszy do rozwiązania niż przy pojedynczym przypadku, ponieważ wymaga zrównoważenia wielu ścieżek przepływu sił. Poszukiwanie optymalnej odpowiedzi konstrukcji dla takich sytuacji można zauważyć w literaturze już od wczesnych lat dwutysięcznych, wraz z falą badań, których celem było wprowadzenie optymalizacji topologicznej do rozwiązań przemysłowych. W większości publikacji dotyczących obciążania konstrukcji wieloma przypadkami obciążeń wyniki są rozpatrywane na podstawowych zadaniach takich jak na przykład wspornika obciążonego na końcu długości oraz belek swobodnie podartych obciążonych siłami na rozpiętości konstrukcji (belka Messerschmitt–Bölkow–Blohm (MBB)). Rozpatrywane były przypadki optymalizacji topologicznej konstrukcji ramowych w oparciu o *metodę Independent Continuous Mapping* (ICM) (Sui, Du et al. 2006), konstrukcji kratownicowych, w których początkowa dziedzina projektowa to ośrodek ciągły kompozytowy anizotropowy składający się z włókien

imitujących elementy kratownicowe (Zhou, Li 2008), a także ustrojów płytowych (Lógó, Balogh et al. 2018). Do poszukiwania rozwiązań stosowano podstawową metodę SIMP w połączeniu z dziewięciowęzłowymi elementami skończonymi (James, Hansen et al. 2009) lub metodę bez elementową Galerkina (EFG, *Element-free Galerkin*) z uwzględnieniem ograniczeń naprężeniowych (Gong, Du et al. 2010). Zakładano ten typ zadania jako problem optymalizacji wielokryterialnej, w której optymalizowany jest adaptacyjny iloczyn podatność–objętość (Li, Gao et al. 2014), a także jako problem optymalizacji wielokryterialnej z wykorzystaniem metody pochodnej topologicznej (Lopes, Santos et al. 2015). Można również spotkać badania podejmujące zagadnienie jako problem optymalizacji wielokryterialnej, rozwiązywany metodą sumy ważonej z uwzględnieniem stopnia „dotkliwości" (*severity degree*) przypadku obciążenia (Li, Yang et al. 2020), podejście za pomocą zmodyfikowanej metody SIMP z metodą SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) (Li, Guan et al. 2020), a także wykorzystanie wielu ścieżek naprężeń w celu zaprojektowania konstrukcji optymalnej topologicznie (Kranz, Lüdeker et al. 2021). Przedstawiono także rozszerzenie metody dehomogenizacji służącej do otrzymywania bliskich optimum topologii 2D, zoptymalizowanych pod kątem minimalnej podatności przy wielu przypadkach obciążenia (Jensen, Sigmund et al. 2022). Wraz z rozwojem tej dziedziny pojawiają się rozwiązania coraz wierniej odzwierciedlające typowe zagadnienia znane w inżynierii lądowej – możemy spotkać się z analizami niepewności w procesie projektowania konstrukcji, rozpatrujących przypadek niepewności położenia obciążeń, wynikających z ograniczonej wiedzy o rzeczywistych warunkach obciążenia, gdy rozważa się wiele przypadków obciążeń (Wang, Gao 2020). W kolejnej pracy (Rutsch, Fina et al. 2025) przedstawiono podejście do optymalizacji topologicznej konstrukcji z uwzględnieniem ograniczeń naprężeń i przemieszczeń przy różnych przypadkach obciążenia. Pojawia się również podejście do optymalizacji topologicznej przy wielu przypadkach obciążenia dla zagadnienia przewodzenia ciepła (Zhuang, Xiong et al. 2007). W każdej z tych prac wykazano, że przy porównaniu wyników optymalizacji dla wielu przypadków obciążenia z wynikami dla pojedynczego przypadku obciążenia, końcowa topologia optymalna przy wielu obciążeniach nie jest prostą sumą rozwiązań optymalnych dla poszczególnych obciążeń, lecz odpowiada najlepszym ścieżkom przenoszenia sił. Należy zwrócić uwagę, że struktura stworzona w procesie optymalizacji topologicznej jest „złotym środkiem" – kompromisem – pomiędzy wieloma różnymi przypadkami obciążeń, nie zaś optymalną odpowiedzią na każde z nich –

nie da się poprawić jednego przypadku, nie pogarszając przynajmniej jednego innego (przy zadanej definicji celu). Ponadto obciążenia te muszą być do siebie zbliżone w układzie, aby uzyskać odpowiednio zadowalające wyniki struktury niemal optymalnej dla każdego przypadku, ponieważ istnieje pewna odległość pomiędzy wynikiem optymalizacji a rozwiązaniem idealnym dla każdego z tych przypadków.

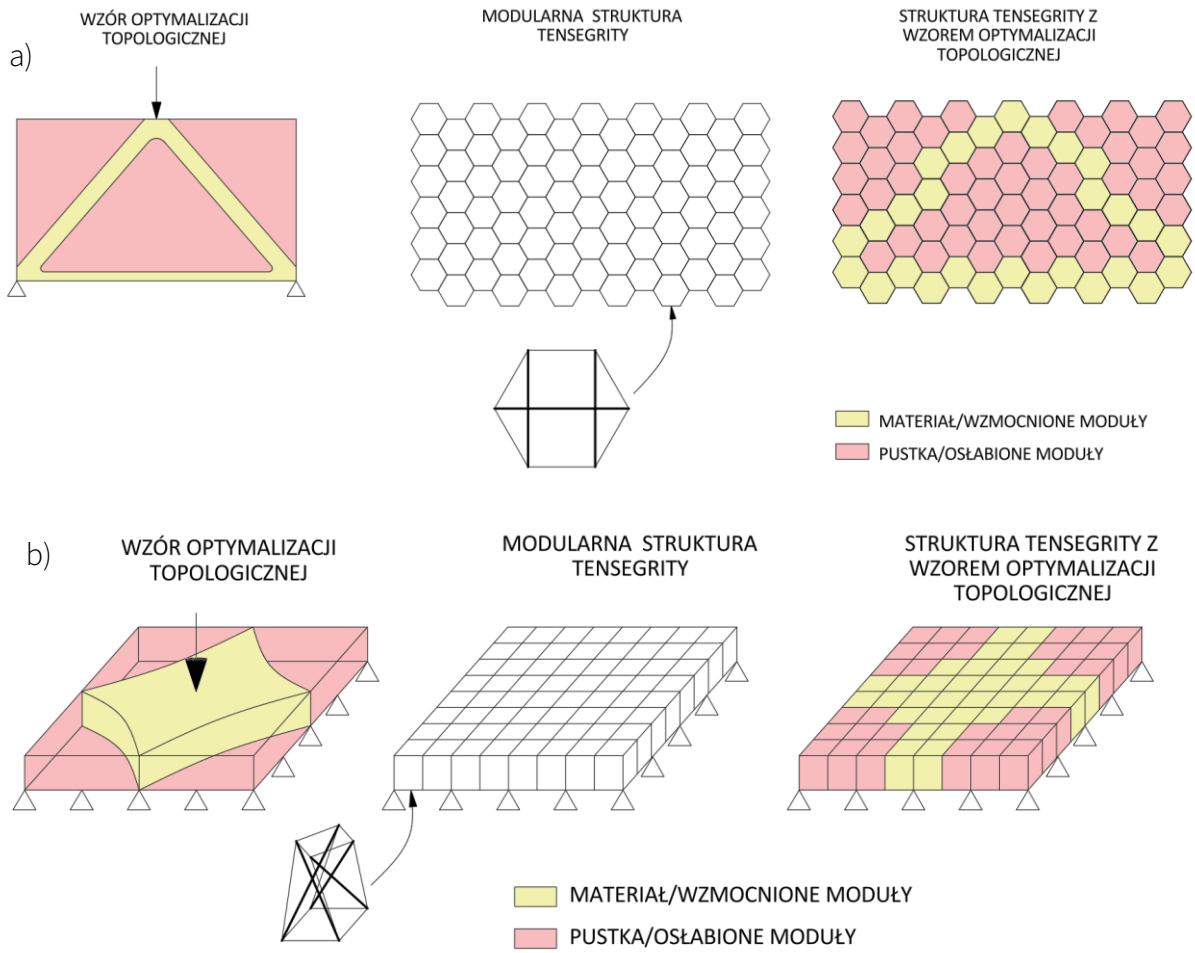
Powyższe rozważania pozwalają wskazać lukę badawczą w zakresie projektowania konstrukcji zdolnych do adaptacji do zmiennych warunków pracy. Sama optymalizacja topologiczna, prowadzona dla określonego przypadku obciążenia, nie umożliwia uzyskania rozwiązania optymalnego dla wszystkich możliwych konfiguracji obciążeń i warunków brzegowych. W związku z tym w niniejszej pracy podjęto próbę analizy możliwości opracowania struktury adaptowalnej, której odpowiedź mechaniczna mogłaby być dostosowywana do różnych scenariuszy obciążenia. Koncepcja ta opiera się na wprowadzeniu inteligentnego szkieletu wewnętrznego, inspirowanego wynikami optymalizacji topologicznej, który pozwalałby na bardziej efektywne kształtowanie pracy konstrukcji w zależności od aktualnych wymagań. Szczegółowy opis zaproponowanego rozwiązania przedstawiono w kolejnym rozdziale.

3.4. Szkielet oparty na wynikach optymalizacji a optymalizacja topologiczna tensegrity

Optymalizacja topologiczna jest wykorzystywana również w przypadku struktur tensegrity, w procesie analogicznym do poszukiwania kształtu (*form-finding*). Różnica pomiędzy tymi dwoma podejściami zawiera się w początkowych danych oraz celu działania. W przypadku poszukiwania kształtu wyznaczana jest geometria dla zadanej topologii, natomiast w przypadku optymalizacji topologicznej określane są układy połączeń oraz typy elementów (topologia), wraz z decyzją, które z nich powinny zostać wprowadzone (Haftka, Gürdal 1992; Christensen, Klarbring 2008). Wykorzystanie optymalizacji topologicznej nie wymaga zatem znajomości połączeń między cięgnami i prętami jako danych wejściowych. Ostatecznym wynikiem obu podejść jest znalezienie konstrukcji spełniającej warunki i założenia struktur tensegrity, jednak w przypadku dodatkowej optymalizacji topologicznej poszukiwana konstrukcja (jej kształt, topologia) musi spełniać pewne dodatkowe założenia, tj.: minimalna długość wybranych prętów (zazwyczaj cięgien) lub minimalizacja masy konstrukcji, a także, co istotne, musi odpowiadać w sposób optymalny dla jednego założonego obciążenia.

Optymalizacja topologiczna jest tutaj stosowana jako metoda poszukiwania topologii tensegrity o określonych cechach i wydajności konstrukcji (odpowiedzi na obciążenie). W przypadku poszukiwania kształtu nie zawsze obciążenie decyduje o ostatecznym kształcie konstrukcji.

W niniejszej pracy zdecydowano się na odmienne podejście do budowy struktur tensegrity z wykorzystaniem optymalizacji topologicznej. Jak wcześniej wspomniano, w przypadku optymalizacji topologicznej odpowiedz konstrukcji jest dostosowana tylko do jednego przypadku obciążeń. W celu zwiększenia adaptowalności struktur tensegrity zaproponowano wykorzystanie ich modularności oraz możliwości sterowania własnościami mechanicznymi tych układów prętowych za pomocą geometrii oraz wstępnego sprężenia w postaci wzmacniania struktur szkieletami inspirowanymi wynikami optymalizacji topologicznej. Rozwiązanie to opiera się na bieżącym dostosowywaniu się do otaczających warunków, poprzez adaptacyjne wprowadzanie wzmocnionego szkieletu do modularnej struktury tensegrity. Rozwiązania uzyskane w wyniku optymalizacji topologicznej dla różnych przypadków (na przykład wymiarów, podpór, warunków obciążenia) są integrowane ze strukturą poprzez wzmacnianie wybranych modułów (odtwarzających obszary materiałowe z wyników optymalizacji topologicznej) lub osłabianie wybranych modułów (wprowadzających obszary pustki z wyników optymalizacji topologicznej). Takie rozwiązanie pozwala strukturze tensegrity skuteczniej reagować na różne typy obciążeń oraz dostosowywać się do zmiennych warunków pracy. Sztywność szkieletu może być dostosowywana do zmiennych obciążeń (które w praktyce powinny być ograniczone do 2–3 przypadków). Zakres wzmacniania lub osłabiania modułów jest determinowany przez warunki stateczności — globalna macierz sztywności musi być dodatnio określona.



Rysunek 3.3 Koncepcja inteligentnego, adaptacyjnego wzmacniania struktury tensegrity dla: a) struktury zbudowanej z modułów płaskich (stosowanych w modelowaniu struktur typu tarczowego), b) struktury składającej się z jednej warstwy modułów przestrzennych tensegrity (modelowanie struktur typu płytowego) (opracowanie własne).

Rysunek 3.3 przedstawia koncepcję inteligentnego, adaptacyjnego wzmacniania struktury tensegrity dla konstrukcji składających się z jednej warstwy modułów przestrzennych tensegrity (do modelowania struktur typu płytowego) oraz konstrukcji zbudowanej z modułów płaskich (stosowanych w modelowaniu struktur typu tarczowego). W pierwszym kroku wybierana jest konstrukcja (na przykład płyta w pierwszym przypadku albo belka w drugim). Dla wybranej konstrukcji o określonych wymiarach wyznacza się kilka przypadków obciążenia i przeprowadza optymalizację topologiczną takich konstrukcji. Wynikiem tego procesu jest określenie obszarów materiału (żółtych) oraz obszarów pustki (różowych) w wyznaczonym obszarze — etap ten pokazano w pierwszej kolumnie rysunku („Wzór optymalizacji topologicznej"). W drugim kroku (druga kolumna: „Modularna struktura tensegrity") generowana jest modularna konstrukcja tensegrity z wybranych modułów (pokazane na rysunku moduły mają charakter ilustracyjny). Struktura ta ma takie same wymiary i warunki

brzegowe jak obszar zoptymalizowany topologicznie. W ostatnim kroku (trzecia kolumna: „Struktura tensegrity z wzorem optymalizacji topologicznej") wzorzec uzyskany w procesie optymalizacji topologicznej zostaje zastosowany do modułowej struktury tensegrity. Moduły odpowiadające obszarom materiałowym są wzmacniane, a moduły odpowiadające obszarom pustki są osłabiane lub pozostają wzmocnione na poziomie podstawowym.

Szkielet, którym wzmacniamy (lub osłabiamy) strukturę składa się z zestawów modułów, które są wzmacniane (lub osłabiane) za pomocą zmiany pola powierzchni przekrojów (wykorzystanie parametrów $\boldsymbol{k, m}$) lub za pomocą zmiany wartości self-stressu w wybranych modułach (parametr $\boldsymbol{\sigma}$). Wybór poszczególnych modułów odbywa się na podstawie nałożenia wzoru (kształtu) znanego jako rozwiązanie optymalizacji topologicznej dla wybranego przypadku obciążenia. Ze względu na możliwość zmiany wartości siły sprężającej w strukturach tensegrity rozwiązanie to pozwala zwiększyć adaptowalną odpowiedź konstrukcji na otaczające warunki. Analizy w niniejszym rozdziale koncentrują się na konstrukcjach wielkoskalowych, które mogą znaleźć zastosowanie w rozwiązaniach inżynierii lądowej, zaś w Rozdziale 7 koncentrują się na rozwiązaniach w skali materiałowej. Podejście to umożliwia adaptacyjne reagowanie na zestawy przypadków obciążenia i zakłada wykorzystanie wyników optymalizacji topologicznej jedynie na etapie analizy, a nie bezpośrednią optymalizację struktur tensegrity za pomocą algorytmu optymalizacji topologicznej. Według najlepszej wiedzy autorki zastosowanie wzorców optymalizacji topologicznej w proponowany sposób do struktur tensegrity nie było dotąd szeroko badane, a koncepcja ta w literaturze została pierwszy raz opisana w (Al Sabouni-Zawadzka, Martyniuk-Sienkiewicz et al. 2023).

Początkiem wykorzystania optymalizacji topologicznej struktur tensegrity jest praca z 2010 roku autorstwa Shintaro Ehara i Yoshihiro Kanno (Ehara, Kanno 2010), w której połączono poszukiwanie kształtu z optymalizacją topologiczną poprzez zastosowanie metody struktury bazowej (*Ground Structure Method*) z rozwiązaniem za pomocą programowania mieszanego całkowitoliczbowego (MIP, *Mixed Integer Programming*), które pozwala uwzględnić warunek nieciągłości prętów ściskanych. W pracy przygotowano rozwiązania, których celem było znalezienie topologii konstrukcji prętowej, w której maksymalizowano liczbę prętów ściskanych przy jednoczesnym spełnieniu warunku samorównowagi sił osiowych oraz warunku nieciągłości elementów ściskanych. W pracy z 2011 roku Yoshihiro Kanno zmienia w niewielkim

stopniu wcześniejsze podejście i wykorzystuje mieszane liniowe programowanie całkowitoliczbowego (MILP, *Mixed Integer Linear Programming*) (Kanno 2013a). W tym podejściu skupiono się na uwzględnieniu ograniczenia podatności oraz ograniczeń naprężeniowych. W 2012 roku metoda ta została sprawdzona w przypadku obciążenia ciężarem własnym wprowadzanego poprzez ograniczenia wartości sił sprężających w prętach oraz naprężeń w prętach w przypadku obciążenia ciężarem własnym (Kanno 2012). W 2013 roku udowodniono, że powyższa metoda pozwala wygenerować różne struktury tensegrity z jednej struktury początkowej przy użyciu trzech zmiennych parametrów (Kanno 2013b, 2013c). Analizy z wykorzystaniem tej metody były rozszerzane w kolejnych latach o możliwość wykonania konstrukcji o większej liczbie prętów ściskanych w węźle (odejście od warunku czystego tensegrity) oraz pracę z funkcjami celu w postaci kwadratowej (Xu, Wang et al. 2016).

Wraz ze zwiększeniem zainteresowania optymalizacją topologiczną konstrukcji tensegrity, pojawił się nowy dodatek do istniejącej metody w postaci uwzględnienia bardziej praktycznego zagadnienia, takie jak nakładanie się prętów, wyboczenie zastrzałów, ograniczenia przemieszczeń oraz wiele przypadków obciążeniowych (Xu, Wang et al. 2018). Praca ta jako jedyna zwraca uwagę na sytuację optymalizacji do wielu przypadków obciążenia – analiza takiego przypadku jest wykonywana dla wspornika i dwóch przypadków obciążenia. Uzyskane rozwiązanie jest analogiczne do wielu przypadków optymalizacji topologicznych innych konstrukcji – struktura jest optymalna jednocześnie dla dwóch przypadków, nie zaś dla każdego z nich oddzielnie.

Z czasem powstały algorytmy, które pozwalały na zaprojektowanie konstrukcji tensegrity z wykorzystaniem połączenia struktury bazowej poprzez maksymalizację sił przy użyciu MILP, a następnie wykonanie prototypów z wykorzystaniem wytwarzania przyrostowego (Liu, Paulino 2019). W tym podejściu metoda poszukuje topologii struktury tensegrity mieszczącej się w zadanej geometrii, gdzie wprowadzane są obszary bez materiału (obszary pasywne), wprowadzono obszary z ograniczeniami (*restricted zones*), w których nie powinny znaleźć się pręty. W pracy (Xu, Huang et al. 2022) zastosowano metodę niezależnego odwzorowania ciągłego (ICM, *Independent Continuous Mapping*). Metoda ta pomaga, z zauważoną już przez Kanno, niestabilnością wyników w przypadku struktur o dużych rozmiarach.

Poza optymalizacją topologiczną czystych tensegrity powstały również badania nad ogólnym tensegrity (*general tensegrity*). Warunki równowagi i stabilności ogólnych struktur tensegrity różnią się od tych dotyczących klasycznych konstrukcji ze względu na obecność ciał sztywnych, jednak metoda Yoshiro Kanno znalazła zastosowanie właśnie w takich przypadkach (Wang, Xu et al. 2020). Innym rodzajem struktur tensegrity, które również znalazły swoje odzwierciedlenie w obszarze optymalizacji ich topologii są struktury aktywne (Senatore, Wang 2024; Wang, Han et al. 2024).

Powstało również połączenie metody struktury bazowej wraz z algorytmem genetycznym w celu poszukiwania topologii torusów opartych na modułach tensegrity (Ma, Yuan et al. 2019). Wśród rozwiązań pojawia się również wykorzystanie strategii kodowania komponentów równoległych (PCC, *Parallel Component Coding*) w połączeniu z modelem klasyfikacji lasów losowych (*Random Forest*) (Zhang, Feng et al. 2025). Podejście to polega na grupowaniu elementów powstałych w wyniku optymalizacji topologicznej metodą struktury bazowej. Prowadzi to do kompleksowej oceny struktur kandydujących. Metoda struktury bazowej została również wykorzystana w przypadku projektowania konstrukcji na bazie modułów o wzajemnie podpierających się elementach (Su, Zhang et al. 2020). Metoda ta jest wykorzystywana w celu projektowania kopuł tensegrity o dużych rozpiętościach.

Istnieje również metoda łącząca optymalizację topologiczną wraz z najpopularniejszą metodą poszukiwania kształtu – metodą gęstości sił i algorytmem genetycznym (Lee, Lee 2016). Proponowana metoda wymaga jedynie współrzędnych węzłów jako danych wejściowych, w przeciwieństwie do typowej metody poszukiwania kształtu, w której wymagana jest dodatkowo informacja o topologii struktury. W kolejnej pracy podejmującej połączenie optymalizacji topologicznej oraz metody gęstości sił zdecydowano się na wyznaczenie topologii, które jest sformułowane jako zadanie liniowych nierówności macierzowych z ograniczeniem rzędu (LMI, *Rank-Constrained Linear Matrix Inequalities*) z ograniczeniem rzędu macierzy stycznej sztywności (Wang, Xu et al. 2021a). Publikacja omawia również kwestię odwrotności zadania optymalizacji topologicznej i poszukiwania kształtu (Wang, Xu et al. 2021a; Dong, Stafford et al. 2019).

Wśród najnowszych rozwiązań pojawia się również odejście od tradycyjnej metody struktury bazowej, ze względu na jej liczne ograniczenia. Przykładem może być algorytm, który

jednocześnie wyznacza wstępne naprężenia, projektuje konfigurację oraz optymalizuje topologię, uwzględniając różne ograniczenia projektowe (Dong, Yuan et al. 2025). Kolejnym nowym podejściem jest wykorzystanie algorytmu macierzy schematów (*scheme matrix algorithm*) do wyszukiwania form topologicznych struktur tensegrity z wieloma stanami samonaprężenia (Feng, Zhang et al. 2021).

Analizując literaturę dotyczącą optymalizacji topologicznej konstrukcji tensegrity autorka zauważyła lukę badawczą dotyczącą możliwości adaptacyjnego wzmacniania struktur zgodnie z wynikami optymalizacji topologicznej. W każdym z analizowanych badań optymalizacja topologiczna była częścią procesu poszukiwania nowej formy modułu lub konstrukcji, zatem w każdym z przypadków uzyskana konstrukcja była optymalna dla wybranego przypadku obciążeń w połączeniu z dodatkowymi założeniami. Zaledwie w jednej z prac (Xu, Wang et al. 2018) poruszono temat przystosowania struktury do wielu obciążeń, jednak w założeniu konstrukcja ta była dostosowana jednocześnie do dwóch przypadków obciążeń, nie zaś optymalna dla obu. Podejście takie ogranicza adaptowalność konstrukcji do wielu przypadków obciążeń w sposób najlepszy. W niniejszej pracy zaproponowano zatem innowacyjne podejście, w którym wykorzystywane są wyniki optymalizacji topologicznej, jednak są one wprowadzane do konstrukcji modularnej tensegrity w postaci inteligentnego szkieletu (za każdym razem inny w zależności od przyjętych warunków brzegowych), w przeciwieństwie do optymalizowania jej do jednego wybranego przypadku.

3.5. Wprowadzanie inteligentnego szkieletu

W celu zbudowania całej struktury w programie *Mathematica (wer. 13.3)* wykorzystano algorytm łączenia modułów z wykorzystaniem macierzy obrotu. Założeniami początkowymi budowy konstrukcji jest fakt, że jest to struktura komórkowa, zbudowana z pojedynczych komórek połączonych w określony, powtarzalny sposób. Komórki są takie same, podstawowy stosunek sił samonaprężających jest identyczny dla każdej z komórek. Komórki mogą posiadać różne przekroje prętów oraz mogą być sprężane w różny sposób w celu wzmocnienia lub osłabienia określonych obszarów struktury.

W pierwszych krokach wymagane jest obliczenie macierzy pojedynczej komórki budującej strukturę (może być to pojedynczy moduł lub kilka modułów w określonym układzie – superkomórka) zgodnie z rozkładem według wartości osobliwych SVD (metoda opisana

w rozdziale 2.5.4 Rozkład według wartości osobliwych). Danymi wejściowymi są informacje o geometrii komórki, tj.: położenie i liczba węzłów, liczba prętów, węzły początkowe i końcowe węzłów, typ prętów oraz ich przekroje, a także materiał z którego są wykonane. Wynikiem tych obliczeń jest informacja czy wybrany przez nas moduł jest tensegrity oraz zestaw sił samonaprężających pozwalających na sprężenie wstępne modułu, a tym samym struktury. Ostatecznym wynikiem są macierze liniowej i geometrycznej sztywności K_L, K_G.

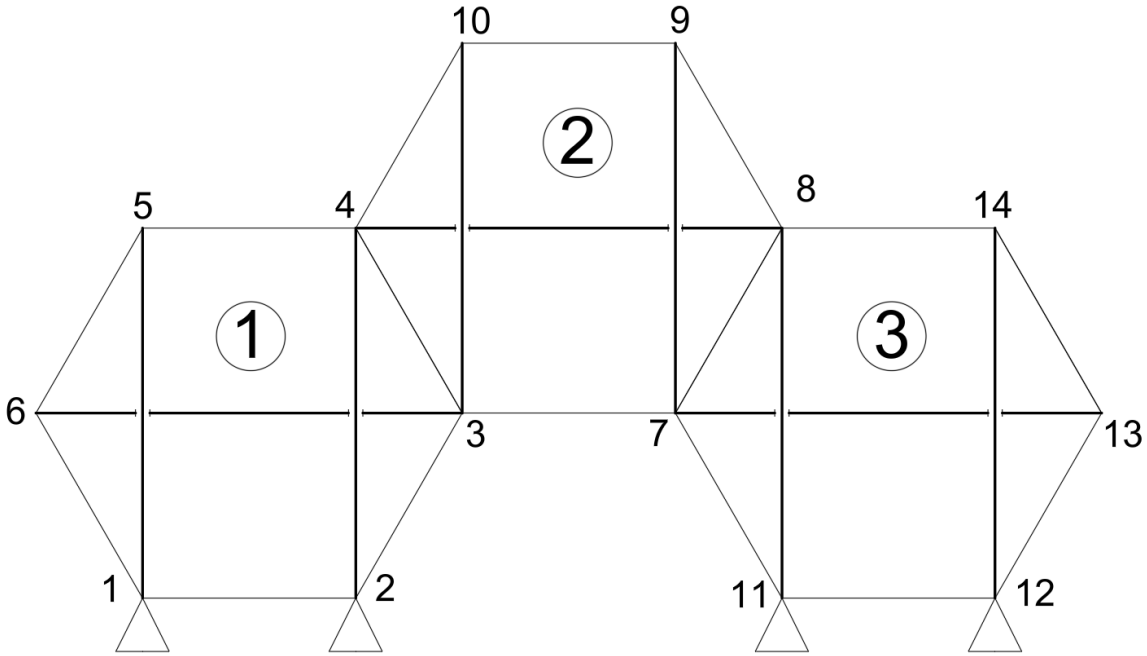
W trakcie procesu budowy macierzy można określić czy wybrane moduły będą wzmacniane lub osłabiane. Wzmocnienie w niniejszej pracy było wprowadzane na dwa sposoby – poprzez geometrię pojedynczych komórek – modułów (współczynniki k, m) lub poprzez zmianę wartości siły sprężającej (współczynnik σ). Zmiany geometrii w algorytmie są wprowadzane przez wektor EA określający sztywność prętów budujących pojedyncze komórki, w którym określamy wartość $E \cdot A$ każdego pręta (gdzie E – moduł Younga, a A – pole powierzchni pręta). Współczynnik k określa stosunek pola przekroju pręta rozciąganego (cięgna) do pola przekroju pręta ściskanego (zastrzału), współczynnik m określa stosunek pola powierzchni zastrzałów pionowych do poziomych. Oba współczynniki są związane z wektorem EA. Wzmocnienie poprzez self-stress jest wprowadzane na etapie budowy globalnej macierzy geometrycznej K_G poprzez mnożenie wartości sił sprężających przez mnożnik s.

Łączenie modułów w strukturę – Przykład trójmodułowej ramy

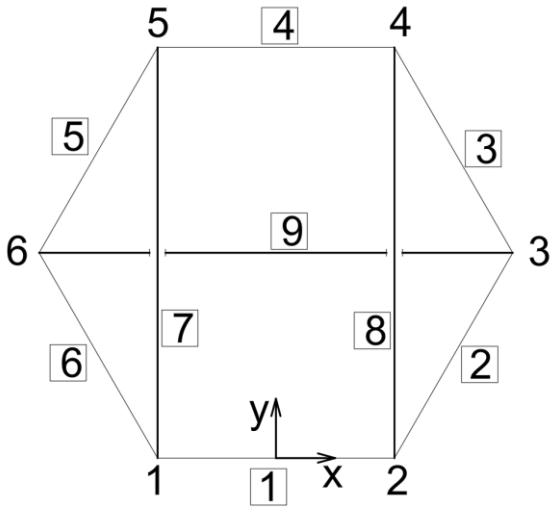
Sposób budowania struktur wykorzystany w niniejszej pracy zostanie przedstawiony na przykładzie trójmodułowej ramy przedstawionej na Rys. 3.4. Podstawową komórką budującą ramę jest moduł sześciokątny tensegrity o boku długości a. Moduł 1 struktury jest zbudowany z podstawowej geometrii z założeniem stosunku wartości pola powierzchni przekroju cięgien i pola powierzchni przekroju zastrzałów jako k_1 oraz ilorazu wartości pola powierzchni zastrzałów pionowych i poziomych równe $m_1 = 1$, moduł 2 jest zbudowany z geometrii z założeniem wartości k_1 oraz $m_2 > 1$, zaś moduł 3 w swojej geometrii ma założenie wartości $k_2 > k_1$ oraz $m_1 = 1$. Moduł 1 i 3 są sprężane siłami z mnożnikiem s_1, zaś moduł 2 - $s_2 > s_1$.

Obliczenia rozpoczynamy od obliczeń pojedynczej komórki budującej konstrukcję przedstawionej na Rys. 3.5, w tym przypadku jest to moduł sześciokątny o boku długości a. W celu opisania modułu należy podać współrzędne węzłów modułów (wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$) oraz

początki i końce prętów (wektory $\mathbf{po}, \mathbf{ko}$). Następnie należy określić pola powierzchni poszczególnych prętów (wektor $\mathbf{A}$).



Rysunek 3.4 Trójmodułowa rama płaska zbudowana z sześciokątnych modułów tensegrity, podparta swobodnie w dolnych węzłach.



Rysunek 3.5 Geometria pojedynczego modułu sześciokątnego tensegrity budującego trójmodułową ramę.

$$\mathbf{x} = \{-\frac{a}{2} \quad \frac{a}{2} \quad a \quad \frac{a}{2} \quad -\frac{a}{2} \quad -a\}$$

$$\mathbf{y} = \{0 \quad 0 \quad \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad a\sqrt{3} \quad a\sqrt{3} \quad \frac{a\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\mathbf{po} = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$$

$$\mathbf{ko} = \{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \quad 5 \quad 4 \quad 6\}$$

$$\mathbf{A_1} = \{k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad m_1 A_z \quad m_1 A_z \quad m_1 A_z\}$$
$$\mathbf{A_2} = \{k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad k_1 A_z \quad m_2 A_z \quad m_2 A_z \quad m_2 A_z\}$$
$$\mathbf{A_3} = \{k_2 A_z \quad k_2 A_z \quad k_2 A_z \quad k_2 A_z \quad k_2 A_z \quad k_2 A_z \quad m_1 A_z \quad m_1 A_z \quad m_1 A_z\}$$

Na podstawie tych danych początkowych następnie wyliczana jest długość prętów (wektor $\mathbf{L}$):

$$l_i = \sqrt{\left(x_{ko} - x_{po}\right)^2 + \left(y_{ko} - y_{po}\right)^2}$$

$$\mathbf{L} = \{a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a \quad a\sqrt{3} \quad a\sqrt{3} \quad 2a\}$$

Następnie obliczana jest macierz geometryczna B o wymiarach $i \times 2 \cdot j$, gdzie i - liczba prętów oraz j - liczba węzłów. Macierz może być wyliczona ręcznie zgodnie ze wzorami z Rozdziału 2.5 lub w oprogramowaniu do obliczeń symbolicznych (na przykład *Mathematica*) z wykorzystaniem poniższych wzorów, gdzie i – numer pręta, j_{po} – numer węzła początkowego, j_{ko} – numer węzła końcowego, x_{ko}^i – współrzędna x końca i-tego pręta, x_{po}^i – współrzędna x początku i-tego pręta, analogicznie dla y.

$$\mathbf{B}\left(i, 2 \cdot j_{po} - 1\right) = -\frac{x_{ko}^i - x_{po}^i}{L^i}$$

$$\mathbf{B}\left(i, 2 \cdot j_{po}\right) = -\frac{y_{ko}^i - y_{po}^i}{L^i}$$

$$\mathbf{B}(i, 2 \cdot j_k - 1) = \frac{x_{ko}^i - x_{po}^i}{L^i}$$

$$\mathbf{B}(i, 2 \cdot j_k) = \frac{y_{ko}^i - y_{po}^i}{L^i}$$

$$\mathbf{B}(1,1) = -\frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a} = -1, \qquad \mathbf{B}(1,2) = -\frac{0-0}{a} = 0,$$
$$\mathbf{B}(1,3) = \frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a} = 1, \qquad \mathbf{B}(1,4) = \frac{0-0}{a} = 0 \; itd.$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}$$

Analogicznie należy obliczyć macierz obrotów $\mathbf{C}$ o tym samym wymiarze: $i \times 2 \cdot j$.

$$\mathbf{C}\left(i, 2 \cdot j_{po} - 1\right) = -\frac{y_{ko}^{i} - y_{po}^{i}}{L^{i}}$$

$$\mathbf{C}\left(i, 2 \cdot j_{po}\right) = \frac{x_{ko}^{i} - x_{po}^{i}}{L^{i}}$$

$$\mathbf{C}(i, 2 \cdot j_{k} - 1) = \frac{y_{ko}^{i} - y_{po}^{i}}{L^{i}}$$

$$\mathbf{C}(i, 2 \cdot j_{k}) = -\frac{x_{ko}^{i} - x_{po}^{i}}{L^{i}}$$

$$\mathbf{C}(1,1) = -\frac{0-0}{a} = 0, \qquad \mathbf{C}(1,2) = \frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a} = 1,$$

$$\mathbf{C}(1,3) = \frac{0-0}{a} = 0, \qquad \mathbf{C}(1,4) = -\frac{\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)}{a} = -1 \; itd.$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\
-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

W kolejnym kroku wymagane jest sprawdzenie czy istnieją mechanizmy infinitezymalne oraz czy są równoważone przez *self-stress*. Obliczenia te można wykonać poprzez rozwiązanie dwóch zagadnień własnych zgodnie ze wzorami z Rozdziału 2.4.4. W przypadku modułu sześciokątnego uzyskany *self-stress* ma następujące wartości $\boldsymbol{\sigma} = \{\frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad -1 \quad -1 \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$. Ustalana jest macierz $\mathbf{E} = diag\left\{\frac{E\,A^i}{L^i}\right\}$ oraz $\mathbf{S} = diag\left\{\frac{\sigma^i}{L^i}\right\}$.

$$\mathbf{E_1} = \begin{bmatrix} \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_1}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_1}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z m_1}{2a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_2} = \begin{bmatrix} \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_2}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_2}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z m_2}{2a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E_3} = \begin{bmatrix} \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z k_2}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_1}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}EA_z m_1}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_z m_1}{2a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3a} \end{bmatrix}$$

W ostatnim kroku obliczane są macierze sztywności liniowej $\mathbf{K}_{Li}^{mod} = \mathbf{B}^T\mathbf{E_i}\mathbf{B}$ oraz sztywności geometrycznej $\mathbf{K}_G^{mod} = \mathbf{C}^T\mathbf{S}\,\mathbf{C}$ modułu.

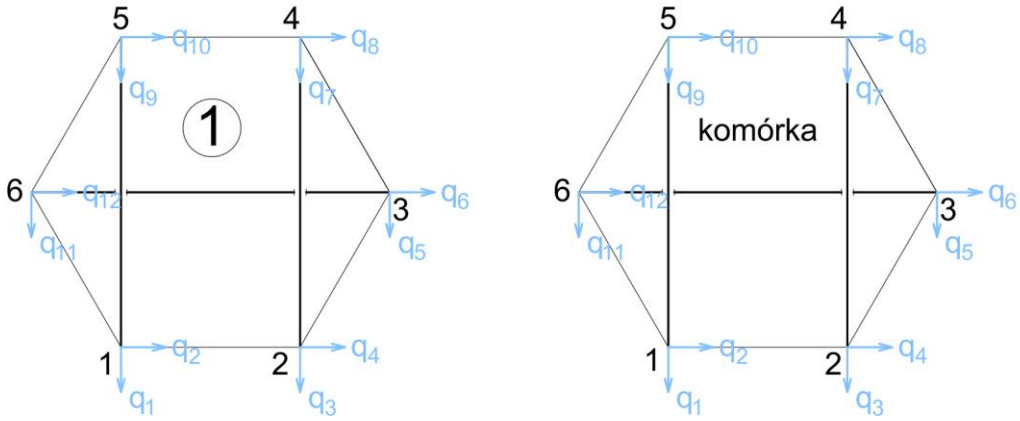
$$\mathbf{K}_{L1}^{mod} = \mathbf{B}^T\mathbf{E_1}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{K}_{L2}^{mod} = \mathbf{B}^T\mathbf{E_2}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{K}_{L1}^{mod} = \mathbf{B}^T\mathbf{E_3}\mathbf{B}$$

Mając obliczone macierze dla pojedynczego modułu można przystąpić do budowania struktury poprzez zbudowanie macierzy alokacji. W macierzy alokacji przemieszczenia globalne i lokalne są ze sobą wiązane. Macierz alokacji ma rozmiar $2i \times 2j$, gdzie i – liczba węzłów pojedynczego

modułu budującego strukturę, a j – liczba węzłów w całej strukturze. Poniżej przedstawiona jest forma ogólna macierzy alokacji każdego z modułów konstrukcji z opisem każdego węzła w postaci q_{lok}^{glob}.

$$\mathbf{c_i} = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 16 & 17 & \dots & 25 & 26 & 27 & 28 \\ 1 & q_1^1 & q_1^2 & q_1^3 & q_1^4 & \dots & q_1^{16} & q_1^{17} & \dots & q_1^{25} & q_1^{26} & q_1^{27} & q_1^{28} \\ 2 & q_2^1 & q_2^2 & q_2^3 & q_2^4 & \dots & q_2^{16} & q_2^{17} & \dots & q_2^{25} & q_2^{26} & q_2^{27} & q_2^{28} \\ 3 & q_3^1 & q_3^2 & q_3^3 & q_3^4 & \dots & q_3^{16} & q_3^{17} & \dots & q_3^{25} & q_3^{26} & q_3^{27} & q_3^{28} \\ 4 & q_4^1 & q_4^2 & q_4^3 & q_4^4 & \dots & q_4^{16} & q_4^{17} & \dots & q_4^{25} & q_4^{26} & q_4^{27} & q_4^{28} \\ 5 & q_5^1 & q_5^2 & q_5^3 & q_5^4 & \dots & q_5^{16} & q_5^{17} & \dots & q_5^{25} & q_5^{26} & q_5^{27} & q_5^{28} \\ 6 & q_6^1 & q_6^2 & q_6^3 & q_6^4 & \dots & q_6^{16} & q_6^{17} & \dots & q_6^{25} & q_6^{26} & q_6^{27} & q_6^{28} \\ 7 & q_7^1 & q_7^2 & q_7^3 & q_7^4 & \dots & q_7^{16} & q_7^{17} & \dots & q_7^{25} & q_7^{26} & q_7^{27} & q_7^{28} \\ 8 & q_8^1 & q_8^2 & q_8^3 & q_8^4 & \dots & q_8^{16} & q_8^{17} & \dots & q_8^{25} & q_8^{26} & q_8^{27} & q_8^{28} \\ 9 & q_9^1 & q_9^2 & q_9^3 & q_9^4 & \dots & q_9^{16} & q_9^{17} & \dots & q_9^{25} & q_9^{26} & q_9^{27} & q_9^{28} \\ 10 & q_{10}^1 & q_{10}^2 & q_{10}^3 & q_{10}^4 & \dots & q_{10}^{16} & q_{10}^{17} & \dots & q_{10}^{25} & q_{10}^{26} & q_{10}^{27} & q_{10}^{28} \\ 11 & q_{11}^1 & q_{11}^2 & q_{11}^3 & q_{11}^4 & \dots & q_{11}^{16} & q_{11}^{17} & \dots & q_{11}^{25} & q_{11}^{26} & q_{11}^{27} & q_{11}^{28} \\ 12 & q_{12}^1 & q_{12}^2 & q_{12}^3 & q_{12}^4 & \dots & q_{12}^{16} & q_{12}^{17} & \dots & q_{12}^{25} & q_{12}^{26} & q_{12}^{27} & q_{12}^{28} \end{bmatrix}$$

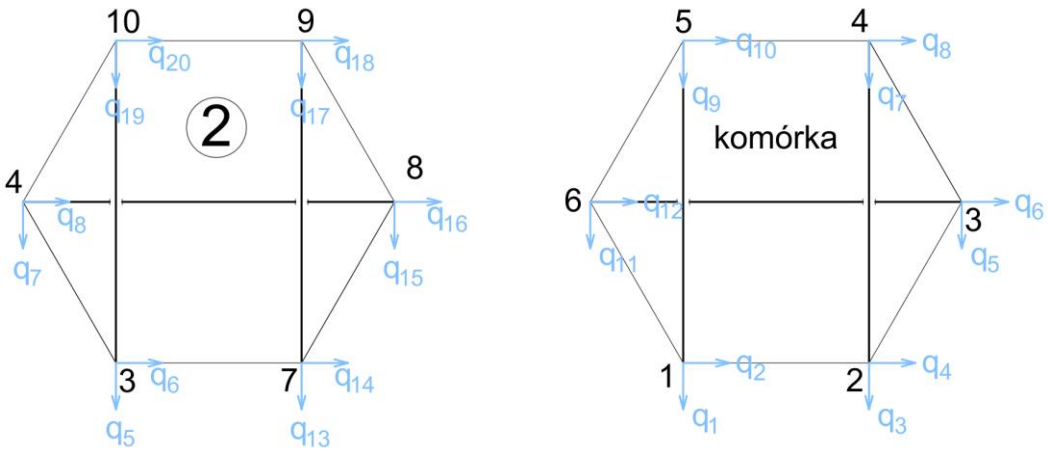
W przypadku Modułu 1 przemieszczenia lokalne i globalne w pełni pokrywają się, więc przypisanie ich w macierzy alokacji jest proste (Rys. 3.6).



Rysunek 3.6 Po lewej: moduł 1 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych.

$$\mathbf{c_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 28 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

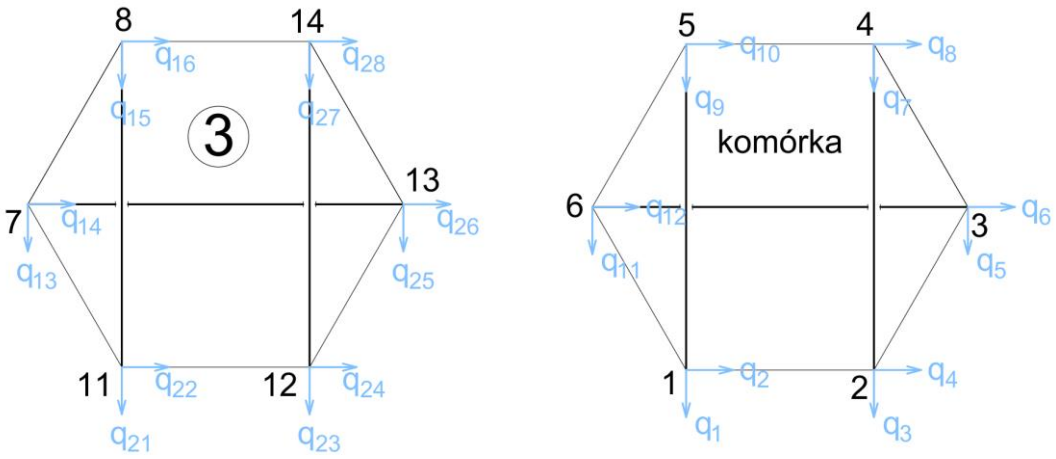
W przypadku Modułu 2 pokrywają się węzły 3 i 4, pozostałe zaś są już przypisywane na poziom globalny (Rys. 3.7).



Rysunek 3.7 Po lewej: moduł 2 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych.

$$\mathbf{c_2} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & \dots & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & \dots & 28 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Moduł 3 jest już w pełni przepisywany na układ globalny (Rys. 3.8).



Rysunek 3.8 Po lewej: moduł 3 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych.

$$\mathbf{c_3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & 13 & 14 & 15 & 16 & \dots & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Mając zbudowane macierze alokacji oraz wszystkie wcześniejsze macierze można zbudować macierze sztywności liniowej i geometryczne całej struktury.

$$\mathbf{K_L} = \mathbf{c}_1^T\, \mathbf{K}_{L1}^{mod}\, \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2^T\, \mathbf{K}_{L2}^{mod}\, \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_2^T\, \mathbf{K}_{L2}^{mod}\, \mathbf{c}_2$$

$$\mathbf{K_G} = s_1 \cdot \mathbf{c}_1^T\, \mathbf{K}_{G}^{mod}\, \mathbf{c}_1 + s_2 \cdot \mathbf{c}_2^T\, \mathbf{K}_{G}^{mod}\, \mathbf{c}_2 + s_1 \cdot \mathbf{c}_3^T\, \mathbf{K}_{G}^{mod}\, \mathbf{c}_3$$

Znajomość powyższych macierzy pozwala na wykorzystanie struktury w dalszych obliczeniach.

4. Analizy – struktury typu tarczowego zbudowane z modułów płaskich (2D)

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie założeń metodycznych przyjętych w analizie konstrukcji tensegrity zbudowanych z modułów 2D (modułów płaskich). Ponadto rozdział obejmuje szczegółowy opis modelu numerycznego, a także przedstawienie wyników opisanych analiz. Na potrzeby niniejszego rozdziału sformułowano następującą tezę badawczą: „Zastosowanie wzmocnienia inspirowanego optymalizacją topologiczną w strukturach typu tarczowego zbudowanych z płaskich modułów tensegrity pozwala na zwiększenie sztywności konstrukcji. Zastosowane rozwiązanie nie jest zależne od rozmiarów konstrukcji. Rozwiązanie to również pozwala na możliwość budowania struktur adaptowalnych, w których w strukturze o jednym schemacie podparcia mogą być zastosowane różne schematy („wzory") wzmocnienia w zależności od zastosowanego obciążenia."

Weryfikacja powyższej tezy wykonana jest na przykładach znanych klasycznych zadań optymalizacji topologicznej dla struktur typu tarczowego: wspornika obciążonego siłą na końcu długości oraz belki swobodnie podpartej obciążonej w różnych punktach rozpiętości. W przykładach związanych ze wspornikiem o różnych długościach analizowano wpływ rozmiaru konstrukcji i liczby modułów na uzyskane wyniki. W przykładach związanych z belkami swobodnie podpartymi analizowano możliwość wprowadzania różnych wyników optymalizacji topologicznej do tej samej struktury, celem sprawdzenia możliwości adaptacyjnych takich konstrukcji. Wyniki optymalizacji topologicznej uzyskano w programie *Interactive 2D TopOpt App (wer. 2.4)*.

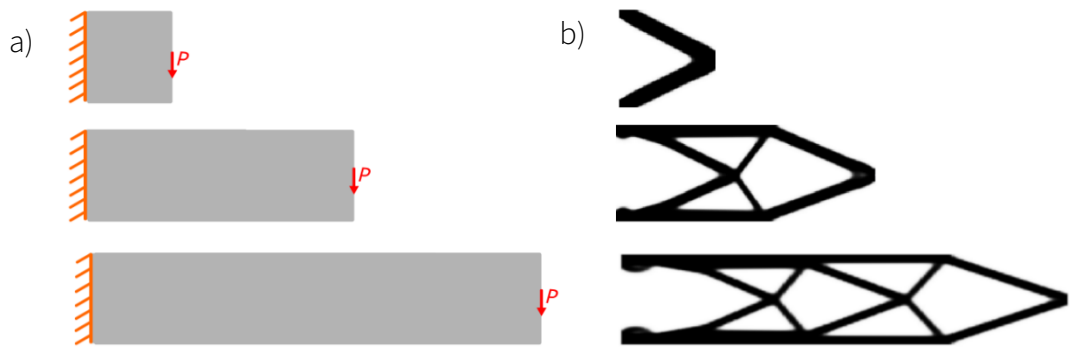
W analizach nakładano wybrane wzory optymalizacji topologicznej dla wybranych schematów statycznych (wspornik, belka swobodnie podparta) poprzez wzmacnianie i osłabianie odpowiadających im modułów w przypadku sześciu różnych struktur modularnych opartych o dwa typy modułów płaskich – ośmiokątnego i sześciokątnego. Rozważano przypadki wzmocnienia pojedynczą linią modułów oraz podwójną. We wszystkich przypadkach rozważano wzmocnienie za pomocą zmiany mnożnika *self-stress* oraz za pomocą zmiany geometrii (zmiana przekroju zastrzałów i cięgien). Weryfikację przeprowadzono za pomocą autorskiego programu napisanego w oprogramowaniu *Mathematica (wer. 13.3)*, zakres badania

obejmuje analizę wartości przemieszczeń węzłów znajdujących się pod bezpośrednim obciążeniem. W kolejnych podrozdziałach omówione zostały szczegółowo: geometria modelu, własności materiałowe, warunki brzegowe, procedura analizy, jej wyniki oraz podsumowanie wyników i odpowiedzi na tezy badawcze zawarte na końcu rozdziału.

4.1. Klasyczne zadania optymalizacji topologicznej

Wykonano przykłady klasycznych zadań optymalizacji topologicznej na podstawie (Bendsoe, Sigmund 2013). Wśród najpopularniejszych zadań optymalizacji topologicznej struktur typu tarczowego znajdujemy: wspornik obciążony siłą skupioną na końcu oraz belkę swobodnie podpartą obciążoną w środku rozpiętości lub kilku punktach jej rozpiętości.

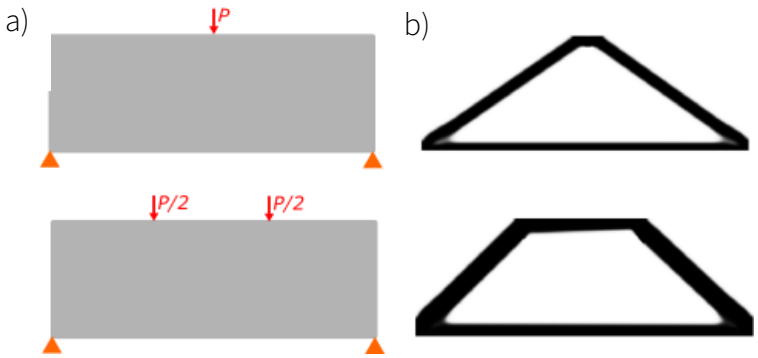
Wybrano trzy wersje wspornika: krótki (w którym proporcje wysokości belki do jej długości wynosi 1:1), średniej długości (w którym ten stosunek wynosi 1:3) oraz długi (1:5). Pomimo, że analizowane przypadki należą do klasycznych zadań optymalizacji topologicznej, wyniki przedstawione w niniejszej pracy uzyskano samodzielnie z wykorzystaniem programu *Interactive 2D TopOpt App (wer. 2.4)*, przy założeniu konkretnych proporcji boków konstrukcji, co umożliwiło wierne odtworzenie ich uzyskanych kształtów. Wyniki optymalizacji topologicznej uzyskano dla wskaźnika objętości (*volume fraction*) równego 0.3 i są one przedstawione na Rys. 4.1.



Rysunek 4.1 Od góry: wspornik krótki, średniej długości oraz długi: a) schematy statyczne przykładowych wsporników wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej (wykonanej w programie Interactive 2D TopOpt App) dla odpowiadających schematów statycznych.

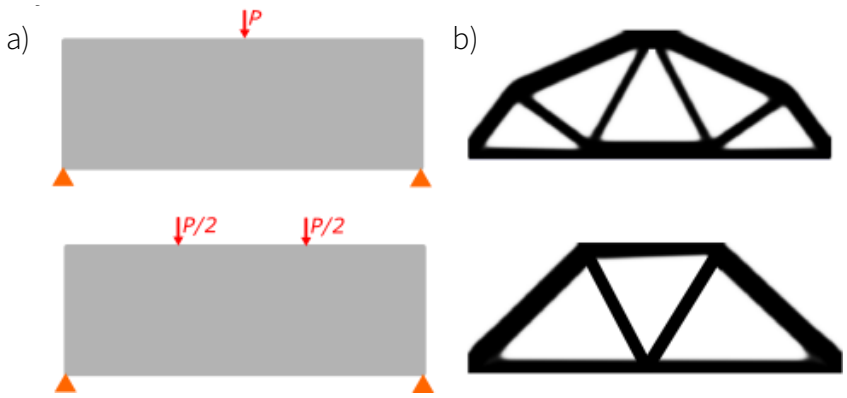
Dla belki swobodnie podpartej wybrano dwa przypadki obciążenia: jedną siłą w środku rozpiętości oraz dwiema siłami w 1/3 oraz 2/3 rozpiętości. W obu przypadkach proporcja wysokości do szerokości belki wynosi 1:3. Oba przypadki były rozpatrywane w przykładzie bez

wzmocnienia i z dodatkowym wzmocnieniem (w postaci zwiększenia obszarów materiałowych), wyniki przedstawiono na Rysunku 4.2.



Rysunek 4.2 Od góry: belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą i dwiema siłami: a) schematy statyczne przykładowych belek wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej dla odpowiadających schematów statycznych – przypadek 1.

Wyniki optymalizacji topologicznej uzyskano dla wskaźnika objętości (*volume fraction*) równego 0.3 w programie *Interactive 2D TopOpt App* (dla przypadku 1.). Przypadek 2. jest zaś wynikiem optymalizacji topologicznej kombinacji obciążeń w przypadku obciążenia dwiema siłami (wyniki za (Bendsoe, Sigmund 2013)), w przypadku obciążenia jedna siłą jest to zmiana wskaźnika objętości (*volume fraction*) na 0.35 – przedstawione na Rys. 4.3.

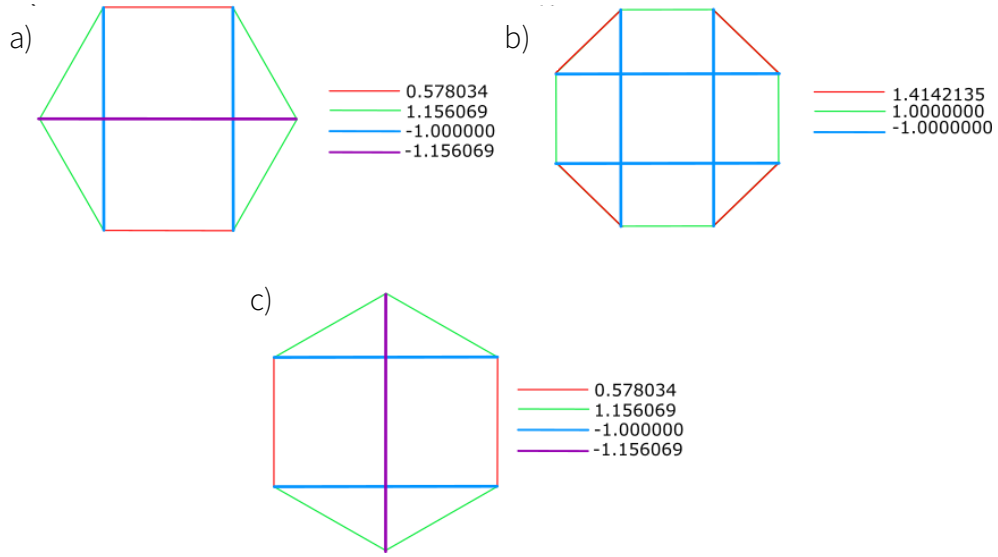


Rysunek 4.3 Od góry: belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą i dwiema siłami: a) schematy statyczne przykładowych belek wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej dla odpowiadających schematów statycznych – przypadek 2.

4.2. Struktury komórkowe tensegrity

Tarcze są płaskimi elementami powierzchniowymi, których grubość jest znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów, są one również obciążane w swojej płaszczyźnie. Cechy te sprawiają, że struktury tego typu można modelować za pomocą dwuwymiarowych modułów tensegrity. W niniejszych analizach wykorzystywano sześć różnych struktur modularnych tensegrity, cztery mające jako bazę moduł sześciokątny oraz dwie mające za bazę moduł

ośmiokątny. W przypadku struktur sześciokątnych analizowano je dla modułów wpisanych w prostokąty o wymiarach $b\sqrt{3} \times 2b$, składających się z 6 cięgien i 3 zastrzałów (dwóch pionowych, jednego poziomego) sprężonych siłami o relacjach przedstawionych na Rys. 4.4.

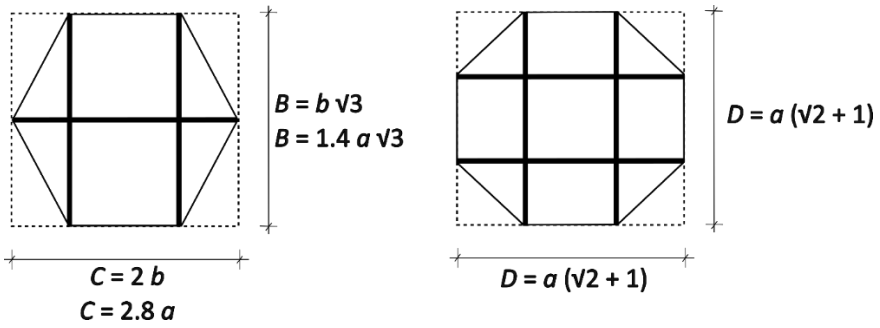


Rysunek 4.4 Moduły: a) sześciokątny podstawowy, b) ośmiokątny oraz c) sześciokątny obrócony) z oznaczeniem stosunków wartości sił sprężających.

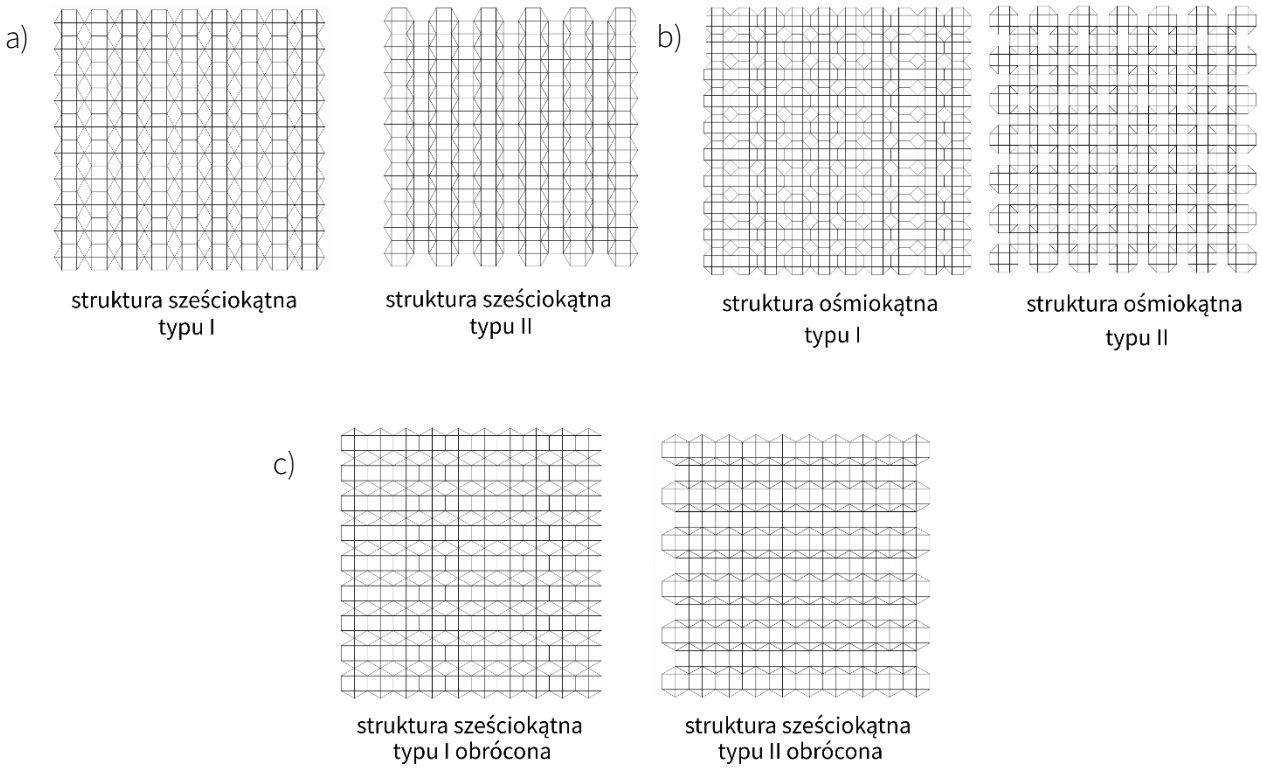
W strukturach sześciokątnych wykorzystywano moduł podstawowy i obrócony o $90°$. Struktury ośmiokątne opierały się na modułach wpisanych w kwadrat o wymiarach $a(1+\sqrt{2}) \times a(1+\sqrt{2})$, składających się z 8 cięgien oraz 4 zastrzałów (dwóch pionowych i dwóch poziomych), sprężonych siłami o związkach przedstawionych na Rys. 4.5. W celu uzyskania struktur o możliwie jak najbardziej zbliżonych wymiarach zdecydowano się zunifikować wymiary modułów, za podstawowy przyjmując moduł ośmiokątny (założono wymiar $D \times D = a(1+\sqrt{2}) \times a(1+\sqrt{2})$). Celem dopasowania wymiarów modułu sześciokątnego, również przyjęto jego wymiary jako $B \times C = b\sqrt{3} \times 2b$. Po porównaniu wymiarów obu modułów wykazano, że wymiar $b = 1{,}4\,a$, zatem wymiary modułu sześciokątnego wynoszą: $1{,}4\,a\sqrt{3} \times 2{,}8\,a$ (Rys. 4.5).

Wygenerowano dwie struktury sześciokątne oparte o moduł sześciokątny podstawowy – strukturę typu I, w której moduły są ułożone obok siebie w prosty sposób (jedne obok drugich) oraz strukturę typu II, w której moduły są ułożone obok siebie w taki sposób, aby uniknąć wolnych przestrzeni między nimi (nie są one w równych rzędach i kolumnach). Analogicznie wykonano struktury na bazie modułu sześciokątnego obróconego – struktura typu I obrócona

oraz struktura typu II obrócona. Również w przypadku modułu ośmiokątnego wykonano strukturę typu I, gdzie moduły są w równych kolumnach i rzędach oraz strukturę typu II, gdzie moduły w kolumnach parzystych są przesunięte względem modułów w kolumnach nieparzystych. Analizy oparto o trzy podstawowe konstrukcje wypełniające przestrzeń o stosunkach boków 1:1 (Rys. 4.6), 1:3 (Rys. 4.7) oraz 1:5 (Rys. 4.8).



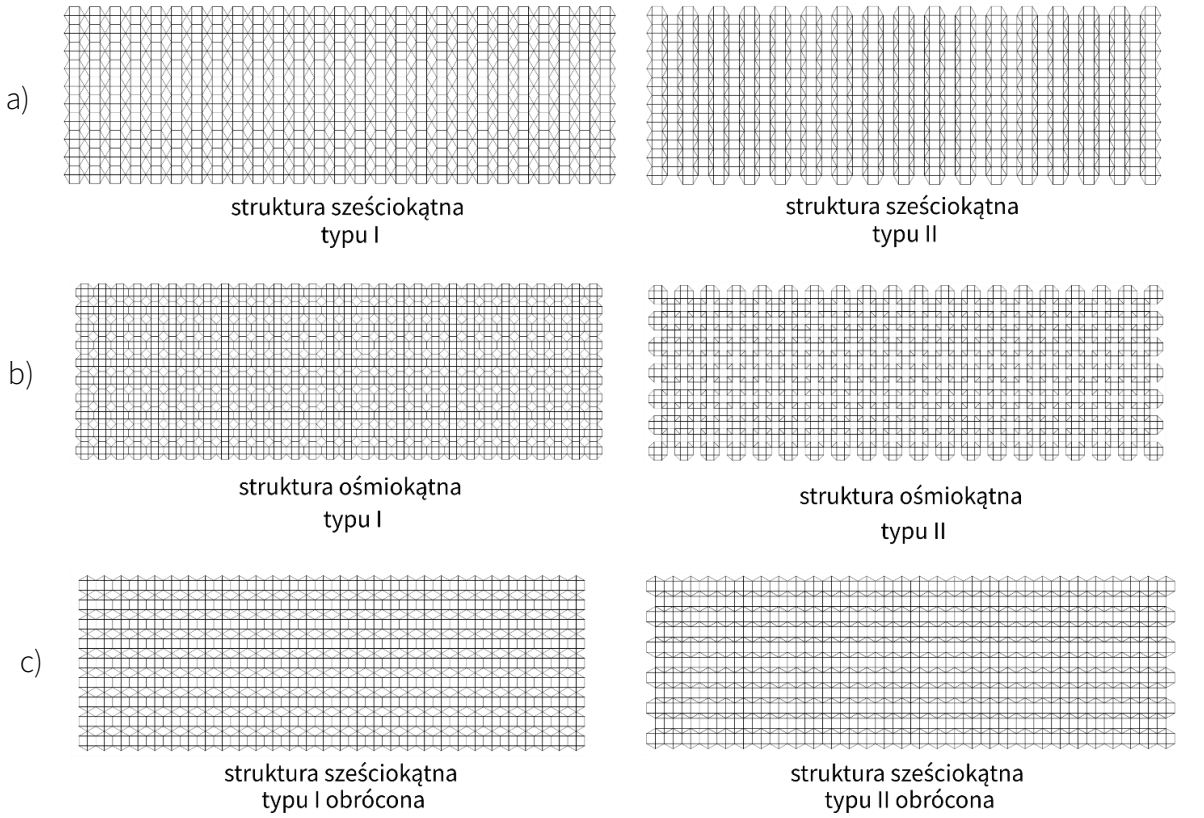
Rysunek 4.5 Wymiary podstawowych modułów budujących struktury.



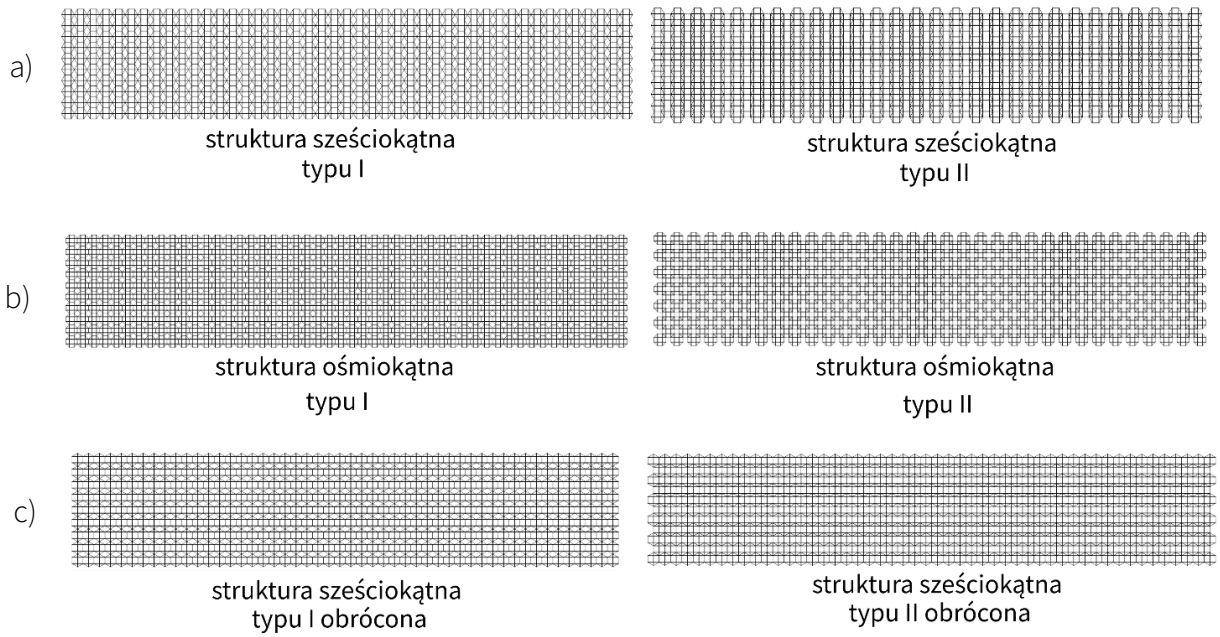
Rysunek 4.6 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:1: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II).

Za bazowy układ przyjęto strukturę ośmiokątną typu I ze względu na jej jednakowe wymiary w obu kierunkach. Na tej podstawie obliczono liczbę modułów w kolumnach i wierszach innych typów struktur. Każda z nich ma wysokość odpowiadającą wysokości 10 modułów ośmiokątnych. Na przykładzie struktury o proporcji boków 1:1 przedstawiono sposób

obliczania liczby modułów w każdym z przypadków – są one wpisywane w tę samą konstrukcję o długości boków $10B \times 10C$ lub $10D \times 10D$. W celu znalezienia kolejnych układów obliczana była liczba modułów mieszczących się w założonym wymiarze.



Rysunek 4.7 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:3: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II).



Rysunek 4.8 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:5: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II).

Struktura ośmiokątna typu I

Struktura ma założone 10×10 modułów. Przykładowa struktura została przedstawiona na Rysunku 4.6b.

Struktura ośmiokątna typu II

$$h = 10 \cdot D = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot D = X \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right) + (X - 1) \cdot a$$

$$X = 7{,}36 \cong 7$$

$$l = 10 \cdot D = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot D = X \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right) + (X - 1) \cdot a$$

$$X = 7{,}36 \cong 7$$

Wbudowując tę strukturę w obszar o bokach $10D \times 10D$ otrzymujemy strukturę 7×7 modułów (Rys. 4.6b).

Struktura sześciokątna typu I

$$h = 10 \cdot B = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot B = X \cdot 1{,}4 \cdot a$$

$$X = 10$$

$$l = 10 \cdot B = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot B = X \cdot 2{,}8 \cdot a$$

$$X = 8{,}62 \cong 9$$

Struktura sześciokątna typu I wpisana w prostokątny przekrój $10B \times 10B$ będzie zawierała 10 modułów po wysokości oraz 9 modułów po szerokości (Rys 4.6a.).

Struktura sześciokątna typu II

$$h = 10 \cdot B = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot B = X \cdot 1{,}4 \cdot a$$

$$X = 10$$

$$l = 10 \cdot B = 10 \cdot a\left(\sqrt{2} + 1\right)$$

$$10 \cdot B = X \cdot 2{,}8\, a + (X - 1) \cdot 1{,}4\, a$$

$$X = 6{,}081 \cong 6$$

Struktura sześciokątna typu II będzie miała 10 modułów po wysokości, zaś po szerokości będzie wymagała 11 modułów. Struktura przedstawiona jest na Rys. 4.6a.

Struktura sześciokątna typu I obrócona

Ta struktura, będąca obrotem podstawowej o $\mathbf{90°}$, będzie zawierała 9 modułów po wysokości i 10 modułów po szerokości. Wybrana struktura jest przedstawiona na Rysunku 4.6c.

Struktura sześciokątna typu II obrócona

Ta struktura, będąca obrotem podstawowej o $\mathbf{90°}$, będzie zawierała 11 modułów po wysokości i 10 modułów po szerokości. Wygląd struktury na Rysunku 4.6c.

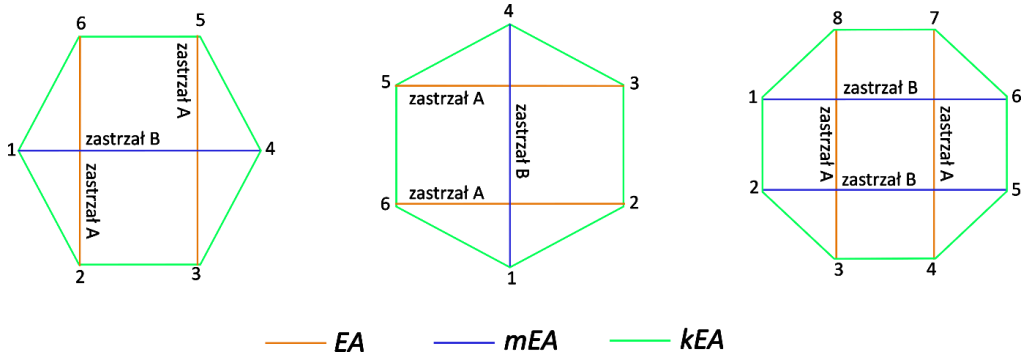
W analizach sprawdzana była wartość ugięcia pod siłą w zależności od współczynnika:

- $k = \frac{A_{\mathrm{c}}}{A_{\mathrm{z}}}$ – współczynnik określający stosunek przekroju cięgien (prętów rozciąganych) do przekroju zastrzałów (prętów ściskanych) (jeżeli $k = 1$ to zastrzały mają taki sam przekrój jak cięgna);
- $m = \frac{A_{\mathrm{z,A}}}{A_{\mathrm{z,B}}}$ - współczynnik określający stosunek przekroju zastrzałów A do przekroju zastrzałów B (jeżeli $m = 1$ to zastrzały pionowe i poziome mają taki sam przekrój);
- σ – współczynnik określający poziom sprężenia prętów w tensegrity ($S = EA \cdot \sigma$, gdzie S – siła sprężająca w wybranym pręcie w N, E – moduł Younga w Pa oraz A – pole przekroju wybranego pręta w jednostkach m^2).

W celu uniknięcia problemów związanych z nazewnictwem poszczególnych zastrzałów w przypadku modułu obróconego, w dalszej części analiz zastrzały oznaczone na pomarańczowo na Rysunku 4.9. nazywane są zastrzałami A, zaś na niebiesko zastrzałami B.

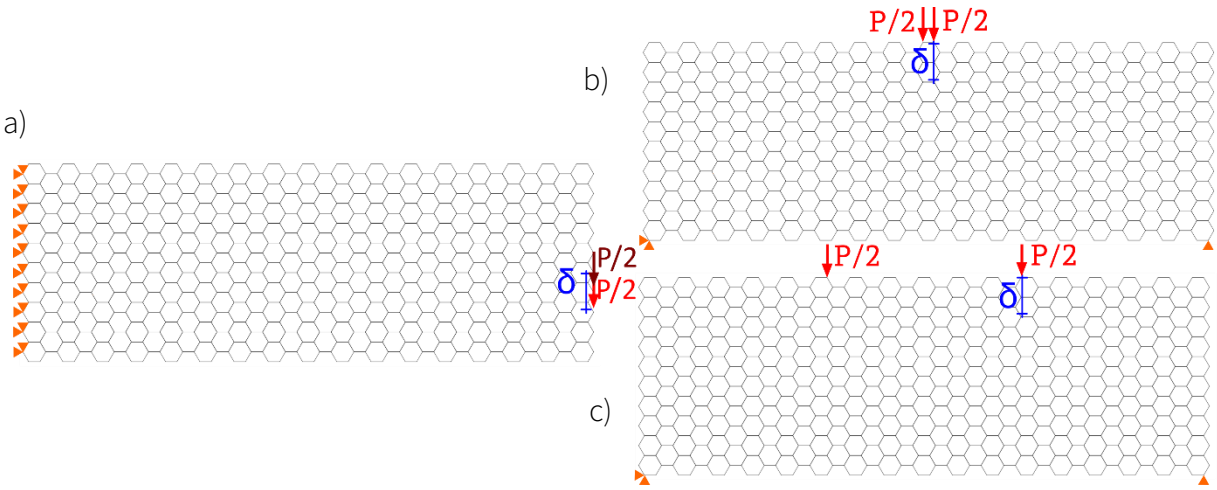
Założono, że dane materiałowe dla modułów będą jednostkowe ($E = 1$, gdzie E – moduł Younga), jako pole przekroju zastrzału ustalono $A_{\mathrm{z}} = 1$, zaś pole przekroju cięgien jest równa

$A_c = k \cdot A_z$. W przypadku zastrzałów B pole powierzchni zastrzału jest równe $A_{z,B} = m \cdot A_z$. W analizach niezależnych od współczynnika m, jego wartość wynosi 1, w analizach niezależnych od współczynnika k wynosi on 0,1.



Rysunek 4.9 Moduły (od lewej: sześciokątny podstawowy, sześciokątny obrócony oraz ośmiokątny) z oznaczeniem stosunków przekrojów prętów.

Jako sposób podparcia ustalono blokadę pojedynczych węzłów w kierunkach X, Y na krawędzi belki (w przypadku wsporników), zaś obciążenie zostało rozłożone równomiernie na dwa węzły (Rys. 4.10a). Całkowite obciążenie jest jednostkowe i wynosi $P = 1$. W przypadku belek swobodnie podpartych pojedyncze węzły zostały zablokowane – jeden w kierunkach X, Y, drugi zaś w kierunku Y (Rys. 4.10b,c). Analizy wykonano w autorskim oprogramowaniu napisanym w programie *Mathematica (wer. 13.3)* (przykładowy kod dostępny w Załączniku 2.).

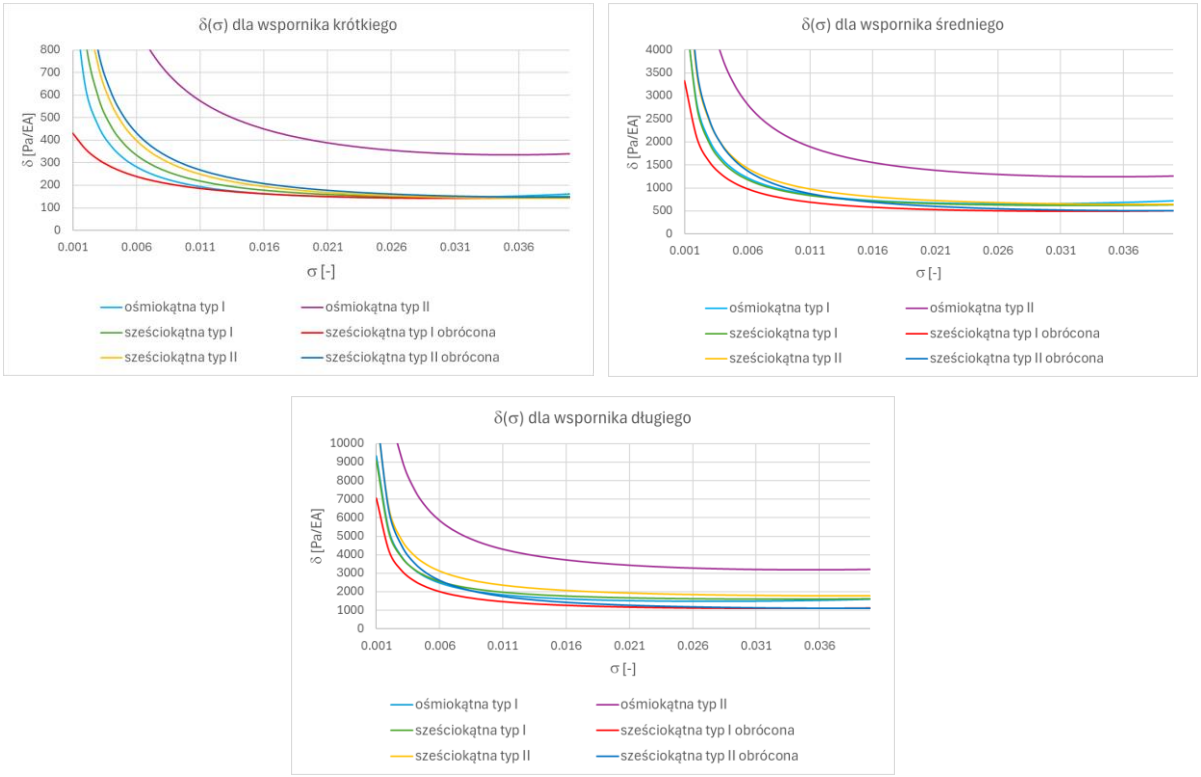


Rysunek 4.10 Schemat statyczny: podpory oraz układ obciążenia i miejsce odczytu przemieszczenia węzła na przykładzie struktury sześciokątnej typu II: a) wspornik średniej długości, b) belka obciążona jedną siłą , c) belka obciążona dwiema siłami.

Przed rozpoczęciem analiz oceniono, czy struktury modularne wykazują cechy tensegrity. Każda konstrukcja modularna bez wzmocnienia, pod wpływem zadanego obciążenia (wspornik obciążony siłą na końcu, belka swobodnie podparta obciążona siłą w środku

rozpiętości oraz belka swobodnie podparta obciążona w 1/3 i 2/3 długości – Rys. 4.10) zachowuje się w sposób charakterystyczny dla struktury tensegrity – wraz ze wzrostem sprężenia, regulowanego współczynnikiem σ, następuje spadek wartości przemieszczeń δ (Rys. 4.11, 4.12). Na podstawie analizy ogólnego zachowania konstrukcji modularnych zdecydowano się wykonywać analizy dla zakresu współczynnika σ równego 0,01 – 0,03 – jest to zakres wypłaszczania się wykresu $\delta(\sigma)$, a tym samym obszaru stabilizacji przemieszczeń pod wpływem sił sprężających. Dla wartości współczynnika σ powyżej 0,04 następuje wzrost przemieszczeń i struktura traci równowagę. Zakres ten jest analogiczny dla konstrukcji o wszystkich proporcjach boków.

W przypadku wspornika, wraz z wydłużeniem struktury, możemy zauważyć coraz większe różnice w zachowaniu poszczególnych struktur modularnych. Niezależnie od długości struktury można zauważyć, że struktura ośmiokątna typu II uzyskuje największe przemieszczenia względem pozostałych układów, zaś struktura sześciokątna typu I obrócona – najmniejsze (Rys. 4.11).

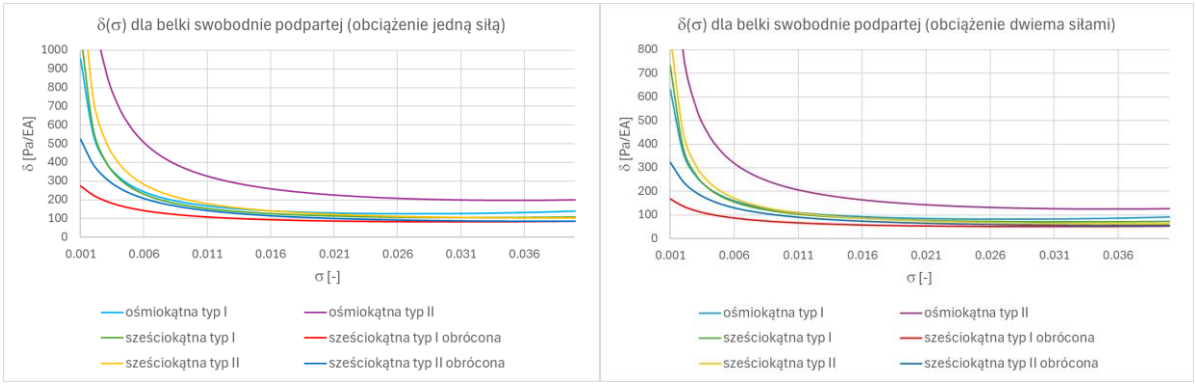


Rysunek 4.11 Wykres zależności przemieszczenia od współczynnika σ regulującego wartości sił sprężających (struktury o stosunku boków 1:1, 1:3, 1:5 – wspornik).

Wraz z wydłużeniem struktury to struktura sześciokątna typu II obrócona wykazuje coraz mniejsze przemieszczenia na tle pozostałych struktur. Wraz ze wzrostem długości struktury

różnice w uzyskanych przemieszczeniach dla poszczególnych struktur stają się coraz wyraźniejsze.

W przypadku belek swobodnie podpartych, reakcja struktur jest bardzo zbliżona (Rys. 4.12) – analogicznie do przypadku wspornika największe wartości przemieszczeń uzyskuje struktura ośmiokątna typu II, zaś najmniejsze struktura sześciokątna typu I obrócona. W przypadku pozostałych układów modułów ich wyniki są bardzo do siebie zbliżone.



*Rysunek 4.12 Wykres zależności przemieszczenia od współczynnika **σ** regulującego wartości sił sprężających (struktury o stosunku boków 1:3 – belka z pojedynczym obciążeniem i podwójnym obciążeniem).*

4.3. Przykłady obliczeniowe

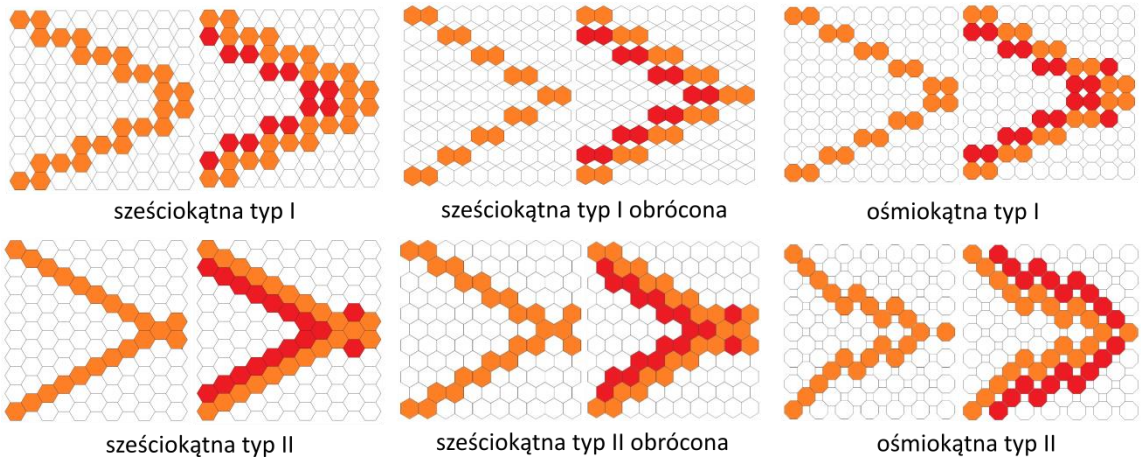
Wyniki w formie tabelarycznej dla poszczególnych przypadków znajdują się w Załączniku 1. (załącznik elektroniczny) dostępnym w Bazie Wiedzy Politechniki Warszawskiej pod adresem: repo.pw.edu.pl/info/researchdata/WUTc6c75b7972984e2fb92568496d1e9de8/ (numer DOI: 10.71724/5raw-yd56).

4.3.1. Przykład 1 - wspornik krótki

Po wykonaniu analiz dotyczących równomiernie wzmocnionych konstrukcji modularnych, przeniesiono układ obszarów wyznaczonych przez optymalizację topologiczną (Rys. 4.1) na wyznaczone wcześniej struktury. „Wzory” optymalizacji topologicznej pokazują w kolorze obszary, gdzie powinien się znajdować materiał, zaś na biało obszary bez materiału (pustki). „Wzory” te przenoszono przy założeniu wzmocnienia pojedynczego (czyli dany obszar określający materiał na szerokości miał wprowadzany jeden moduł wzmocniony) oraz podwójnego (dwa moduły na szerokości danego obszaru).

Na Rysunkach 4.13. pokazano przeniesienie wzorów w przypadku wspornika o proporcji boków 1:1. W tym przypadku obszary wzmocnione zajmują około 20-28% całej konstrukcji

(wzmocnienie pojedyncze), z największym wzmocnieniem w przypadku struktury sześciokątnej typu I oraz ośmiokątnej typu II. Wzmocnienie podwójne oznacza wzmocnienie około 35-49% modułów w całym układzie, z najmniejszą liczbą wzmocnionych modułów w strukturze sześciokątnej typu I obróconej, zaś największą w przypadku struktury ośmiokątnej typu II. Warto zauważyć, że układ modułów wewnątrz konstrukcji znacznie wpływa na liczbę wzmocnionych modułów – w przypadku struktur typu I liczba modułów wzmocnionych jest zazwyczaj mniejsza ze względu na problem ułożenia ich na liniach skośnych.



Rysunek 4.13 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (po lewej) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (po prawej) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:1.

Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

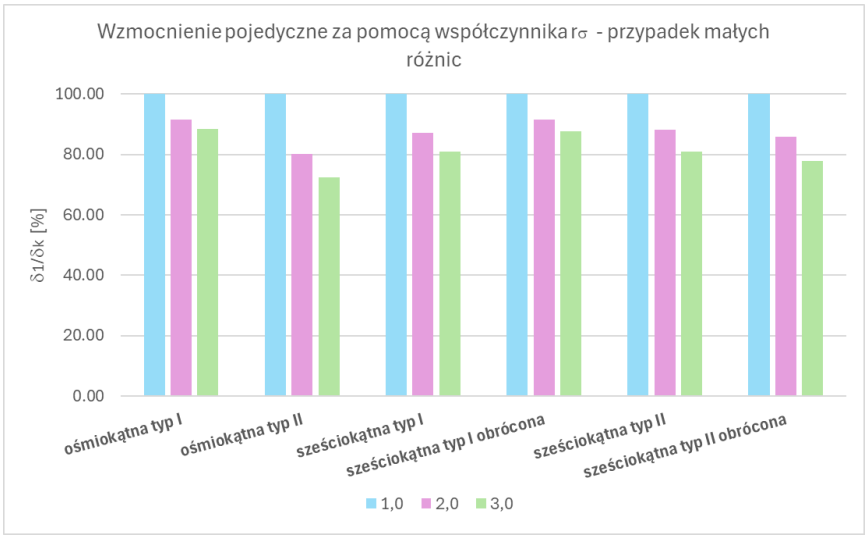
Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Przypadek 1. opisuje sytuację, w której „wzór" wzmocnienia, czyli moduły o większej wartości siły sprężającej, jest sprężony siłą od jeden do trzy razy większą od siły w pozostałych modułach (wartości współczynnika $r_\sigma = 1$ do $r_\sigma = 3$). Jest to sytuacja lekkiego wzmocnienia konstrukcji, które pozwala na zmniejszenie przemieszczeń wybranych węzłów i nieznaczne usztywnienie konstrukcji. W tym przypadku struktura modularna bez obszarów wzmocnień miała ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}01,\ k = 0{,}1,\ m = 1$. Przypadek dla współczynnika $r_\sigma = 1$ jest przypadkiem konstrukcji jednorodnie wzmocnionej, do której odnoszono się w przypadku przeliczania procentowego wzmocnienia struktury.

Analizując wyniki uzyskane przez poszczególne konstrukcje można zauważyć, że pod względem wartości przemieszczeń najmniejsze z nich uzyskuje struktura sześciokątna typu I obrócona.

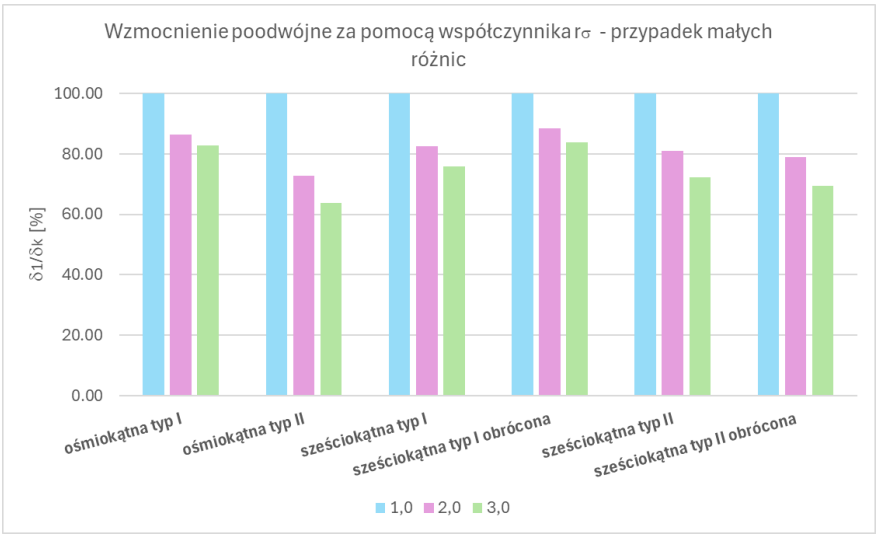
Już w przypadku wzmocnienia jednolitego jest to wartość 193,44 $\frac{Pa}{EA}$, zaś dla współczynnika $r_\sigma = 3{,}0$ przy wzmocnieniu pojedynczym jest to wartość 169,38 $\frac{Pa}{EA}$ (Tab. 1.1 w Zał. 1). Kolejne, niewiele większe przemieszczenia można uzyskać za pomocą struktury ośmiokątnej typu I (dla $r_\sigma = 1{,}0$ to 205,14 $\frac{Pa}{EA}$, a dla $r_\sigma = 3{,}0$ to 181,27 $\frac{Pa}{EA}$, wzmocnienie pojedyncze). Największe ugięcia, znacznie odbiegające od pozostałych wyników uzyskujemy za pomocą struktury ośmiokątnej typu II, gdzie dla $r_\sigma = 1{,}0$ to 614,24 $\frac{Pa}{EA}$, a dla $r_\sigma = 3{,}0$ to 445,16 $\frac{Pa}{EA}$ dla wzmocnienia pojedynczego. Wyniki pozostałych konstrukcji są do siebie zbliżone. Warto zauważyć, że początkowe duże przemieszczenia są niemożliwe do znacznego zmniejszenia nawet przy wykorzystaniu obszarów wzmocnionych – zmniejszone przemieszczenia nadal wynoszą około dwukrotność pozostałych wartości.

Każda z konstrukcji w sytuacji wykorzystania wzmocnienia za pomocą zwiększenia siły sprężającej wykazuje spadek wartości przemieszczeń. Jest to wartość różna w zależności od struktury, jednak, w przypadku pojedynczego wzmocnienia (Rys. 4.14), oscyluje w okolicach od 80% ($r_\sigma = 2$) do nawet 73% ($r_\sigma = 3$) początkowych przemieszczeń konstrukcji sprężonej jednorodnie dla struktury ośmiokątnej typu II (uzyskującej najwyższe wartości przemieszczeń). W przypadku pozostałych układów modularnych wyniki te są mniej wyraźne ze względu na większą sztywność początkową konstrukcji. W przypadku struktury sześciokątnej typu II obróconej wartości te wynoszą kolejno 86% oraz 78% początkowych przemieszczeń. W przypadku pozostałych konstrukcji wyniki są do siebie bardziej zbliżone, struktura sześciokątna typu I oraz sześciokątna typu II pozwalają na uzyskanie spadku przemieszczeń do około 88% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 2{,}0$), a nawet 81% w przypadku większego wzmocnienia ($r_\sigma = 3$). Warto zauważyć, że struktura sześciokątna typu I poza ogólnie niższymi wartościami przemieszczeń, uzyskuje dodatkowo spadki procentowe rzędu około 20%. Struktura sześciokątna typu I obrócona oraz struktura ośmiokątna typu I pozwalają na maksymalne spadki wartości przemieszczeń o około 12%.



Rysunek 4.14 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik krótki).

Podwójne wzmocnienie (Rys. 4.15) pozwala uzyskać spadek przemieszczeń bliski nawet o 37% wartości początkowych przemieszczeń (struktura ośmiokątna typu II, $r_\sigma = 3$). Zbliżone wyniki pozwala uzyskać struktura sześciokątna typu II obrócona, która zyskuje spadki o około 30% ($r_\sigma = 3$). Najmniej wydajne są zaś struktury: ośmiokątna typu I oraz sześciokątna typu I obrócona, dla których wzmocnienie podwójne pozwala uzyskać odpowiednio 82% oraz 83% początkowych przemieszczeń, zaledwie 4 punkty procentowe mniej niż przy wzmocnieniu pojedynczym. Struktury sześciokątne typu I i typu II zaś plasują się w obszarze środkowym – spadki wartości przemieszczeń są w okolicach odpowiednio 76% i 73% początkowej wartości, co powoduje spadek o około 5% więcej niż w przypadku pojedynczego wzmocnienia.



Rysunek 4.15 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik krótki).

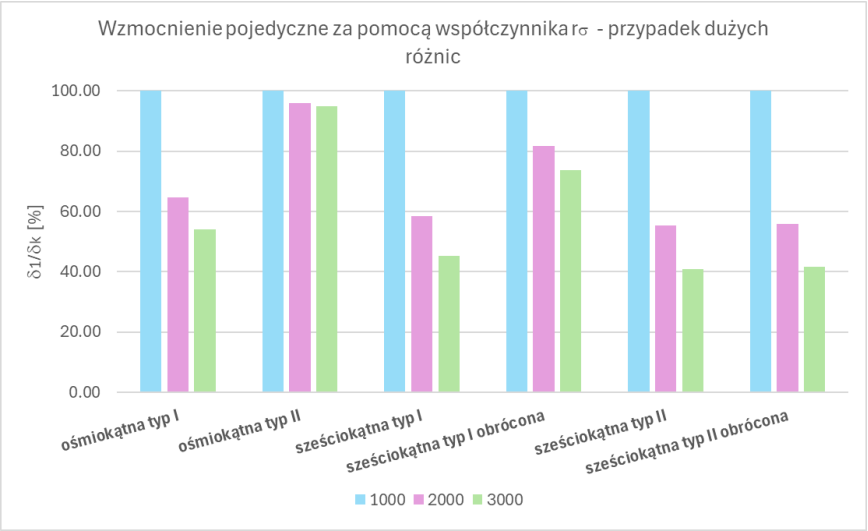
Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

W tym przypadku obszary wzmocnione są sprężone siłą od tysiąca do trzech tysięcy razy większą niż w przypadku obszarów niewzmocnionych (wartości współczynnika $r_\sigma = 1000$ do $r_\sigma = 3000$). Przypadek ten ilustruje sytuację, gdy wzmacniamy jedynie obszary imitujące materiał w konstrukcji topologicznie optymalnej, pozostałe obszary zaś imitują pustkę. W ten sposób starano się zbliżyć jak najbardziej to wyników optymalizacji topologicznej. W tym przypadku układ modularny bez obszarów wzmocnień miał ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}00001,\ k = 0{,}1,\ m = 1$. Punktem odniesienia zawsze są konstrukcje dla przypadku r_σ równie 1000. W tym przypadku oznacza to dwie różne wartości dla wzmocnienia podwójnego i pojedynczego. Takie podejście wynika z faktu, że struktura sprężona tak małą siłą nie jest w stanie uzyskać stabilności pod obciążeniem.

Zgodnie z oczekiwaniami we wszystkich przypadkach wzmocnienie podwójne pozwala na uzyskanie mniejszych przemieszczeń niż w przypadku wzmocnienia podwójnego (Tab. 1.2. w Zał. 1). Należy zauważyć, że samo wzmocnienie pojedyncze struktury sześciokątnej typu I obróconej pozwala uzyskać już ugięcia zbliżone do przeciętnych ugięć konstrukcji równomiernie wzmocnionej przy współczynniku $\sigma = 0{,}01$ i jest to wartość 266,37 $\frac{Pa}{EA}$ dla współczynnika $r_\sigma = 3000{,}0$. Każda z pozostałych konstrukcji uzyskuje już znacznie większe ugięcia, wskazujące na znaczne osłabienie, w szczególności struktura ośmiokątna typu II przy wzmocnieniu pojedynczym nie wykazuje znacznego zmniejszenia wartości przemieszczeń (15045,72 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3000{,}0$), dopiero wzmocnienie podwójne pozwala uzyskać wartości zbliżone do pozostałych konstrukcji (527,28 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3000{,}0$).

W przypadku struktury ośmiokątnej typu II możemy zauważyć, że wzmocnienie pojedyncze jest niewystarczające, pozwala w niewielkim stopniu wzmocnić konstrukcję i spowodować spadek wartości przemieszczeń o około 7% początkowej wartości (Rys. 4.16). W przypadku wzmocnienia podwójnego widać jednak znaczną różnicę, same początkowe przemieszczenia są znacznie mniejsze (15859,44 $\frac{Pa}{EA}$ dla pojedynczego wzmocnienia, 1007,75 $\frac{Pa}{EA}$ dla podwójnego) (Tab. 1.2., Zał. 1.), a dodatkowo wzmocnienie podwójne pozwala na spadek wartości przemieszczeń o połowę (Rys. 4.17). W przypadku struktury sześciokątnej typu II oraz typu II obróconej zauważono, że początkowe wartości przemieszczeń są znaczne, jednak

zastosowanie pojedynczego wzmocnienia ($r_\sigma = 3000{,}0$) pozwala na spadek wartości do około 41-42% początkowych wartości (Rys. 4.16), zaś podwójnego ($r_\sigma = 3000{,}0$) około 45-47% (Rys. 4.17). Struktura ośmiokątna typu I oraz sześciokątna typu I wykazują podatność w początkowych wartościach przemieszczeń, co pozwala na uzyskanie znacznych spadków wartości przemieszczeń przy zastosowaniu lokalnego wzmocnienia ($r_\sigma = 3000{,}0$) – około 55% początkowej wartości przemieszczeń (wzmocnienie pojedyncze – Rys. 4.16) i 60% (wzmocnienie podwójne – Rys. 4.17) w przypadku struktury ośmiokątnej oraz odpowiednio 45% i 50% w przypadku struktury sześciokątnej. Warto zauważyć, że struktura sześciokątna typu I obrócona od początku wykazuje znaczną sztywność, przez co uzyskane spadki wartości przemieszczeń są mniejsze i wynoszą o około 30% (Rys. 4.16 i 4.17).

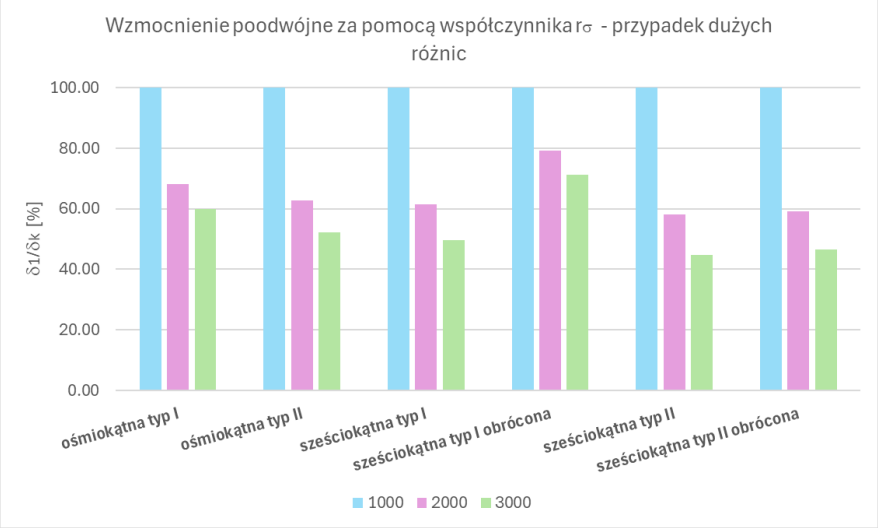


Rysunek 4.16 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik krótki).

Warto zauważyć, że zastosowanie podwójnego wzmocnienia pozwala na uzyskanie ugięć zbliżonych do wartościami do konstrukcji jednorodnej w przypadku większości układów (znacznie odbiega ponownie struktura ośmiokątna typu II). Warto jednak zauważyć, że podwójne wzmocnienie tej struktury pozwala już uzyskać stabilną konstrukcję.

Z obserwacji wyników możemy zauważyć zatem, ze wprowadzenie zarówno wzmocnień pojedynczych, jak i podwójnych pozwala na spadek przemieszczeń o nawet połowę. W przypadku struktur sześciokątnych wykonanych za pomocą podstawowych modułów zauważamy największe spadki procentowe przemieszczeń, jednak ich wartości przemieszczeń

są zbliżone do układów z modułami obróconymi. W przypadku dużych wartości r_σ możemy stwierdzić, że jesteśmy w stanie modelować realne przypadki optymalizacji topologicznej.



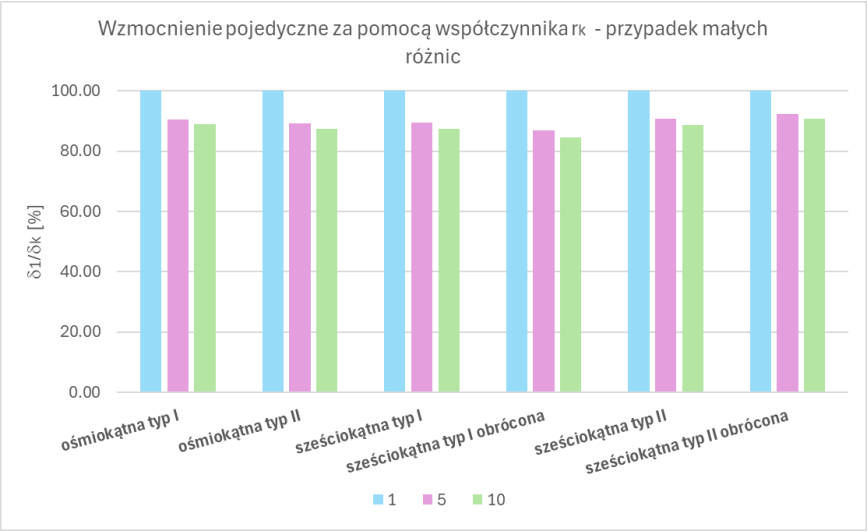
Rysunek 4.17 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik krótki).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

Analizowano sytuację, w której wzmocnienie jest wprowadzane już na etapie budowy struktury, tworząc konstrukcję, która od początku jest optymalna topologicznie dla przyjętego obciążenia. W tym przypadku układ modularny bez obszarów wzmocnień miał ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}01,\ k = 0{,}1, m = 1$. Obszary wzmocnione zawierają moduły sztywniejsze o określoną wartość – przekroje cięgien są zwiększane od przypadku dziesięciokrotnie mniejszego od przekroju zastrzałów do przypadku, w którym cięgna i zastrzały mają równe pola. Spadek procentowy przemieszczeń jest wyliczany w porównaniu do struktur, których wartość k wynosi 0,1 w całej konstrukcji $(r_k = 1)$.

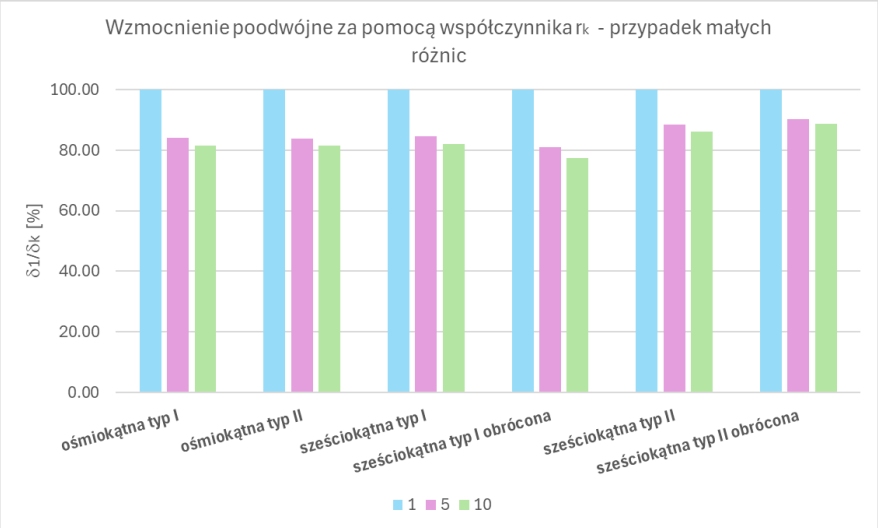
Analizując wpływ zmiany przemieszczeń pod wpływem zmiany stosunku przekrojów cięgien do zastrzałów możemy zauważyć, że ponownie struktura sześciokątna typu I obrócona pozwala uzyskać wyniki o najniższych przemieszczeniach (202,49 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_k = 10$, wzmocnienie pojedyncze), zaś struktura ośmiokątna typu II o najwyższej wartości przemieszczeń (537,21 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_k = 10$, wzmocnienie pojedyncze) (Tab. 1.3. w Zał. 1). Pod wpływem wzmocnienia (zarówno pojedynczego, jak i podwójnego) możemy zauważyć spadki podobne do przypadku wzmacniania poprzez stany samonaprężenia w przypadku niewielkich wartości współczynnika r_σ.

Wzmacnianie konstrukcji tensegrity poprzez usztywnianie modułów (zwiększanie przekrojów cięgien, $r_k = 10$) pozwala na największe procentowe spadki przemieszczeń rzędu około 20% w przypadku podwójnego wzmocnienia (Rys. 4.19) i około 10% w przypadku wzmocnienia pojedynczego (Rys. 4.18). Spadek przemieszczeń (procentowy) w przypadku pracy z geometrią konstrukcji pozwala uzyskać zmiany na podobnym poziomie dla wszystkich struktur – w szczególności w przypadku wzmocnienia pojedynczego. W większości przypadków wprowadzenie lokalnego wzmocnienia ze współczynnikiem $r_k = 5$ pozwala już na uzyskanie około 90% początkowych przemieszeń (struktury: ośmiokątna typu I i II, sześciokątna typu I, typu II oraz typu II obrócona), a nawet 87% w przypadku struktury sześciokątnej typu I obróconej.



Rysunek 4.18 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik krótki).

W przypadku wzmocnienia podwójnego struktury sześciokątne typu II: podstawowa i obrócona uzyskują mniejsze spadki wartości przemieszczeń – przy największym wzmocnieniu ($r_k = 10$) pozwalają kolejno na uzyskanie 86% i 88% początkowych przemieszczeń (Rys. 4.19). Kolejno struktury: ośmiokątna typu I, typu II oraz sześciokątna typu I pozwalają na spadek przemieszczeń do około 82% początkowych przemieszczeń ($r_k = 10$), zaś struktura sześciokątna typu I obrócona prowadzi do wartości odpowiednio 77%.



Rysunek 4.19 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik krótki).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Analizowano sytuację, w której wzmocnienie jest wprowadzane już na etapie budowy konstrukcji, jednak wzmocnieniu podlegają jedynie wybrane zastrzały (A lub B). W przypadku wzmacniania zastrzałów A współczynnik $m = \frac{A_{z,A}}{A_{z,B}}$, w przypadku wzmacniania zastrzałów B współczynnik ten wynosi $m = \frac{A_{z,B}}{A_{z,A}}$. Struktura modularna bez obszarów wzmocnień miała ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}01,\ k = 0{,}1,\ m = 1$, zaś różnica pomiędzy przekrojami zastrzałów rosła od konstrukcji o jednolitym wzmocnieniu $(r_m = 1)$ do struktury z miejscowym dziesięciokrotnym wzrostem wartości przekrojów zastrzałów $(r_m = 10)$.

Wzmocnienie zastrzału A

Wzmocnienie geometrii konstrukcji za pomocą wzmocnienia zastrzałów A pozwala uzyskać bardzo małe zmiany w wartości przemieszczeń, są one rzędu zaledwie kilku procent – największe w przypadku podwójnego wzmocnienia struktury ośmiokątnej typu I (95,84% dla $r_m = 10$) oraz sześciokątnej typu I (97,69% dla $r_m = 10$). W przypadku struktur sześciokątnych obróconych wzmocnienie zastrzałów A nie wykazuje żadnej zmiany w zachowaniu konstrukcji (Tab. 1.4. w Zał. 1).

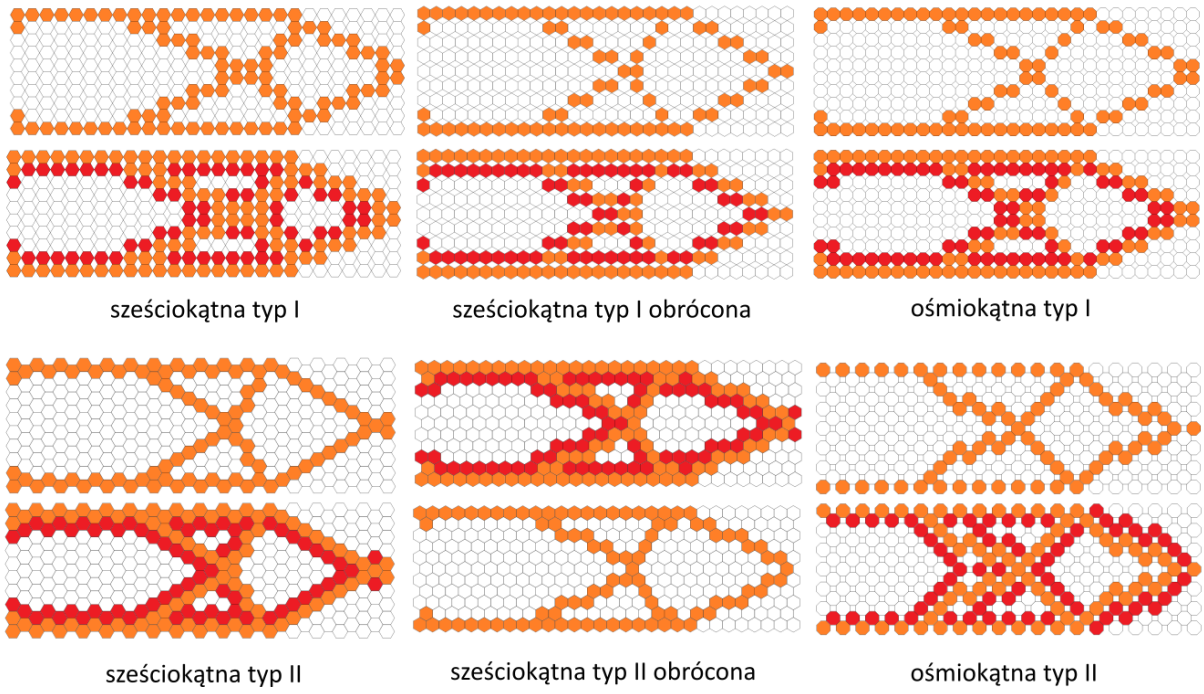
Wzmocnienie zastrzału B

Wzmocnienie geometrii struktury za pomocą wzmocnienia zastrzałów B pozwala uzyskać znikome zmiany w wartości przemieszczeń, są one rzędu zaledwie dziesiątych części

procenta. Jedynie struktura sześciokątna typu I obrócona wykazuje zmiany w wartości przemieszczeń (95,49% dla $r_m = 10$, wzmocnienie pojedybcze) – jest to jedna z konstrukcji, która nie wykazywała zmian w przypadku zmiany przekroju zastrzału A. Warto zauważyć, że podwójne wzmocnienie zastrzałów B pozwala na znaczny spadek przemieszczeń w przypadku struktury sześciokątnej typu I obróconej (87,88% dla $r_m = 10$) (Tab. 1.5. w Zał. 1.).

4.3.2. Przykład 2 - wspornik średniej długości

W przypadku wspornika o proporcji boków 1:3 liczba modułów wzmocnionych (przypadek wzmocnienia pojedynczego) jest bardziej równomierne pomiędzy poszczególnymi układami i wynosi od 26% (struktura ośmiokątna typ I) do 36% (struktura sześciokątna typ I). Wzmocnienie podwójne oznacza wzmocnienie od 50% (struktura ośmiokątna typ I) do 60% (struktura sześciokątna typ I) (Rys. 4.20). Mimo trzykrotnego wydłużenia samej konstrukcji, wzmocnieniu podlega zaledwie o 10% więcej modułów.



Rysunek 4.20 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na górze) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na dole) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:3.

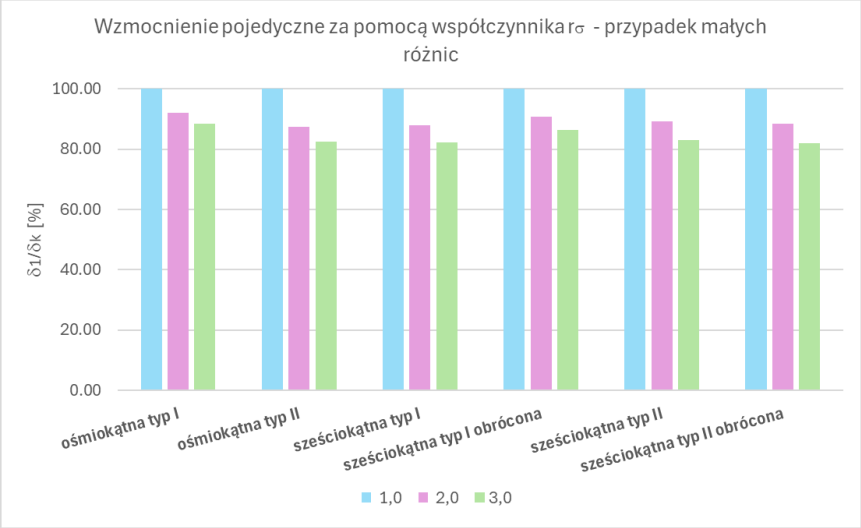
Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Analogicznie do przypadku wspornika krótkiego, wspornik średniej długości uzyskuje największe wartości przemieszczeń dla struktury ośmiokątnej typu II (1651,92 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3{,}0$,

wzmocnienie pojedyncze). Struktura sześciokątna typu I obrócona ponownie pozwala uzyskać najmniejsze przemieszczenia (633,02 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3{,}0$, wzmocnienie pojedyncze) (Tab. 1.6. w Zał. 1).

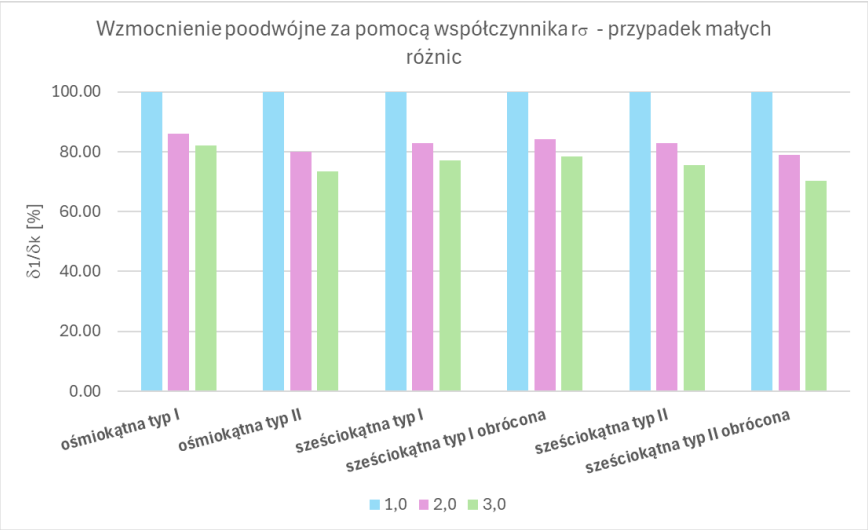
Warto zauważyć, że wzmocnienie pojedyncze ponownie pozwala uzyskać spadek przemieszczeń o około 12-18% względem bazowego przemieszczenia konstrukcji jednorodnie sprężonej (Rys. 4.21). Różnice pomiędzy poszczególnymi układami modularnymi są niewielkie – najmniejszy wpływ ma wzmocnienie na strukturę ośmiokątną typu I oraz sześciokątną typu I obróconą, które przy wzmocnieniu rzędu $r_\sigma = 3{,}0$ uzyskują odpowiednio 89% i 86% początkowych wartości przemieszczeń. Kolejno, struktury sześciokątna typu I oraz typu II podstawowa i obrócona pozwalają na zwiększenie tych przemieszczeń do około 82-83%, zaś struktura ośmiokątna typu II pozwala na spadek do nawet 82%. Warto jednak zauważyć, że największe wartości przemieszczeń uzyskuje struktura ośmiokątna typu II, najmniejsze zaś sześciokątna typu I obrócona.



Rysunek 4.21 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik średniej długości).

W przypadku wzmocnienia podwójnego (Rys. 4.22) zauważono znaczny spadek przemieszczeń przy użyciu struktury sześciokątnej typu II obróconej (około 70% dla $r_\sigma = 3{,}0$), zbliżone procentowo wartości uzyskuje struktura ośmiokątna typu II (około 73% dla $r_\sigma = 3{,}0$). Warto zauważyć, że co do wartości najmniejsze przemieszczenia ciągle uzyskuje struktura sześciokątna typu I obrócona, dodatkowo uzyskując spadek do około 78,5% początkowych wartości przemieszczeń ($r_\sigma = 3{,}0$). Pozostałe konstrukcje procentowo uzyskują dosyć podobne

wyniki – w przypadku $r_\sigma = 3{,}0$ struktura ośmiokątna typu I wykazuje spadek do 82% początkowych przemieszczeń, sześciokątna typu I około 77%, zaś sześciokątna typu II około 76%.



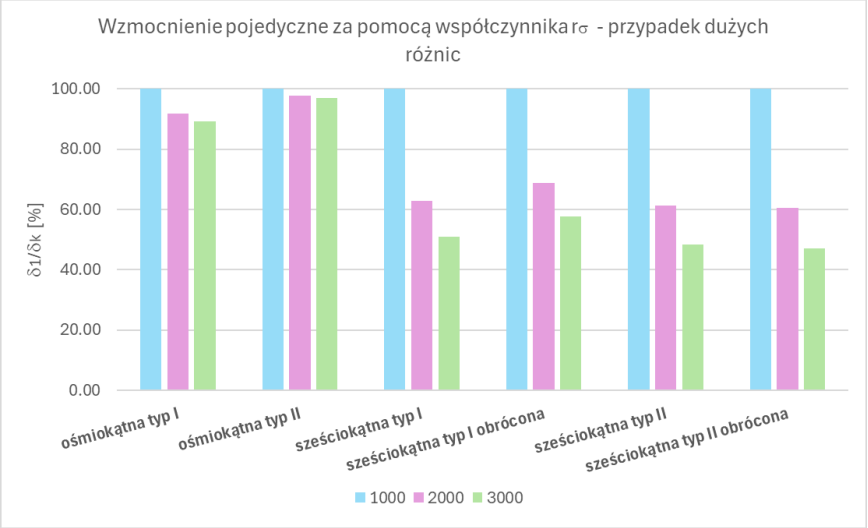
Rysunek 4.22 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik średniej długości).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

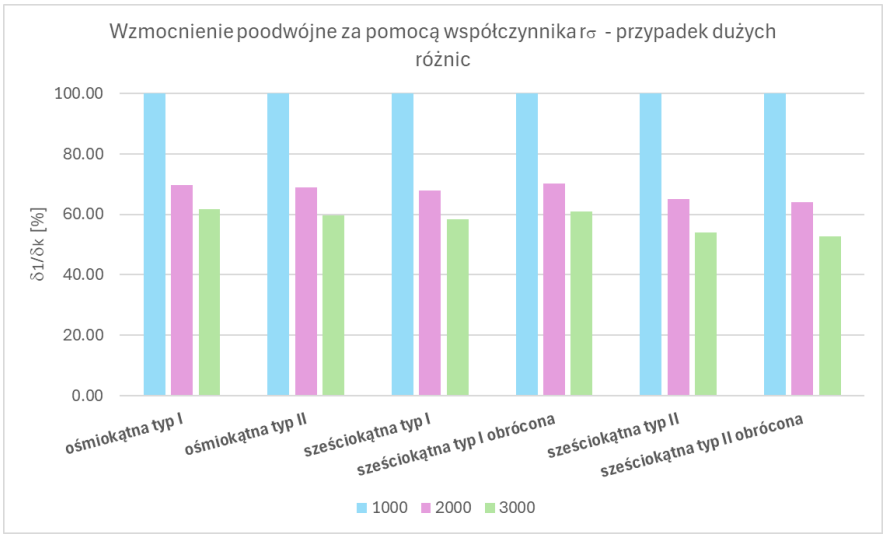
W przypadku znacznych różnic wartości σ w obszarach wzmocnionych i niewzmocnionych można zauważyć, że struktury sześciokątne (niezależnie od typu) uzyskują znacznie mniejsze przemieszczenia w przypadku wzmocnienia pojedynczego: 1061,67 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3000{,}0$ w przypadku struktury sześciokątnej typu I; 1523,01 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3000{,}0$ w przypadku struktury sześciokątnej typu II. Wzmocnienie podwójne pozwala już uzyskać wartości zbliżone do siebie pomiędzy rodzajami modułu budującego. Wyjątkiem ponownie są struktury ośmiokątne (w szczególności typu II), które wymagają znacznie większej siły sprężającej, aby uzyskać sztywną konstrukcję (np. struktura ośmiokątna typu I dla $r_\sigma = 3000{,}0$ uzyskuje wartość 10134,19 $\frac{Pa}{EA}$ dla wzmocnienia pojedynczego, zaś 1054,88 $\frac{Pa}{EA}$ dla wzmocnienia podwójnego) (Tab. 1.7. w Zał. 1).

Obserwując wykresy na Rys. 4.23, 4.24 można zauważyć jak istotne jest minimalne wymagane wzmocnienie dla każdego typu konstrukcji – przy wzmocnieniu pojedynczym (Rys. 4.23) struktury ośmiokątne znacznie odbiegają od struktur sześciokątnych. Te drugie uzyskują spadek wartości przemieszczeń nawet o połowę (dla $r_\sigma = 3000$ struktura sześciokątna typu II

obrócona uzyskuje 47% początkowych przemieszczeń, typu II około 49%, a sześciokątna typu I – 51%), podczas gdy dla struktur ośmiokątnych obu typów te wartości są bliższe spadkom o 10-14% początkowych wartości. Przy wzmocnieniu podwójnym (Rys. 4.24) możemy już zauważyć w miarę równomierny spadek dla wszystkich wybranych konstrukcji, z największą redukcją przemieszczeń zauważalną dla struktur sześciokątnych typu II (podstawowej i bróconej), które uzyskują znaczny spadek do odpowiednio 54% i 53% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 3000$). W przypadku pozostałych konstrukcji wartości te zbliżają się do około 60%: struktura sześciokątna typu I uzyskuje 58,4%, typu I obrócona 61%, zaś ośmiokątna typu I – 61,7%, a typu II – 59,6%).



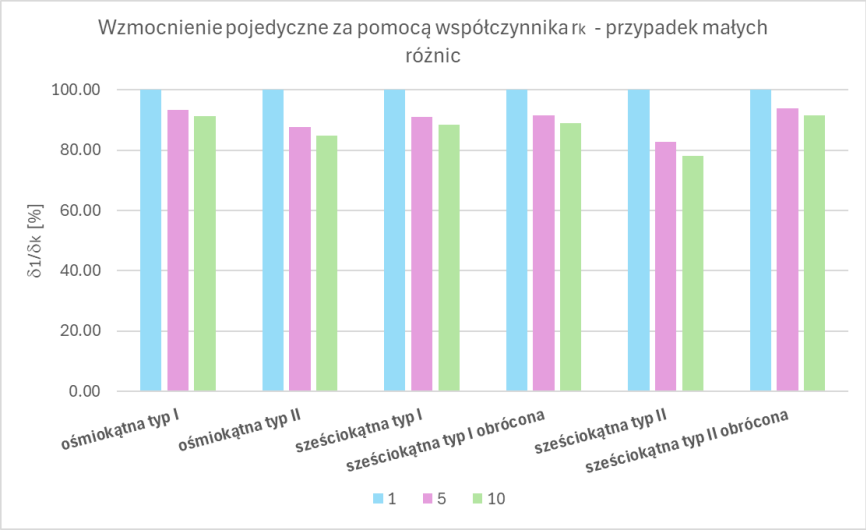
Rysunek 4.23 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik średniej długości).



Rysunek 4.24 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik średniej długości).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

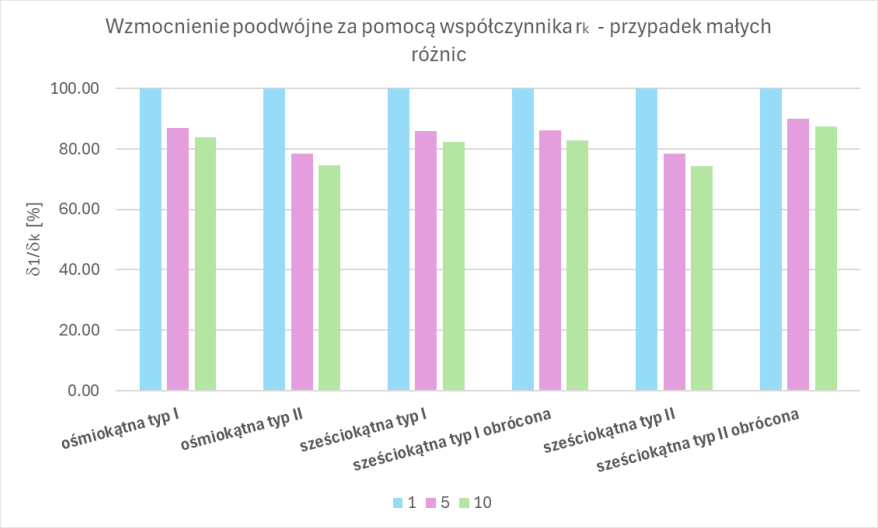
Wzmacnianie konstrukcji na etapie budowy poprzez zmianę współczynnika k pozwala uzyskać spadki przemieszczeń w okolicach 10% do nawet 20% początkowych wartości przemieszczeń (Tab. 1.8. w Zał. 1) - jest to mniej (w przypadku niektórych układów porównywalnie) niż w przypadku manipulacji współczynnikiem σ. Warto przy tym zauważyć, że takie zmniejszenie przemieszeń dodatkowo wymaga stworzenia konstrukcji, dla której przekroje cięgien i zastrzałów są sobie równe. Spadek przemieszczeń w przypadku pojedynczego wzmocnienia jest szczególnie zauważalny w przypadku struktury sześciokątnej i ośmiokątnej (obie typu II), które pozwalają na uzyskanie odpowiednio około 83% i 88% początkowych przemieszczeń w przypadku $r_k = 5$, a nawet około 78% i 85% początkowych przemieszczeń w przypadku wzmocnienia $r_k = 10$ (Rys. 4.25). W przypadku pozostałych konstrukcji wyniki są bardziej porównywalne i pozwalają na wyniki bliższe wartościom około 90% - struktura ośmiokątna typu I pozwala na około 91% początkowych przemieszczeń, sześciokątna typu I – 88,5%, typu I obrócona – 89%, zaś struktura sześciokątna typu II obrócona – 91,7%.



Rysunek 4.25 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik średniej długości).

Warto też zwrócić uwagę na znaczący spadek przemieszczeń w przypadku użycia wzmocnienia podwójnego (Rys. 4.26). Zmniejszenie przemieszczeń o około 10-15% jest widoczne już przy zastosowaniu 5-krotnie większych przekrojów zastrzałów w lokalnie wzmocnionych modułach. Struktura sześciokąta obrócona (obu typów) uzyskuje najmniejsze spadki przemieszczeń (typu

I – około 83%, typu II – 87,5% początkowych wartości przemieszczeń dla $r_k = 10$), w przypadku układów sześciokątnych podstawowych wyniki te są nieznacznie niższe w przypadku struktury sześciokątnej typu I – około 83% początkowych przemieszczeń, zaś w przypadku struktury typu II uzyskujemy nawet 74% początkowych przemieszczeń. Analogicznie duży spadek uzyskuje struktura ośmiokątna typu II, która również ma duże początkowe wartości przemieszczeń – duża podatność pozwala na uzyskanie spadku przemieszczeń o około 25%. Struktura ośmiokątna typu I uzyskuje wynik około 84%, charakterystyczny dla pozostałych układów.



Rysunek 4.26 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik średniej długości).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

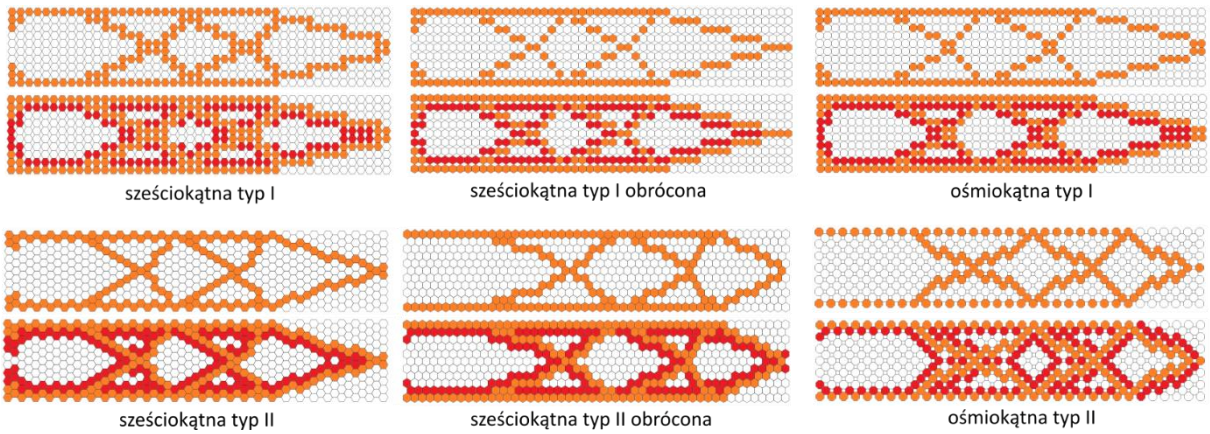
Wraz z wydłużeniem konstrukcji, zauważalny staje się wpływ wzmacniania zastrzałów na reakcję całego układu. W przypadku wzmocnienia zastrzałów A możemy zaobserwować, w przypadku struktur ośmiokątnej i sześciokątnej typu I wpływ rzędu około 15-20% - wymaga on jednak nawet 10-krotnego zwiększenia przekrojów zastrzałów (Tab. 1.9 w Zał. 1). W przypadku struktur typu II – sześciokątnej i ośmiokątnej, uzyskujemy wyniki bliskie kilku procentom. Wzmocnienie podwójne pozwala obniżyć te wartości o kilka procent. Wzmacnianie zastrzałów A nie wpływa natomiast na struktury sześciokątne obrócone – obniżenie wartości przemieszczeń można liczyć w setnych częściach procenta.

Wzmocnienie zastrzału B

Ponownie, jak w przypadku wspornika krótkiego, wzmocnienie zastrzałów B pozwala uzyskać spadki dla struktury sześciokątnej typu I obróconej (83,21% dla $r_m = 10$, wzmocnienie pojedyncze) oraz struktury sześciokątnej typu II (95,23% dla $r_m = 10$, wzmocnienie pojedyncze) (Tab. 1.10. w Zał. 1.). Struktura obrócona pozwala na uzyskanie spadków bliskich 17% (wzmocnienie pojedyncze), co jest bliskie zmianom geometrii za pomocą zmiany współczynnika k – a należy zauważyć, że w tym przypadku zmieniamy zaledwie niewielką część prętów. Ponownie, wzmocnienie podwójne pozwala zwiększyć ten spadek o kilka procent.

4.3.3. Przykład 3 - wspornik długi

Wspornik o proporcji boków 1:5 (Rys. 4.27) wymaga dla przypadku pojedynczego wzmocnienia dokonanie zmian w 30%-38% modułów, dla wzmocnienia podwójnego wzmocnione zostanie od 55% do 63% modułów. Ponownie najmniejsza liczba modułów wzmocniona jest w przypadku struktury ośmiokątnej typu I, największa zaś w przypadku struktury sześciokątnej typu II. Warto zauważyć, że wraz z wydłużeniem konstrukcji idzie wyrównanie procentowego ilorazu modułów wzmocnionych do niewzmocnionych – różnice to zaledwie kilka procent.



Rysunek 4.27 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na górze) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na dole) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:5.

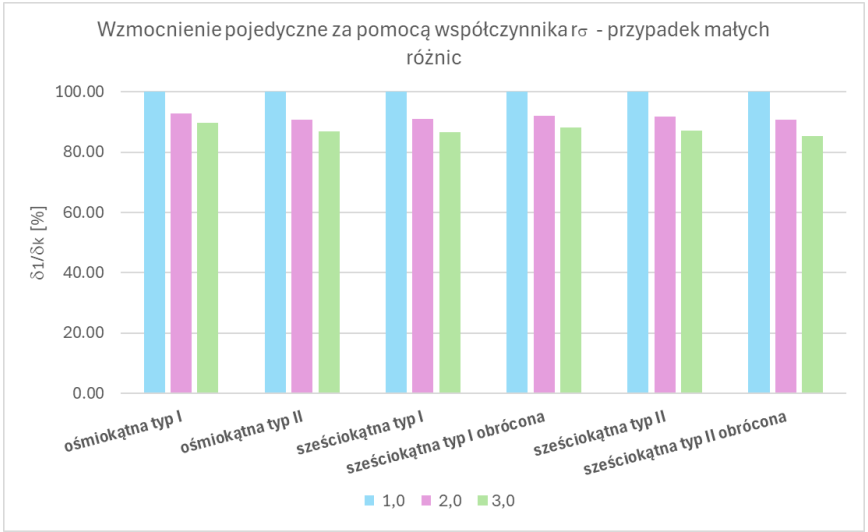
Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Wydłużenie konstrukcji zwiększyło wartości ugięć poszczególnych struktur z zachowaniem początkowego układu – struktura ośmiokątna typu II uzyskuje największe

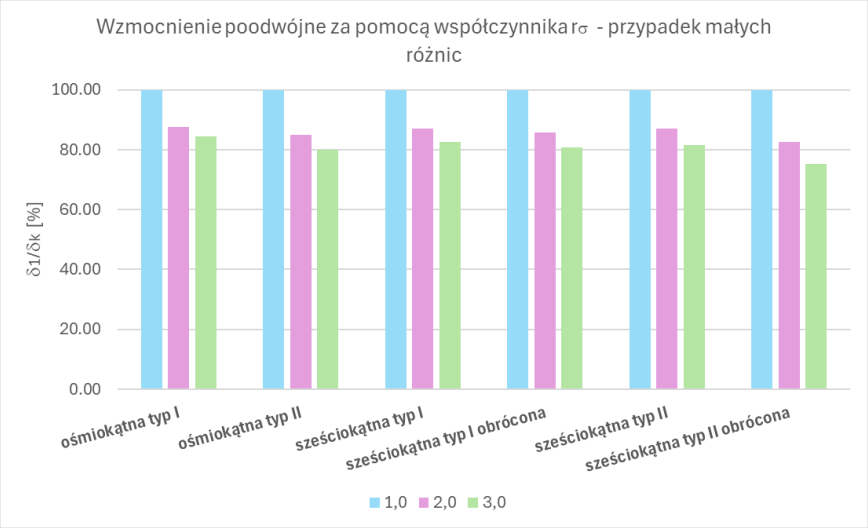
wartości przemieszczeń (3580,57 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3{,}0$, wzmocnienie podwójne), co sprawia duże trudności z początkowym wzmocnieniem, zaś struktura sześciokątna typu I obrócona jest najsztywniejszą z konstrukcji (1235,09 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 3{,}0$, wzmocnienie podwójne), a tym samym najmniej podatną na lokalne wzmocnienia (Tab. 1.11., Zał. 1.).

Wraz z wydłużeniem konstrukcji, możemy zauważyć coraz większe zrównanie wyników pomiędzy poszczególnymi typami struktur – dwukrotne wzmocnienie obszarów pozwala na około 10-12% spadek wartości przemieszczeń (wzmocnienie pojedyncze) (Rys. 4.28) i około 15-20% spadek dla wzmocnień podwójnych (Rys. 4.29). W przypadku wzmocnienia pojedynczego struktury sześciokątnej typu II obróconej oraz struktury ośmiokątnej typu II możemy zauważyć większe spadki przemieszczeń niż w przypadku pozostałych typów konstrukcji – przemieszczenia przy wzmocnieniu $r_\sigma = 3{,}0$ wynoszą one kolejno 85,5% oraz 87% początkowych przemieszczeń (Rys. 4.28). Wśród wyróżniających się układów modularnych można jeszcze zauważyć strukturę sześciokątną typu I obróconą, która uzyskuje w takim przypadku 88% początkowych przemieszczeń oraz strukturę sześciokątną typu I oraz typu II z wynikiem 87% początkowych przemieszczeń. Struktura ośmiokątna typu I uzyskuje w tym przypadku około 90% początkowych wartości przemieszczeń. Jest to trend powtarzający się dla przypadku wspornika, występujący również dla konstrukcji średniej długości oraz krótkiej. Należy jednak zauważyć, że struktura sześciokątna ciągle uzyskuje lepsze wyniki niż ośmiokątna.



Rysunek 4.28 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik długi).

Wzmocnienie podwójne również nie wprowadza znacznych zmian pomiędzy poszczególnymi układami modułów – warto jednak zauważyć, że zauważalny jest znaczny spadek w przypadku struktury sześciokątnej typu II obróconej (dla $r_\sigma = 2{,}0$ otrzymujemy spadek o około 22%, zaś dla $r_\sigma = 3{,}0$ spadek o około 25% początkowych przemieszczeń) (Rys. 4.29). Pozostałe konstrukcje uzyskują w tym przypadku około 80% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 3{,}0$), z najmniejszym spadkiem w przypadku struktury ośmiokątnej typu I (84,4%) oraz najmniejszym w przypadku struktury ośmiokątnej typu II (79,9%).

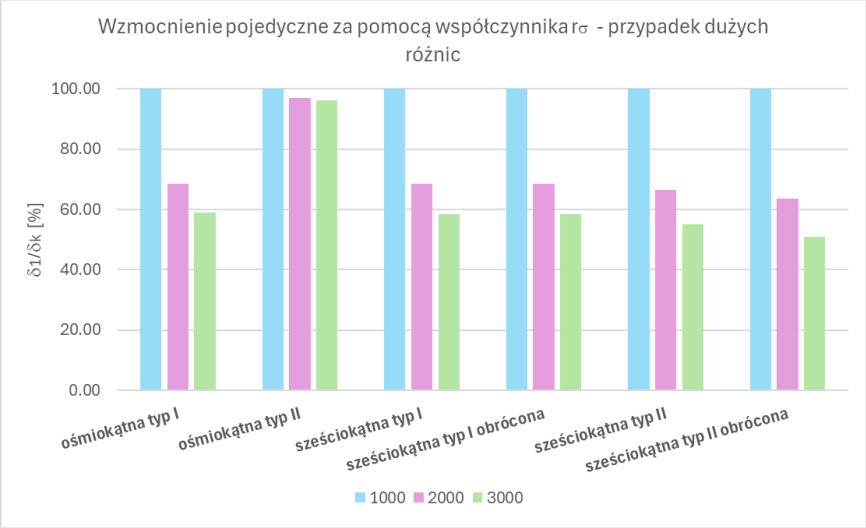


Rysunek 4.29 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (wspornik długi).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

Ponownie, obserwując wyniki (Tab. 1.12 w Zał. 1.) zauważamy, że struktura ośmiokątna typu II potrzebuje znacznie większego wzmocnienia niż pozostałe układy modularne, aby uzyskać podobne wartości przemieszczeń: przy wzmocnieniu pojedynczym dla $r_\sigma = 3000{,}0$ uzyskuje przemieszczenia o wartości 123353,23 $\frac{Pa}{EA}$, zaś przy wzmocnieniu podwójnym: 5251,49 $\frac{Pa}{EA}$. Wzmocnienie pojedyncze jest niewystarczające i nie pozwala na dostateczne usztywnienie struktury, przez co wartości te odbiegają znacznie od pozostałych. Wraz z wydłużeniem konstrukcji, również wyniki dla struktur sześciokątnych obróconych są coraz bardziej odległe od pozostałych układów – układ ten uzyskuje przemieszczenia rzędu 1600 $\frac{Pa}{EA}$ przy wzmocnieniu podwójnym, gdy pozostałe struktury uzyskują wartości przemieszczeń rzędu 2000 $\frac{Pa}{EA}$ lub więcej.

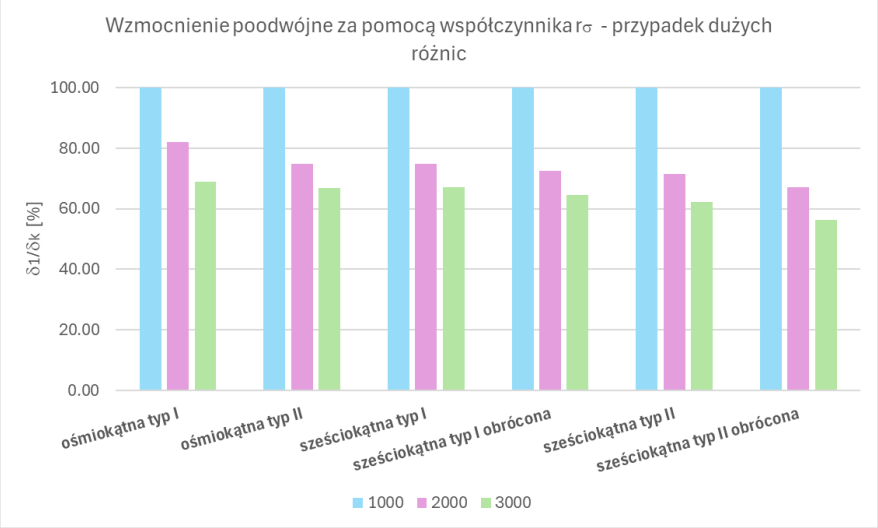
Mimo dużych zmian w rozmiarze konstrukcje, wzory topologiczne pozwalają na wzmocnienie układów w podobnym stopniu – jest to około 30% przy wzmocnieniu $r_\sigma = 2000$ do nawet 40-45% przy wzmocnieniu $r_\sigma = 3000$ (Rys. 4.30). Wzmocnienie pojedyncze nie jest wystarczające w przypadku struktury ośmiokątnej typu II (spadki przemieszczeń o zaledwie kilka procent), zaś w przypadku struktury sześciokątnej typu II obróconej uzyskujemy 51% początkowej wartości przemieszczeń dla przypadku $r_\sigma = 3000$. Zbliżony wynik uzyskuje również struktura sześciokątna typu II – jest to 55% początkowej wartości przemieszczeń. Pozostałe konstrukcje – ośmiokątna typu I, sześciokątna typu I podstawowa i obrócona uzyskują odpowiednio 59%, 58% i 58% początkowych przemieszczeń.



Rysunek 4.30 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik długi).

Warto zauważyć, że w przypadku wzmacniania o dużej wartości współczynnika r_σ punktem odniesienia zawsze jest początkowa konstrukcja jednorodnie wzmocniona, są to różne wartości dla wzmocnienia pojedynczego (Rys. 4.30) i podwójnego (Rys. 4.31). Oznacza to, że wzmocnienia tego typu procentowo dadzą zbliżoną wartość, ale same przemieszczenia mają różne wartości. W przypadku wzmocnienia podwójnego (Rys. 4.31) możemy zauważyć podobne zachowanie wśród wszystkich układów – zaczyna również pracować struktura ośmiokątna typu II, której wzmocnienie lokalne pozwala uzyskać 67% początkowej wartości przemieszczeń ($r_\sigma = 3000$). Pozostałe konstrukcje uzyskują zbliżone wyniki: struktura ośmiokątna typu I oraz struktura sześciokątna typu I pozwala na spadek wartości przemieszczeń do 67%, struktura sześciokątna typu I obrócona – 64%, zaś struktury sześciokątne typu II podstawowa i obrócona

pozwalają na największe usztywnienie konstrukcji – 62% i 56% początkowej wartości przemieszczeń.



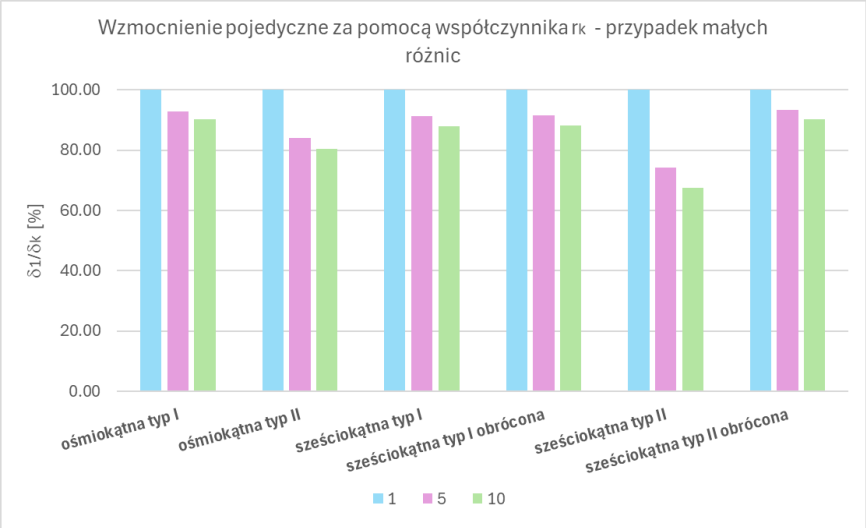
Rysunek 4.31 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (wspornik długi).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

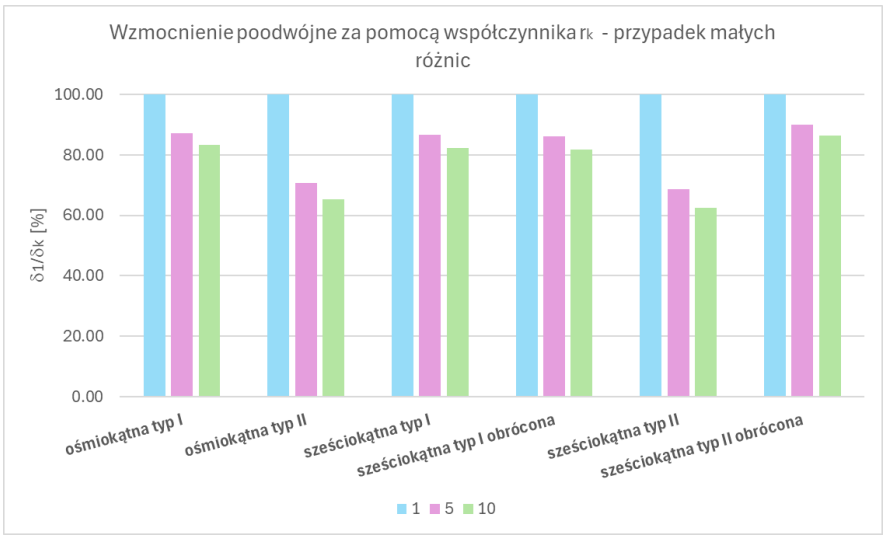
Wzmacnianie struktury za pomocą zmiany jej oryginalnej geometrii wraz ze wzrostem rozmiarów konstrukcji daje (w naturalny sposób) większe efekty w przypadku układów o większych rozmiarach. W przypadku wspornika krótkiego wyniki wzmacniania za pomocą zmiany stosunku przekrojów pozwalał uzyskać wyniki porównywalne do zmian wartości sprężenia. W przypadku wspornika długiego można zauważyć już znaczne spadki wartości przemieszczeń nawet przy pięciokrotnej zmianie powierzchni przekroju (wzmocnienie pojedyncze, $r_k = 5$) w przypadku struktury sześciokątnej typu II przemieszczenie jest zmniejszone o około 25% (Rys. 4.32). Zwiększenie wzmocnienia lokalnego do $r_k = 10$ pozwala na spadek aż o 32% początkowych wartości przemieszczeń. Znaczne spadki zauważono również w przypadku struktury ośmiokątnej typu II – 80% początkowej wartości przemieszczeń w przypadku $r_k = 10$. W tym samym przypadku pozostałe konstrukcje uzyskują około 90% początkowych przemieszczeń.

W przypadku wzmacniania za pomocą zmiany współczynnika k najlepsze wyniki osiąga struktura sześciokątna typu II (która w przypadku konstrukcji krótkich nie była tak aktywna) – jednak jej ostateczna różnica pomiędzy wzmocnieniem pojedynczymi modułami (67%) (Rys. 4.32), a podwójnymi (62%) jest niewielka (Rys. 4.33). Znaczny wpływ jednak ta zmiana

ma na strukturę ośmiokątną, która przy użyciu podwójnego wzmocnienia osiąga znaczne procentowe spadki w wartościach przemieszczeń (od 20% dla wzmocnienia pojedynczego do 35% w przypadku wzmocnienia podwójnego dla $r_k = 10$). Jednocześnie konstrukcje te osiągają znaczne spadki przemieszeń, ponieważ od początku są znacznie bardziej podatne. Pozostałe przypadki pozwalają na spadek o około 14-17% początkowej wartości przemieszczeń.



Rysunek 4.32 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik długi).



Rysunek 4.33 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (wspornik długi).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

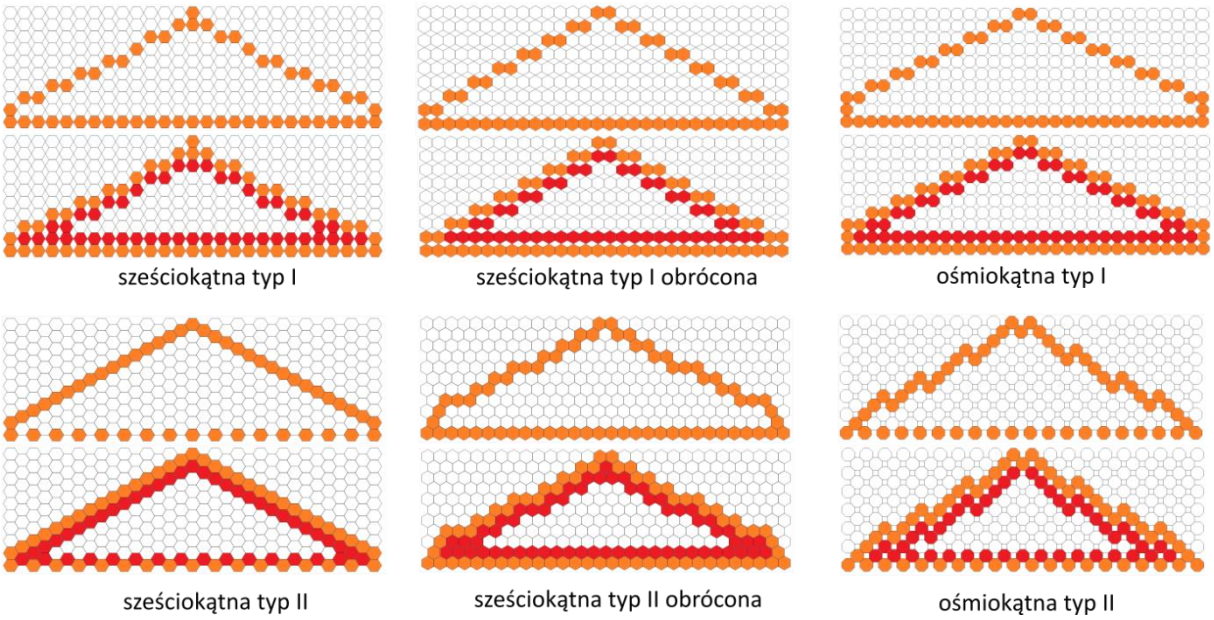
Znaczenie wzmocnienia samych zastrzałów zaczyna być widoczne przy konstrukcjach, które mają wiele modułów. Zaobserwowano znaczne spadki w porównaniu do struktury średniej długości – w przypadku konstrukcji długiej wzmocnienie pojedyncze pozwala na obniżenie wartości przemieszczeń nawet o 30-35% (struktura ośmiokątna typu I i sześciokątna typu I) oraz niewielkie spadki w okolicach 5-10% dla struktury ośmiokątnej typu II i sześciokątnej typu II (Tab. 1.14. w Zał. 1). Układy te były również aktywne w pozostałych rozpatrywanych długościach konstrukcji. Wzmocnienie podwójne pozwala uzyskać spadki nawet o wartości 40% w stosunku do struktury jednorodnie wzmocnionej. W przypadku struktur obróconych zmiany przekrojów zastrzałów nie wprowadzają zmian w ich zachowaniu.

Wzmocnienie zastrzału B

Analogicznie do przypadku wspornika średniej długości, wzmocnienie zastrzałów B aktywuje struktury sześciokątną typu I obróconą (około 70% początkowej wartości przemieszczeń) oraz sześciokątną typu II (około 90%) (Tab. 1.15 w Zał. 1.). Tak jak w przypadku zmiany przekrojów zastrzałów A, tak samo w tym przypadku zmiany przekrojów zastrzałów B wydłużenie konstrukcji powoduje wyższą aktywację struktur. Ponownie są to wzmocnienia o 10-20% większe niż w przypadku konstrukcji średniej długości.

4.3.4. Przykład 4 - belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą

Belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą była rozpatrywana w dwóch przypadkach – z dodatkowym wzmocnieniem (Rys. 4.34) oraz bez niego (Rys. 4.41). W przypadku braku dodatkowego wzmocnienia, przy układzie z pojedynczymi modułami, konstrukcje w ogólności wymagały wzmocnienia około 20% - 22% modułów. Wyjątkiem była tylko struktura sześciokątna typu II, gdzie wzmocnione zostało 16% modułów. Wzmocnienie wymagające podwójnych modułów zwiększało iloraz modułów wzmocnionych do całej konstrukcji do około 40%.



Rysunek 4.34 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej jedną siłą (bez wzmocnienia).

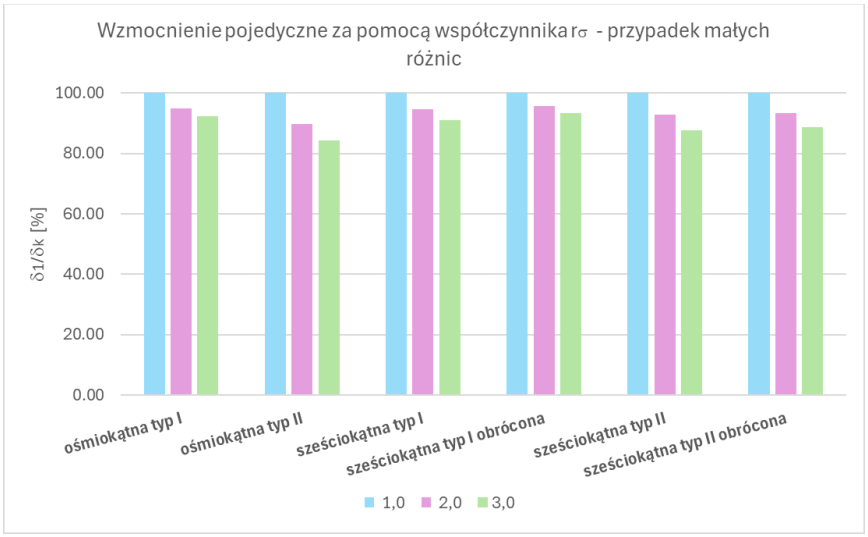
Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Pomimo zmiany schematu statycznego struktury średniej długości (proporcja boków 1:3), wzmacnianie obszarów niewielką wartością r_σ pozwala uzyskiwać bardzo porównywalne wyniki – wzmocnienie pojedyncze ($r_\sigma = 3{,}0$) pozwala na spadki około 10-15% (Rys. 4.35), przy wsporniku było to około 15-20% (Rys. 4.21). Podwójne wzmocnienie to około 15-20% zmiany wartości przemieszczeń (Rys. 4.36), zaś dla wspornika było to 20-25% (Rys. 4.22). Znaczenie ma tutaj również procentowy stosunek modułów wzmocnionych do liczby wszystkich modułów - w przypadku belki swobodnie podpartej wartość ta jest o około 10% mniejsza.

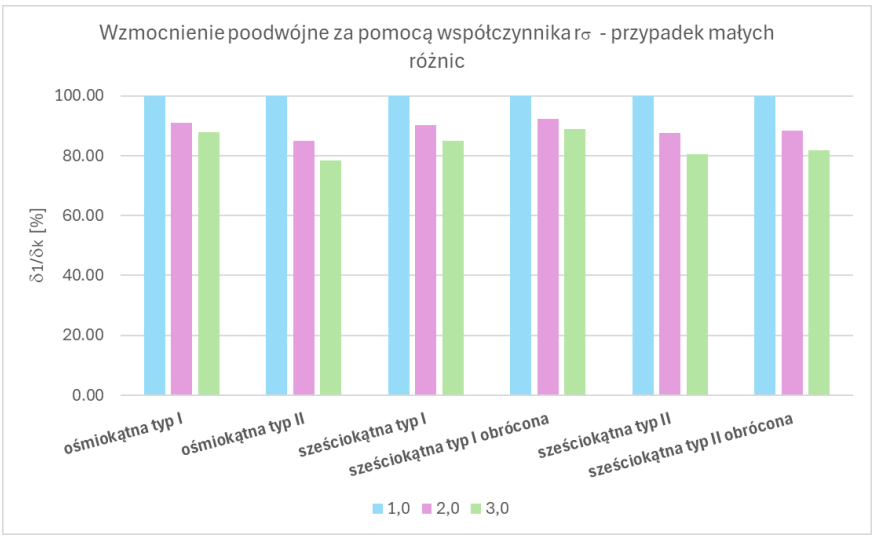
Mimo zmiany schematu statycznego konstrukcji, ciągle jednym z najbardziej aktywnych układów jest struktura ośmiokątna typu II, która ponownie jest najbardziej podatną konstrukcją. Warto zauważyć jednak, że dla wspornika drugą najbardziej aktywną konstrukcją była struktura sześciokątna typu II obrócona, w przypadku belki swobodnie podpartej większe znaczenie ma układ z modułami podstawowymi (sześciokątna typu II). Pojedyncze wzmocnienie ($r_\sigma = 3{,}0$) w przypadku struktury ośmiokątnej typu II uzyskuje 84% początkowej wartości przemieszczeń, struktura sześciokątna typu II pozwala na 88%, zaś sześciokątna typu

II obrócona – 89%. Potem kolejno wyniki uzyskują struktura sześciokątna typu I (91,1%), ośmiokątna typu I (92,4%) i struktura sześciokątna typu I obrócona (93,3%) (Rys. 4.35).



Rysunek 4.35 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie podwójne pozwala na jeszcze większe spadki wartości przemieszczeń – tutaj ponownie największe spadki zauważalne są dla struktury ośmiokątnej typu II (78,4%, $r_\sigma = 3{,}0$), struktury sześciokątnej typu II (80,52%, $r_\sigma = 3{,}0$) oraz struktury sześciokątnej typu II obróconej (81,8%, $r_\sigma = 3{,}0$). Pozostałe konstrukcje uzyskują zbliżone spadki wartości przemieszczeń – około 85-89% początkowych przemieszczeń (Rys. 4.36).

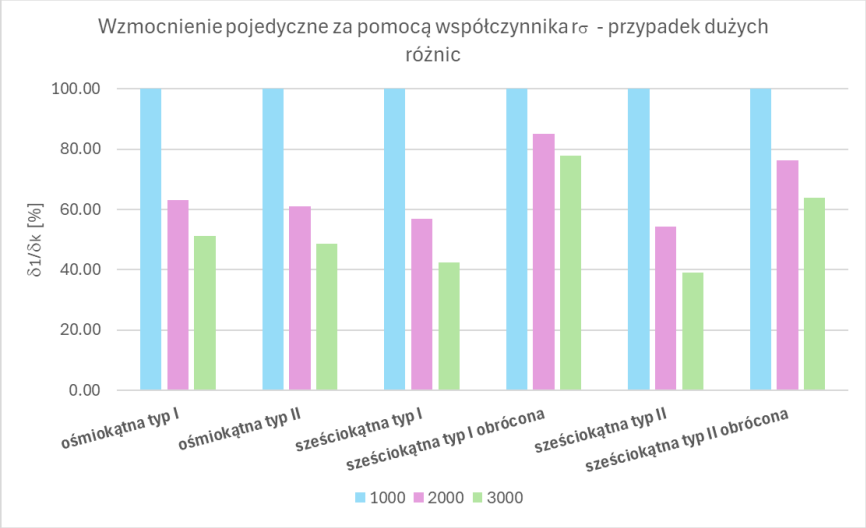


Rysunek 4.36 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

Zmiana schematu obciążenia wpłynęła znacznie na reakcję konstrukcji – w przypadku układów modularnych ośmiokątnych mogą być one już aktywne w przypadku wzmocnienia pojedynczego (Tab. 1.17., Zał. 1.). Zmiana ta pokazuje, że struktury ośmiokątne w przypadku belki swobodnie podpartej uzyskują wyniki zbliżone do struktur sześciokątnych typu I i II – odpowiednio $\mathbf{1001{,}31}\,\frac{Pa}{EA}$ oraz $\mathbf{1666{,}25}\,\frac{Pa}{EA}$ dla struktury ośmiokątnej typu I i II, a dla struktury sześciokątnej typu I i II: $\mathbf{1180{,}50}\,\frac{Pa}{EA}$ oraz $\mathbf{1393{,}24}\,\frac{Pa}{EA}$. W przypadku tego schematu statycznego najmniejsze zmiany wzmocnienia konstrukcji zauważamy w przypadku układów z modułami obróconymi. Jednocześnie jednak, co do wartości, struktury te uzyskują od początku najmniejsze wartości przemieszczeń – są to konstrukcje o znacznej sztywności od początku.

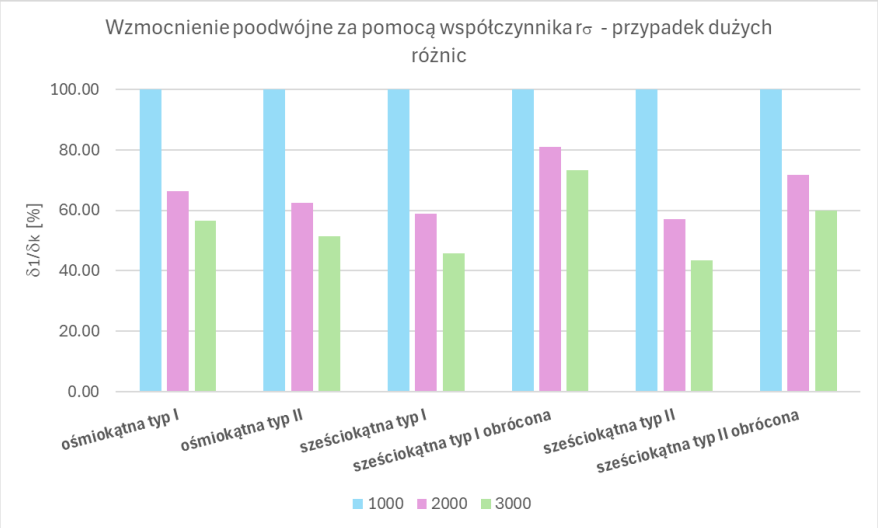
W przypadku struktur sześciokątnych obróconych typu I i II uzyskujemy w przypadku wzmocnienia pojedynczego odpowiednio spadki o około 22% i 36% wartości początkowej przemieszczeń przy wzmocnieniu lokalnym ze współczynnikiem $r_\sigma = 3000$ (Rys. 4.37). W tym samym przypadku struktury sześciokątne typu I i II uzyskują spadki o odpowiednio 57% oraz 61% początkowych wartości przemieszczeń, zaś struktury ośmiokątne: typu I o 49%, a typu II o 49%.



Rysunek 4.37 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Konstrukcje wzmocnione lokalnie podwójnym pasem modułów wykazują analogiczne zachowanie do przypadku wzmocnienia pojedynczego – najmniejsze spadki obserwujemy

w przypadku układów z modułami obróconymi (typ I: 73,3% początkowych przemieszczeń struktury, typ II: 66,3% początkowych przemieszczeń konstrukcji) (Rys. 4.38). W przypadku układów ośmiokątnych spadki te są wyraźniejsze: typ I zmniejsza wartości przemieszczeń do 56,5% początkowych wartości, a typ II – do 51,4%. Struktury sześciokątne podstawowe, mimo początkowych wysokich wartości przemieszczeń uzyskują najbardziej znaczące spadki: 45,8% (typ I) oraz 43,3% (typ II) wartości początkowej.

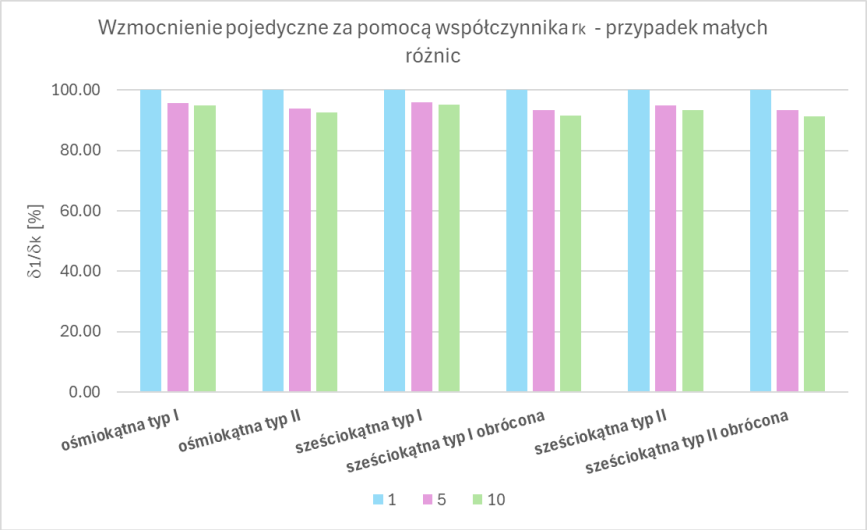


Rysunek 4.38 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

Zmiana schematu statycznego wpłynęła na efektywność wzmacniania za pomocą współczynnika k – znaczenie może mieć tutaj zarówno liczba wzmocnionych modułów, jak i sam schemat. Wzmacnianie za pomocą zmiany geometrii daje w tym przypadku wyniki gorsze niż w przypadku zmiany wartości sił samonaprężających – procentowe zmiany wartości (równe około 90% początkowej wartości przemieszczeń) są o kila procent niższe (Tab. 1.18., Zał. 1.) niż w przypadku niewielkiego wzmocnienia za pomocą zmiany współczynnika r_σ (około 80-90%) (Tab. 1.16., Zał. 1.).

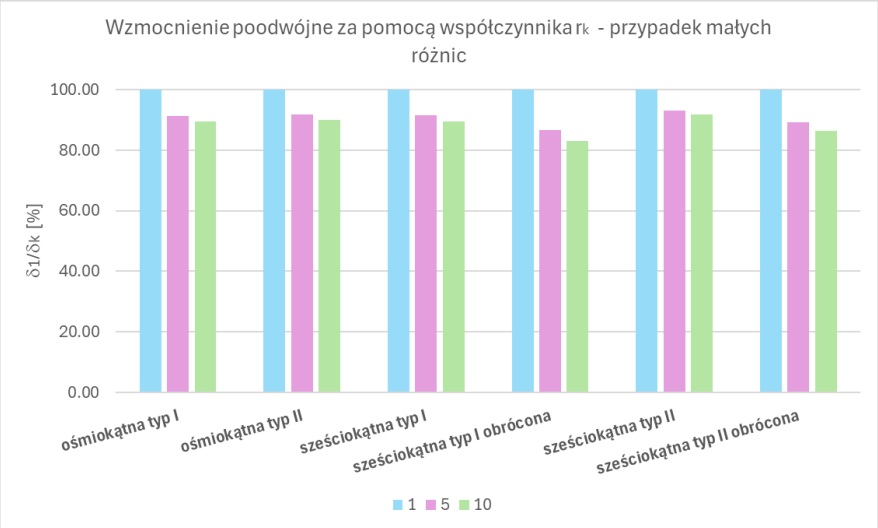
Aktywne ponownie są struktury ośmiokątna i sześciokątna typu II (wzmocnienie pojedyncze – Rys. 4.39), jednocześnie jednak układy obrócone, przy wzmocnieniu podwójnym, zaczynają uzyskiwać znaczne spadki (Rys. 4.40).



Rysunek 4.39 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Warto zauważyć też, że struktura sześciokątna typu I obrócona sama w sobie uzyskuje bardzo niskie wartości przemieszczeń, wraz ze znacznym spadkiem wartości przemieszczeń wskazuje to na jej wysoką efektywność przy zadanym schemacie statycznym. Konstrukcja ta przy wykorzystaniu wzmocnienia pojedynczego (dla $r_k = 10$) pozwala na spadki do wartości 91,6% początkowych wartości oraz 83,2% dla tego samego współczynnika przy wzmocnieniu podwójnym. Druga z obróconych struktur (sześciokątna typu II obrócona) dla tych samych założeń uzyskuje odpowiednio 91,2% oraz 86,5% początkowych wartości.

Układy ośmiokątne przy tych założeniach uzyskują niewiele wyższe procentowe zmiany wartości: typ I w przypadku wzmocnienia pojedynczego około 95% początkowych wartości przemieszczeń i około 90% w przypadku wzmocnienia podwójnego, typ II odpowiednio: około 93% (wzmocnienie pojedyncze) oraz około 90% (wzmocnienie podwójne). Struktury sześciokątne również są zbliżone uzyskanymi wynikami do pozostałych przypadków: typ I pozwala na spadek do 95% (wzmocnienie pojedyncze) oraz 89,6% (wzmocnienie podwójne), typ II: 93,5% oraz 91,7%. Zmiana schematu statycznego znacznie wpłynęła na zachowanie konstrukcji.



Rysunek 4.40 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

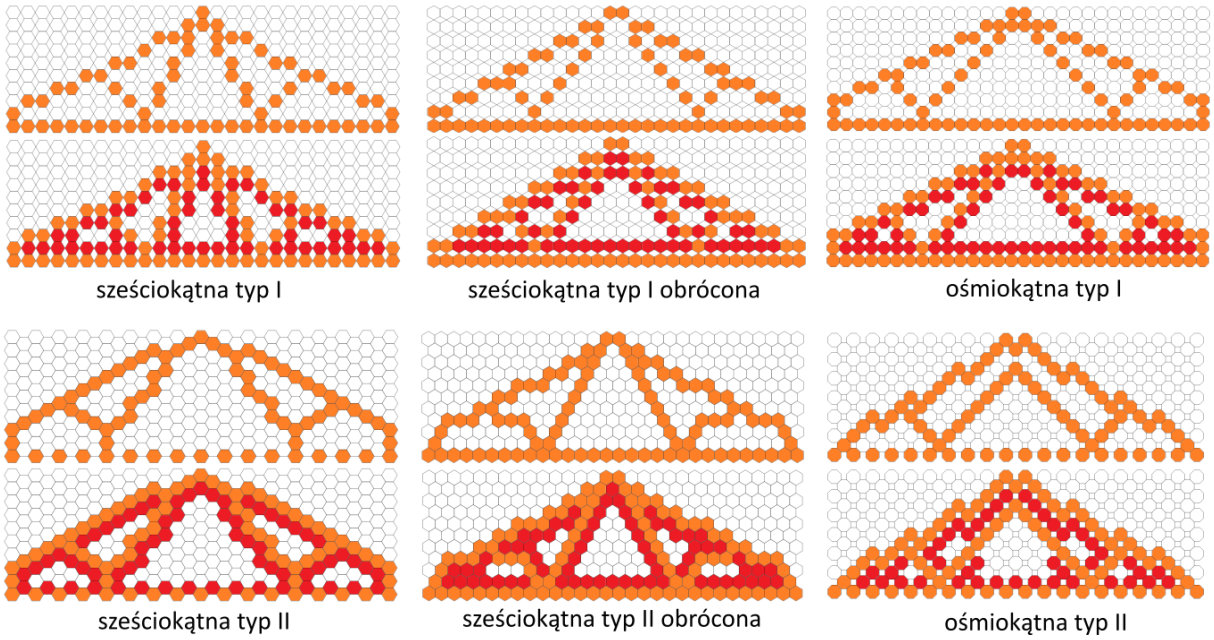
W odróżnieniu do przypadku wspornika, zmiana przekrojów zastrzałów, mimo tego samego rozmiaru konstrukcji, nie przynosi praktycznie żadnych efektów – jest to wartość zaledwie 1-2 % początkowych wartości (Tab. 1.19., Zał. 1.). Warto zauważyć, że zmiana schematu statycznego aktywuje inne układy, ponieważ w przypadku belki swobodnie podpartej to struktury obrócone dają wyraźny spadek przemieszczeń względem pozostałych konstrukcji. Należy także zauważyć, że struktura ośmiokątna typu I wykazuje zmiany wartości przemieszczeń przy zmianie przekroju zastrzałów A.

Wzmocnienie zastrzału B

Zmiana wzmocnienia z zastrzałów A na zastrzały B ponownie pozwala uzyskać tylko niewielkie zmiany w wartościach przemieszczeń – są one bardzo zbliżone do przypadku z zastrzałami A (Tab. 1.20., Zał. 1.). W tym przypadku struktury sześciokątne obrócone uzyskują spadki większe niż w przypadku pozostałych konstrukcji – różnice te są największe w przypadku podwójnego wzmocnienia, jednak to zaledwie około 7% przy maksymalnym wykorzystaniu możliwości rozwiązania.

4.3.5. Przykład 5 - belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą

W przypadku belek z dodatkowym wzmocnieniem, iloraz modułów wzmocnionych do całej konstrukcji wzrósł do około 24% (struktura sześciokątna typu II) do 31% (struktura ośmiokątna typu II) (Rys. 4.41). Wzmocnienie podwójne wymaga użyciu od 44% do 50% modułów.



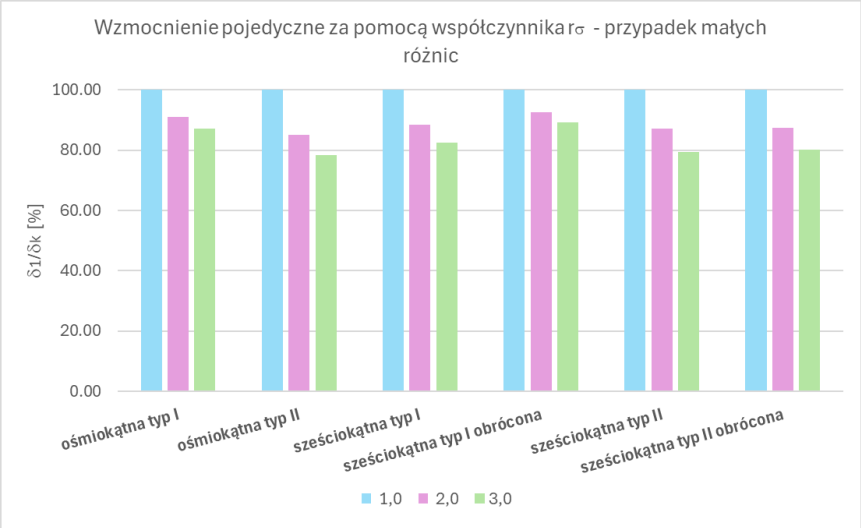
Rysunek 4.41 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej jedną siłą (ze wzmocnieniem).

Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

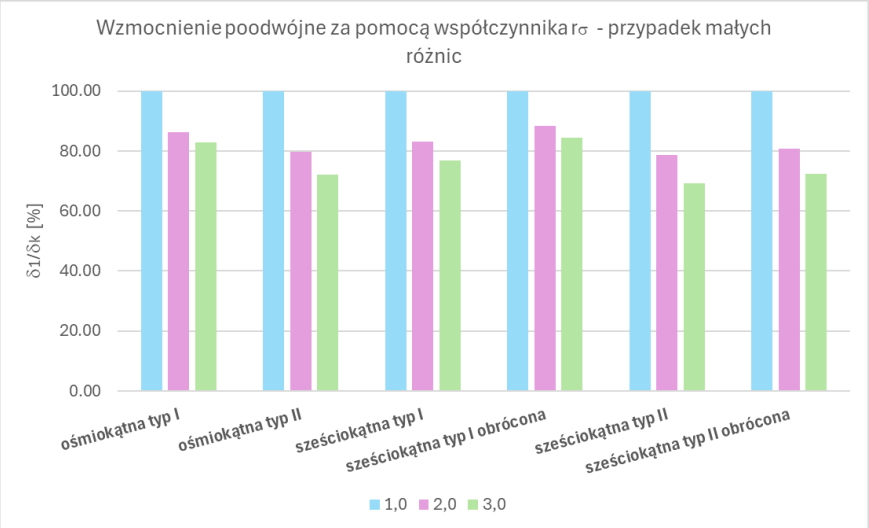
Wprowadzenie dodatkowego wzmocnienia do belki pozwala na uzyskanie mniejszej wartości przemieszczeń oraz znacznie większych spadków niż w przypadku belki bez dodatkowych wzmocnień – jest to zachowanie spodziewane. Warto zauważyć, ze liczba wzmocnionych modułów zbliża się do liczby w przypadku wspornika średniej długości – można zauważyć korelację wzrostu liczby wzmocnionych modułów o około 10% całej konstrukcji ze spadkiem procentowym przemieszczeń o około 5-10% w zależności od typu układu modularnego (Tab. 1.21., Zał. 1.). Analogicznie do przypadku bez wzmocnienia, struktury ośmiokątna i sześciokątna typu II uzyskują największe procentowe spadki wartości, nie odbiegają one jednak w znaczny sposób od pozostałych wyników (Rys. 4.42). W przypadku

układów ośmiokątnych uzyskujemy spadki wartości przemieszczeń w przypadku wzmocnienia pojedynczego ($r_\sigma = 3{,}0$) do 87,2% początkowych wartości przemieszczeń (typ I) oraz 78,3% początkowych wartości przemieszczeń (typ II). Struktury sześciokątne dla podobnych założeń pozwalają na wyniki rzędu 82,5% (typ I) oraz 79,3% (typ II). W przypadku układów sześciokątnych obróconych te wyniki są bardziej zaskakujące – struktura typu I obrócona uzyskuje spadek do zaledwie 89,2% początkowej wartości przemieszczeń, zaś typu II obrócona już pozwala na zmniejszenie tej wartości do 80,2%. Różnica ta może wynikać ze znacznej sztywności początkowej jaką uzyskuje struktura sześciokątna obrócona typu I.



Rysunek 4.42 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą)

Wzmocnienie podwójne pozwala w większości przypadków nieznacznie zwiększyć spadki wartości przemieszczeń – w przypadku struktury ośmiokątnej typu I uzyskujemy 82,8% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 3{,}0$), typu II – 72,2% w tym samym przypadku (Rys. 4.43). Struktury sześciokątne typu I podstawowa i obrócona w takim przypadku uzyskują 76,8% początkowych przemieszczeń oraz 84,3% początkowych przemieszczeń (spadek o 5% w porównaniu do wzmocnienia pojedynczego). Wyraźnie bardziej reaktywne są struktury sześciokątne typu II: po wzmocnieniu $r_\sigma = 3{,}0$ konstrukcja podstawowa uzyskuje wynik 76,8% początkowych przemieszczeń (o około 10% mniej niż przy wzmocnieniu pojedynczym), zaś układ modułów obróconych 72,3% (o około 8% mniej niż przy wzmocnieniu pojedynczym).

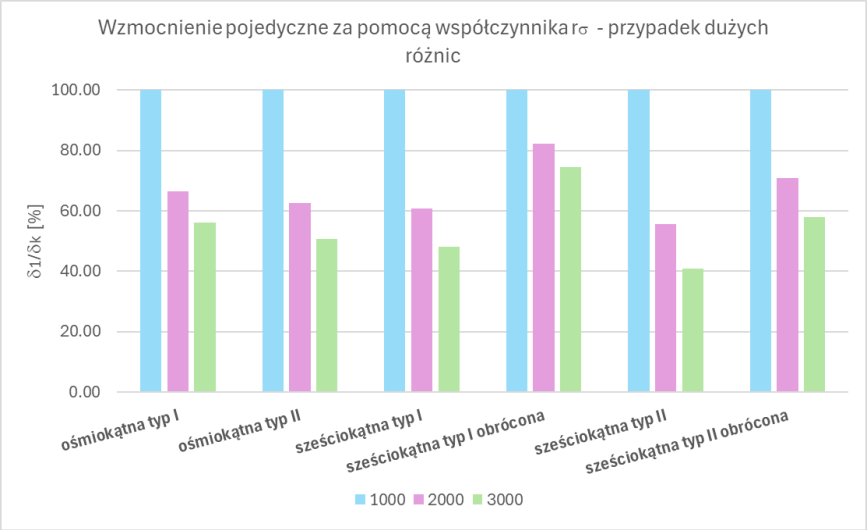


Rysunek 4.43 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą).

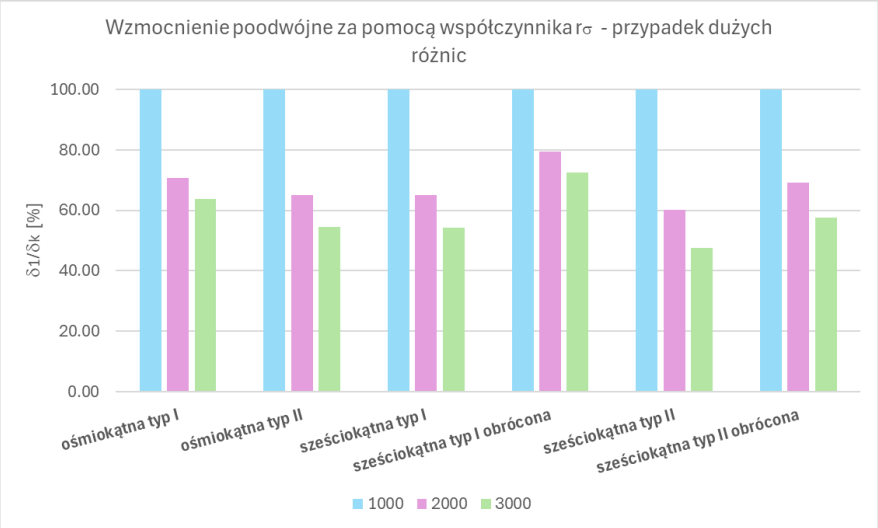
Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

W przypadku dużych różnic pomiędzy wartościami sprężenia poszczególnych modułów nie zauważamy już tak znacznego spadku przemieszczeń, jak w Przypadku 1. (niewielkich różnic). Wynik ten jest znacznie uzależniony od początkowej wartości przemieszczeń w przypadku wzmocnienia $\sigma = 1000$. Obserwując wartości poszczególnych przemieszczeń uzyskanych za pomocą wzmocnienia pojedynczego ($r_\sigma = 3000$) możemy zauważyć, że same początkowe wartości spadają już o połowę (struktury sześciokątne obu typów: typ I pozwala na spadek do 48% podstawowej wartości przemieszczeń, typ II – 40,9%, struktura ośmiokątne obu typów: typ I – 56%, typ II – 50,6%) (Rys. 4.44). W przypadku układów modułów obróconych te wyniki są nieznacznie wyższe dla typu II, w którym spadek dochodzi do 58%, najbardziej (ponownie) odbiega struktura typu I: 74,4% początkowej wartości przemieszczeń.

Wzmocnienie podwójne ponownie pokazuje analogiczne zachowanie konstrukcji, pozwalając na podobne spadki procentowe wartości przemieszczeń o około 40-50% ich początkowej wartości (Rys. 4.45). Wyróżniają się tutaj struktura sześciokątna typu II, która ponownie uzyskuje spadek do 47,5% początkowych wartości przemieszeń ($r_\sigma = 3000$), najmniejszą reaktywność ponownie wykazuje struktura sześciokątna typu I obrócona – 72,5% początkowych wartości przemieszczeń.



Rysunek 4.44 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą).

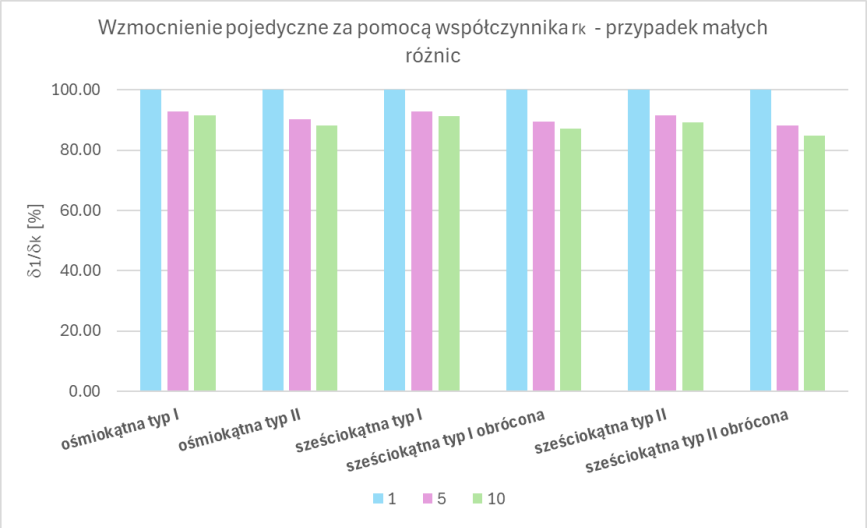


Rysunek 4.45 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

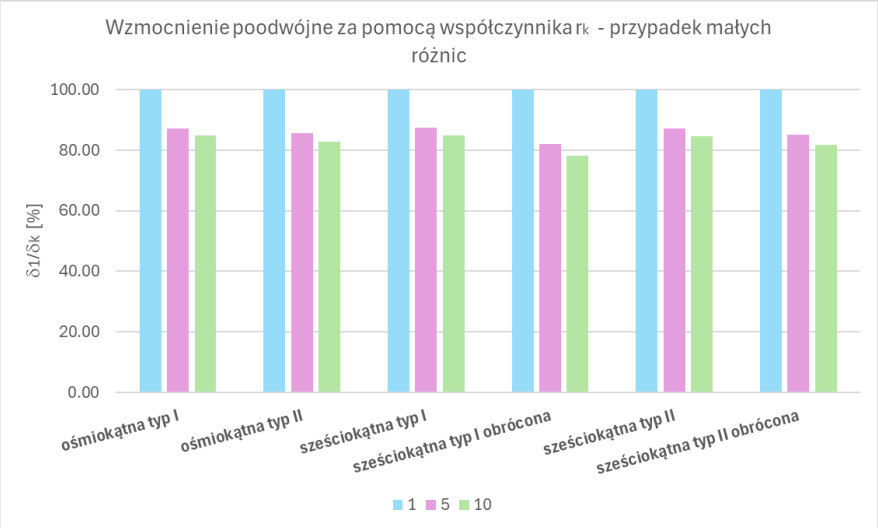
Dodanie wzmocnienia podwójnego w większej liczbie modułów pozwala na dodatkowy spadek wartości przemieszczeń, jednak są to niewielkie wartości – procentowo pozwala to na uzyskanie kilku procent mniejszych wartości, są to zmiany o około $\mathbf{10}\frac{Pa}{EA}$ (Tab. 1.23., Zał. 1.). Oznacza to, że dodatkowe wzmocnienie poprzez zmianę geometrii kilku modułów może pomóc usztywnić konstrukcję, ale wpływ ten jest nieznaczny – tym samym mniej przydatny w wykorzystaniu, szczególnie, że wpływ tego typu wzmocnienia jest na całe życie struktury.

W przypadku wzmocnienia pojedynczego możemy ponownie (jak w przypadku przykładu bez dodatkowego wzmocnienia) spodziewać się spadków rzędu 10-15% początkowej wartości przemieszczeń dla każdej z konstrukcji (Rys. 4.46). Największą podatność na ten typ lokalnego wzmocnienia wykazuje struktura sześciokątna typu II obrócona – 84,9% początkowej wartości przemieszczeń. Warto tutaj także zwrócić uwagę na strukturę sześciokątną typu I obróconą – 87,2% początkowej wartości przemieszczeń oraz strukturę ośmiokątną typu II – 88,1% tej wartości po wzmocnieniu ze współczynnikiem $r_k = 10$. Pozostałe z konstrukcji oscylują w okolicy spadków do 90% początkowych wartości przemieszczeń.



Rysunek 4.46 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie podwójne powiela wcześniejsze zachowanie układów – struktura sześciokątna typu II obrócona pozwala na uzyskanie 81,9% początkowych wartości przemieszczeń, struktura ośmiokątna typu II – 82,9% (Rys. 4.47). Zaskakująca jest struktura sześciokątna typu I obrócona – następuje w niej gwałtowny spadek względem wzmocnienia pojedynczego i uzyskuje dla podanych założeń wynik 78,2% początkowych wartości przemieszeń (około 9% różnicy pomiędzy wzmocnieniem pojedynczym a podwójnym). Pozostałe konstrukcje ponownie oscylują wokół podobnych wartości – spadek przemieszczeń jest rzędu 5-6% początkowej wartości przemieszczeń.



Rysunek 4.47 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

Dodatkowe wzmocnienie najbardziej wpłynęło na strukturę ośmiokątną i sześciokątną typu I, pozwalając uzyskać zmianę rzędu kilku procent (maksymalnie 1-5 $\frac{Pa}{EA}$) (Tab. 1.24., Zał. 1.). Niewielka zmiana przekroju cięgien daje w tym przypadku większy spadek wartości przemieszczeń niż znaczna zmiana przekroju zastrzałów.

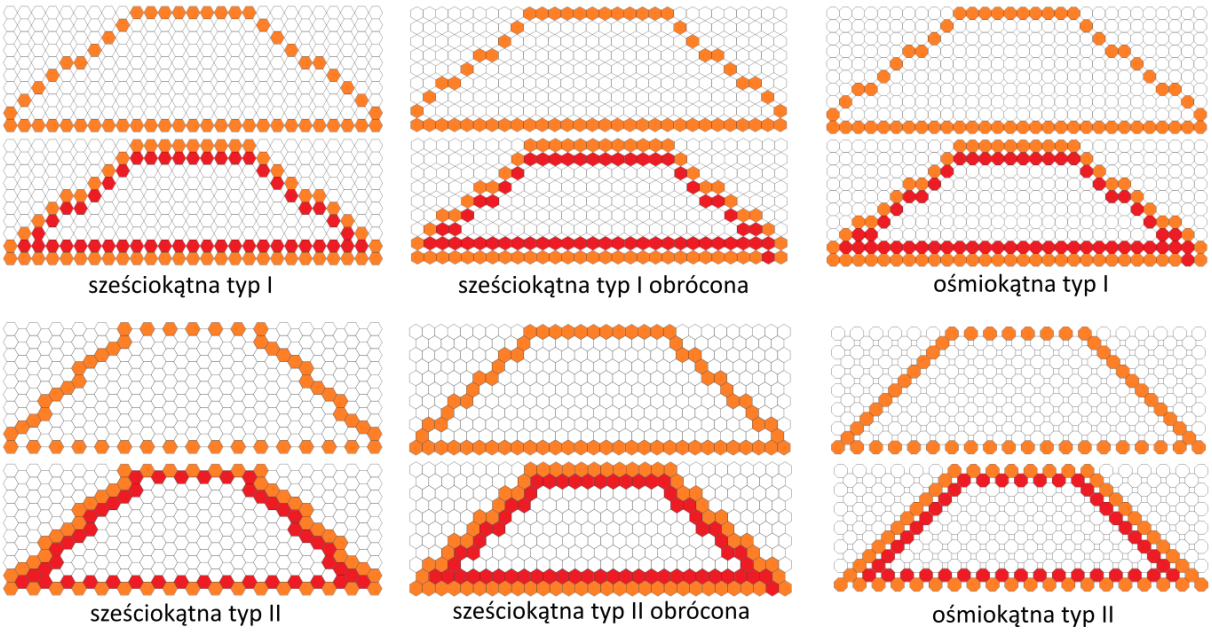
Wzmocnienie zastrzału B

Zaskakująco, zastrzały B mają znaczny wpływ na zmiany dotyczące struktury sześciokątnej typu I obróconej, pozwalając na uzyskanie spadków przemieszczeń bliskich nawet 82% początkowych przemieszczeń (co do wartości jest to około 18 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_m = 10$, wzmocnienie podwójne) (Tab. 1.25., Zał. 1.). Jest to zaskakujący spadek wartości, pozwalający również na uzyskanie najniższych, co do wartości przemieszczeń, względem wszystkich pozostałych konstrukcji. W przypadku pozostałych struktur zastrzały te ponownie nie mają znacznego wpływu na wyniki.

4.3.6. Przykład 6 - belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami

Na Rys. 4.48 można zaobserwować układy modułów wzmocnionych w przypadku belki obciążonej dwiema siłami (zarówno w przypadku wzmocnionym oraz bez dodatkowego wzmocnienia). Analogicznie jak w przypadku obciążenia jedną siłą, w tym przypadku również

wzmocnienie pojedyncze wymaga zmian w około 16% - 20% modułów, zaś w przypadku wzmocnienia podwójnego 30%-41% (konstrukcja bez dodatkowego wzmocnienia).



Rysunek 4.48 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej dwiema siłami (bez wzmocnienia).

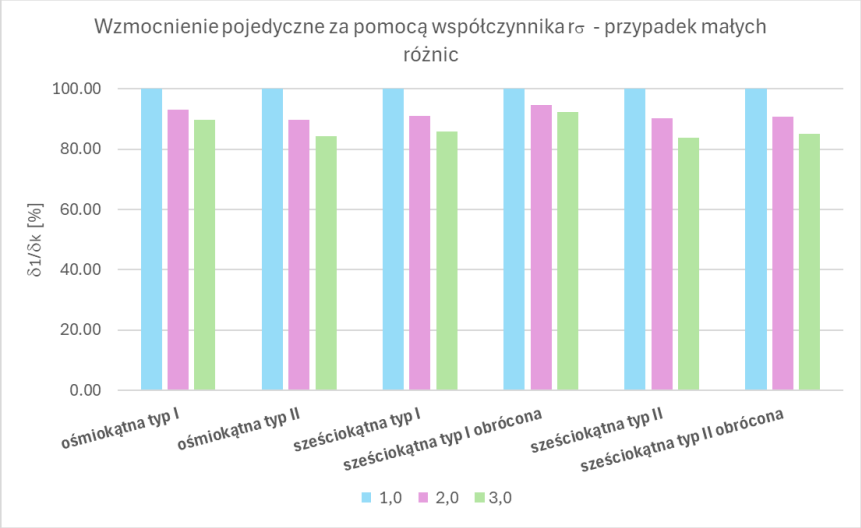
Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Kolejna zmiana schematu statycznego udowadnia, że średni możliwy spadek wartości przemieszczeń (procentowy), jaki można uzyskać za pomocą niewielkiego wzmocnienia siłami samonaprężającymi, wynosi około 10-15% w przypadku wzmocnienia podwójnego, zaś w przypadku wzmocnienia pojedynczego wartość ta może nawet przekraczać 20% (Tab. 1.26., Zał. 1.). Przy podobnym zagęszczeniu modułów wzmocnionych do całej struktury, niezależnie od schematu, wyniki są zbliżone do siebie (porównując przypadek belki obciążonej jedną siłą oraz dwiema siłami) – pozwala to założyć, że można swobodnie zmieniać schemat obciążeń i dopasowywać do niego odpowiadający mu schemat („wzór") wzmocnienia lokalnego na podstawie wyników optymalizacji topologicznej.

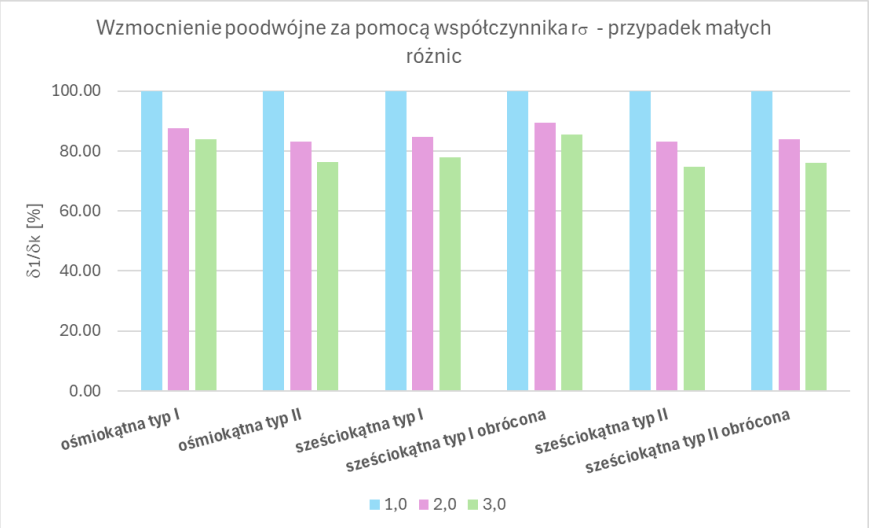
Zmiana sposobu obciążenia, przy jednoczesnym dopasowaniu wzmocnienia lokalnego konstrukcji, ponownie pokazuje, że w przypadku belki swobodnie podpartej większość układów modularnych wykazuje podobną reaktywność przy wzmocnieniu zarówno pojedynczym, jak i podwójnym. Wzmocnienie za pomocą jednej linii modułów ponownie

pozwala na największe spadki wartości przemieszczeń w przypadku struktury ośmiokątnej typu II (84,4% początkowej wartości przemieszczeń w przypadku $r_\sigma = 3{,}0$) oraz struktury sześciokątnej typu II (83,7%) (Rys. 4.49). Podobne wyniki pozwala uzyskać struktura sześciokątna typu I (85,9%) oraz struktura sześciokątna typu II obrócona (85%). W przypadku struktury sześciokątnej typu I obróconej ta wartość wynosi już 92,2% (ponownie, wpływ dużej sztywności początkowej konstrukcji) oraz w przypadku struktury ośmiokątnej typu I, gdzie spadek ten jest rzędu do 89,7% początkowej wartości przemieszczeń.



Rysunek 4.49 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).

Wzmocnienie podwójne wpływa w analogiczny sposób na poszczególne konstrukcje – struktury sześciokątne podstawowe pozwalają na spadki o ponad 30% początkowej wartości przemieszczeń ($r_\sigma = 3{,}0$). W przypadku struktury typu I jest to wartość około 78% początkowej wartości przemieszczeń, typu II – 74,6% (Rys. 4.50). Układy sześciokątne obrócone są znacznie bardziej różniące się od siebie – struktura typu I pozwala na spadek do zaledwie 85,4% początkowych wartości przemieszczeń, ale typu II już uzyskuje 76% tych wartości. Struktury ośmiokątne również znacznie różnią się od siebie – typ I pozwala na uzyskanie około 84%, podczas gdy typ II pozwala już na 76% początkowych wartości przemieszczeń.

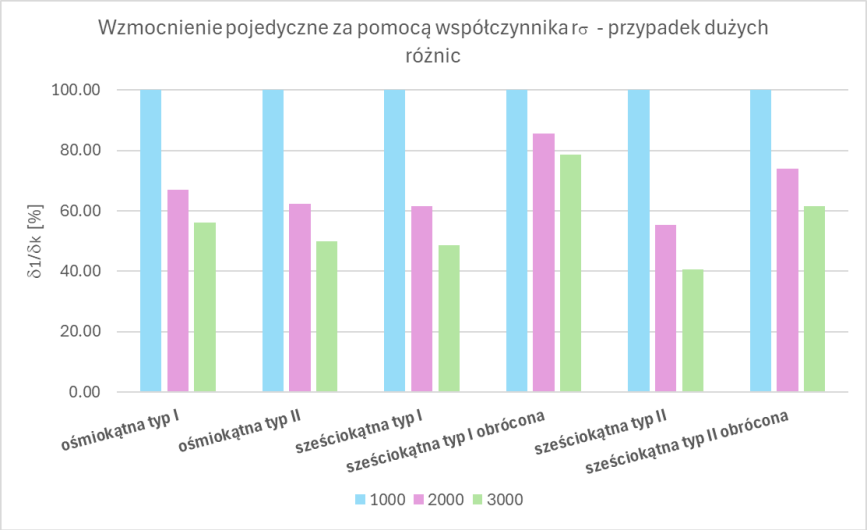


Rysunek 4.50 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

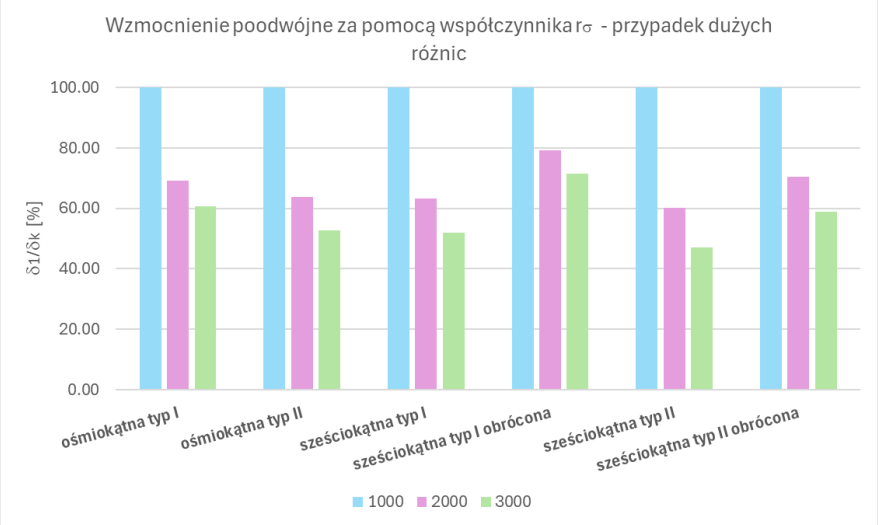
Przypadek dużych różnic również pozwala nam zauważyć analogię do poprzedzającego przypadku – procentowe oczekiwane wartości spadków są różne w zależności od wybranych konstrukcji, z najmniejszymi spadkami w przypadku najbardziej sztywnych układów zbudowanych z modułów sześciokątnych obróconych i największymi w przypadku modułów sześciokątnych podstawowych (Rys. 4.51). Warto zauważyć, że struktura sześciokątna typu I obrócona uzyskuje niskie wartości spadków (procentowo), ze względu na niską wartość przemieszczeń w początkowej fazie: 157,03 $\frac{Pa}{EA}$ (wzmocnienie pojedyncze) oraz 144,99 $\frac{Pa}{EA}$ (wzmocnienie podwójne). Pozostałe konstrukcje uzyskują początkową wartość przemieszczeń większą niż 300-400 $\frac{Pa}{EA}$ (Tab. 1.27, Zał. 1).

W przypadku wzmocnienia pojedynczego struktura ośmiokątna typu I osiąga spadek do wartości 56,15% początkowej wartości przemieszczeń ($r_\sigma = 3000$), podczas gdy struktura sześciokątna typu I pozwala na zmniejszenie wartości do 48,6%, sześciokątna typu II – 40,5% (Rys. 4.51). Struktury sześciokątne obrócone wykazują najmniejszą reaktywność – od 61,4% (dla układu typu II) do 78,6% (typ I). Struktura ośmiokątna typu II wymagająca dużej uwagi w przypadku schematu wspornika, tutaj pozwala na spadek do 49,8%, uzyskując ostatecznie wartości przemieszczeń zbliżone do początkowych wartości w pozostałych konstrukcjach.



Rysunek 4.51 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).

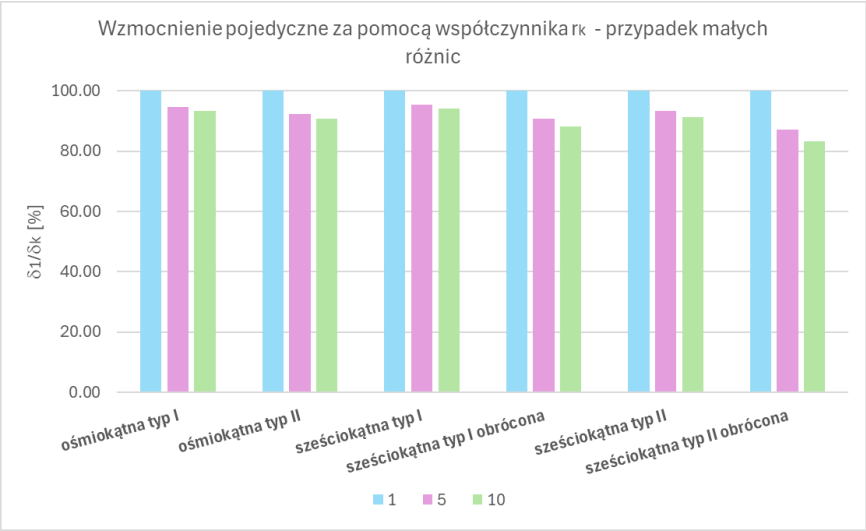
Wzmocnienie podwójne, jak w większości przypadków, powiela charakterystyczne zachowania poszczególnych układów modularnych. Struktury sześciokątne obrócone ponownie wykazują mniejsze spadki przemieszczeń – 71,6% (typ I) oraz 58,8% (typ II) ($r_\sigma = 3000$). W przypadku struktury ośmiokątnej typu I również zauważamy niewielki spadek – zaledwie 60,6% początkowych wartości przemieszczeń. Pozostałe z konstrukcji uzyskują spadek o około 50% początkowych przemieszczeń, z największym spadkiem o 53% w przypadku struktury sześciokątnej typu II (Rys. 4.52).



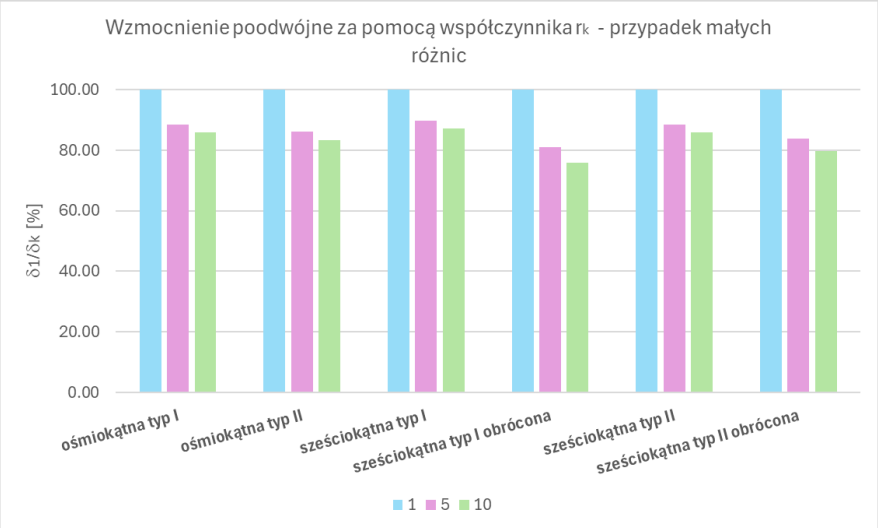
Rysunek 4.52 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

Tak samo jak w przypadku zmian sił samonaprężających, tak samo w przypadku zmian geometrii zauważamy, że zmiana wartości k powoduje zmiany wartości przemieszczeń od około 10% (wzmocnienie pojedyncze) (Rys. 4.53) do nawet 20% (wzmocnienie podwójne) (Rys. 4.54). Warto zauważyć, że ponownie struktury sześciokątne typu I i typu II obrócona pozwala uzyskać najbardziej znaczące spadki przemieszczeń, będąc jednocześnie konstrukcją uzyskującą najmniejsze wartości przemieszczeń. W przypadku struktury sześciokątnej typu I obróconej można uzyskać od 88% początkowej wartości przemieszczeń (wzmocnienie pojedyncze, $r_k = 10$) do 76% (wzmocnienie podwójne, $r_k = 10$). Struktura typu II obrócona pozwala na odpowiednio 83,2% i 79,8% początkowych wartości przemieszczeń. Układy sześciokątne podstawowe w tym samym przypadku pozwalają już na mniejsze spadki – typ I uzyskuje odpowiednio 94,3% oraz 87,3%, zaś typ II: 91,4% oraz 85,8%. Struktury ośmiokątne nie odbiegają w znaczny sposób od sześciokątnych – struktura typu I w przypadku wzmocnienia pojedynczego pozwala na 93% początkowych przemieszczeń, zaś w przypadku wzmocnienia podwójnego: 85,9%. W przypadku struktury ośmiokątnej typu II te wartości wynoszą: 90,7% oraz 83,4% wartości początkowych przemieszczeń.



Rysunek 4.53 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).



Rysunek 4.54 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

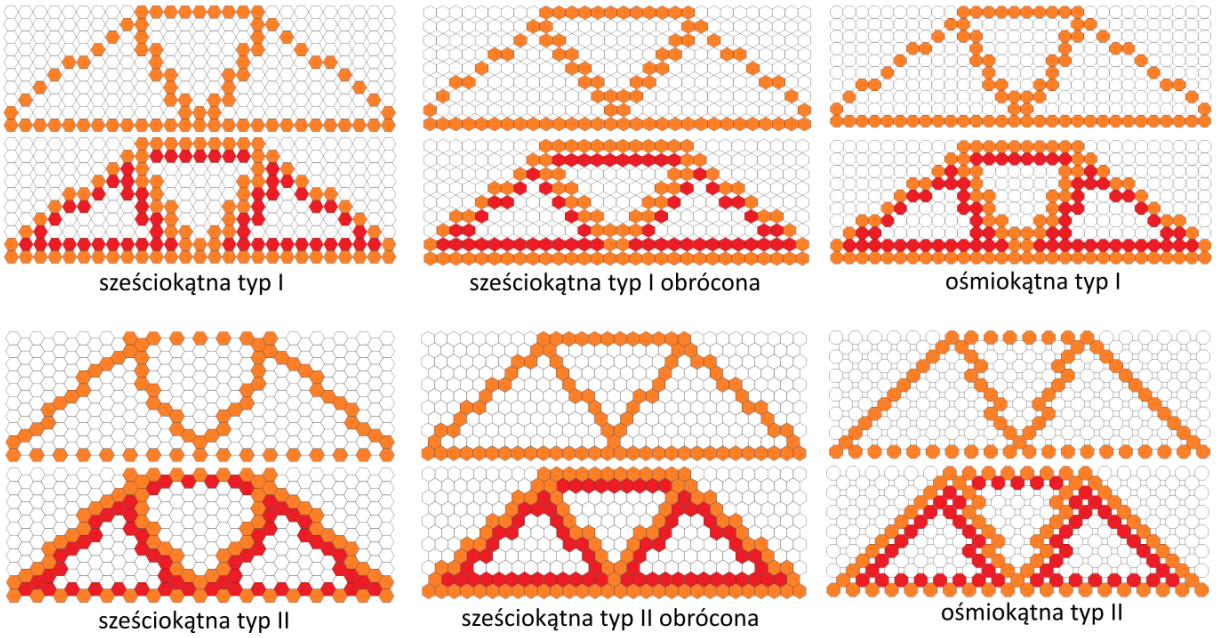
W przeciwieństwie do poprzednich porównań, w przypadku zmiany przekroju zastrzałów A zauważamy znaczną różnicę w porównaniu do przypadku belki obciążonej jedną siłą. W tym przypadku aktywuje się większość konstrukcji (spadki rzędu 3-5%), bez zmian pozostają tylko struktury ośmiokątna i sześciokątna typu II (Tab. 1.29., Zał. 1.). Warto jednak zauważyć, ze wzmocnienie podwójne pozwala na nieznaczną poprawę wyników – zaledwie kilkuprocentowy spadek.

Wzmocnienie zastrzału B

Wzmacnianie zastrzałów B w wybranych modułach jednak już powtarza wcześniejszy wzorzec, w którym największy wpływ miało to na przypadek struktury sześciokątnej typu I obróconej, w przypadku pozostałych typów układów wyniki te są kilkuprocentowe i znikome w porównaniu do wzmacniania za pomocą zastrzałów typu A (Tab. 1.29. – 1.30., Zał. 1.). Nadal są to niewielkie wartości w stosunku do wartości uzyskiwanych przy zmianie przekroju cięgien.

4.3.7. Przykład 7 - belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami

Konstrukcje z dodatkowym wzmocnieniem wymagają użycia od 22% (struktura sześciokątna typu II) do 31% (struktura sześciokątna typu I obrócona) modułów. Wzmacnianie podwójnie modułami wymaga użycia od 42% do 53% modułów (Rys. 4.55).



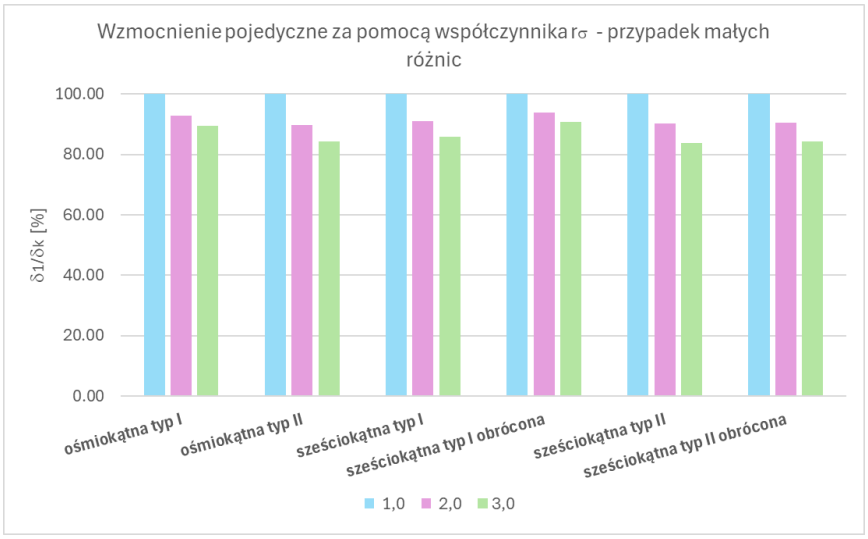
Rysunek 4.55 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej dwiema siłami (ze wzmocnieniem).

Wzmocnienie obszarów za pomocą self-stress

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

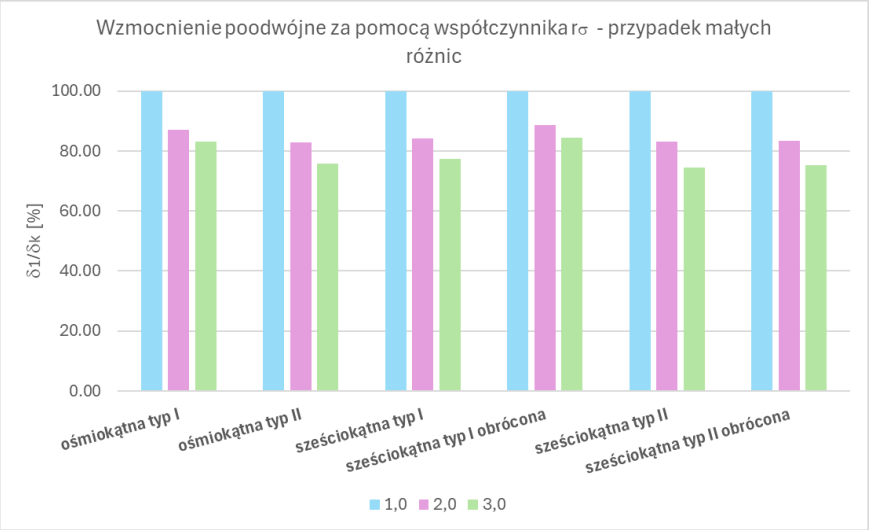
Dodatkowe wzmocnienie belki, które polegało na dodaniu zaledwie kilku do kilkunastu modułów nie spowodowało znacznych zmian w porównaniu do przypadku niewzmocnionego. Prawdopodobnie, przy użyciu znacznie większych sił lub większej liczby modułów, to wzmocnienie pozwoliłoby na uzyskanie bardziej znaczących wyników. W przypadku samych wartości w obrębie belki wzmocnionej, podwójne wzmocnienie ponownie pozwala na uzyskanie przemieszczeń mniejszych o nawet 10% względem belki wzmocnionej pojedynczymi modułami (Tab. 1.31., Zał. 1.).

Wzmocnienie pojedyncze największy efekt przynosi w przypadku układów: struktura sześciokątna typu II z wynikiem 83,7% początkowej wartości przemieszczeń i struktura ośmiokątna typu II, która pozwala na spadek wartości przemieszczeń do 84,2% początkowej wartości ($r_\sigma = 3{,}0$) (Rys. 4.56). Potem kolejno struktura sześciokątna typu II obrócona pozwala na zmniejszenie przemieszczeń do 84,37%, struktura sześciokątna typu I do wartości 85,9% wartości początkowych przemieszczeń, struktura ośmiokątna typu I – 89,5%. Struktura sześciokątna typu I obrócona nie oddala się z wynikami znacznie od pozostałych przykładów, ale osiąga zaledwie 91% początkowych przemieszczeń.



Rysunek 4.56 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).

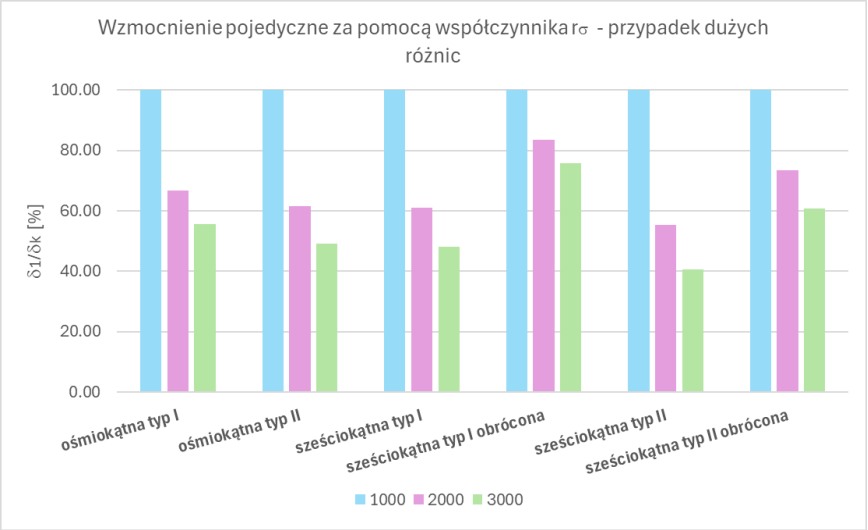
Wzmocnienie podwójną linią modułów pozwala nieznacznie zwiększyć spadki wartości przemieszczeń, z najbardziej spektakularną zmianą o około 11% w przypadku struktury sześciokątnej obróconej typu II (z 84,4% przy wzmocnieniu pojedynczym do 75,4% przy wzmocnieniu podwójnym dla $r_\sigma = 3{,}0$) (Rys. 4.56 i 4.57). Kolejne zmiany są zbliżone do 9-10% zmiany wartości: struktura sześciokątna typu II ze zmianą z 83,4% do 74,6%, struktura ośmiokątna typu II ze zmianą z 84,2% do 75,7% oraz struktura sześciokątna typu I ze zmianą z 85,9% do 77,3%. Struktura sześciokątna typu I obrócona (zmiana z 90,78% na 84,3%) oraz struktura ośmiokątna typu I (zmiana z 89,5% na 83,2%) nie wykazują tak znacznego wpływu przy zmianie sposobu wzmocnienia.



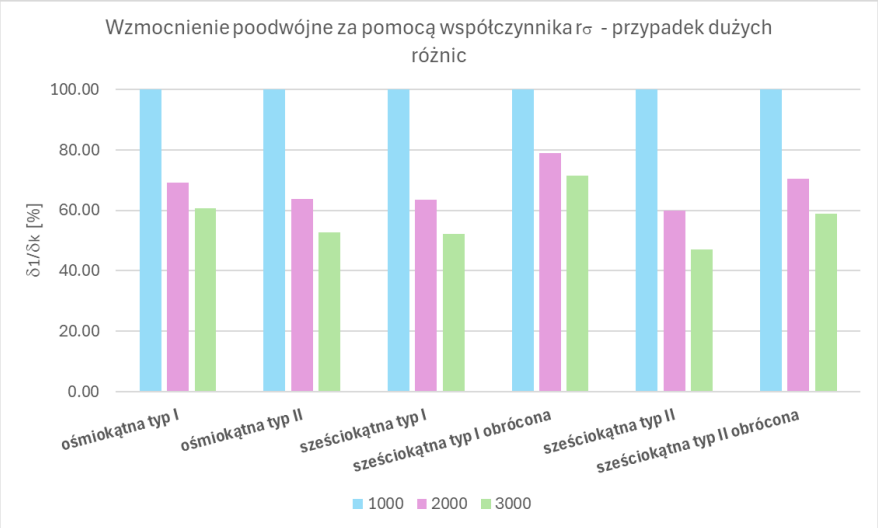
Rysunek 4.57 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

Analogicznie do przypadku małych różnic, w przypadku dużych wartości r_σ spadki przemieszczeń są zbliżone pomiędzy przypadkiem belki bez wzmocnienia i z wzmocnieniem, a różnice między nimi wynoszą zaledwie kilka procent. Jednak samo zastosowanie wzmocnienia pozwala na znaczne spadki wartości przemieszczeń pomiędzy poszczególnymi konstrukcjami, z największymi różnicami bliskimi 20% w przypadki struktury sześciokątnej typu I obróconej (zmiana spadku przemieszczeń z wartości 75,85% dla wzmocnienia pojedynczego do 52,19% dla wzmocnienia podwójnego dla $r_\sigma = 3000$) (Rys. 4.58 i 4.59). Zaskakującą, odwrotną zmianę, można zauważyć w przypadku struktury sześciokątnej typu II – w przypadku wzmocnienia pojedynczego spadek wartości przemieszczeń wynosi około 60%, zaś przy wzmocnieniu podwójnym – zaledwie 28%. Wynika to ze zmiany punktu odniesienia – konstrukcji jednorodnie sprężonej – która w przypadku podwójnego wzmocnienia samą wartością $r_\sigma = 1000$ uzyskuje znaczącą sztywność. Wzmocnienie podwójne w porównaniu do wzmocnienia pojedynczego nie wpłynęło jednak w żadnym stopniu na strukturę sześciokątną typu I pod względem zmian procentowych względem konstrukcji jednolicie wzmocnionej – w obu przypadkach spadek wynosi do 47%. Ze względu na różne punkty odniesienia podobne zachowanie wykazują również pozostałe układy modularne, z niewielkim procentowym wahaniem, uzyskują już odpowiednią sztywność wcześniej.



Rysunek 4.58 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).

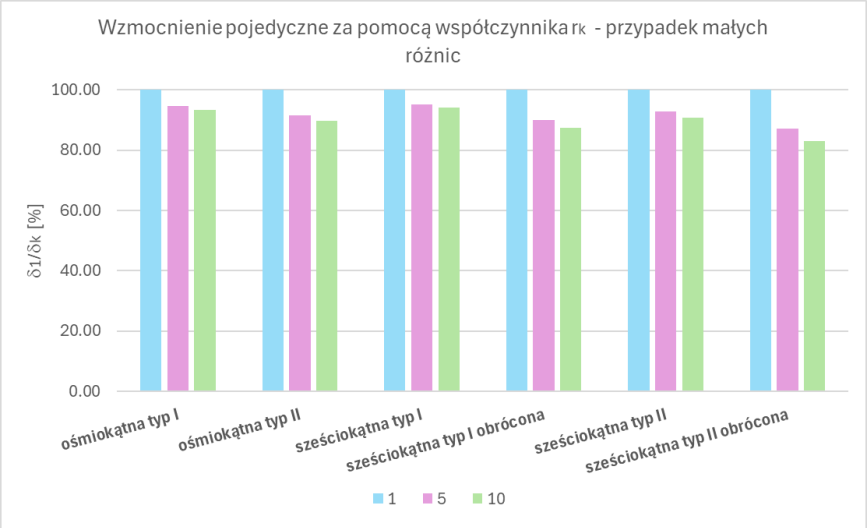


Rysunek 4.59 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).

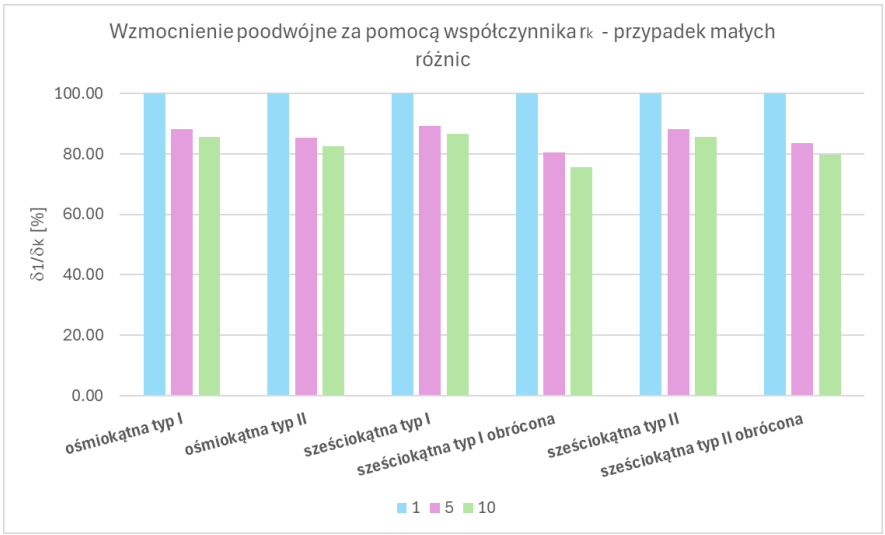
Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

Analogicznie do poprzednich wyników, wprowadzenie około 8-10% więcej modułów wzmocnionych nie wprowadza znacznych różnic pomiędzy przypadkami dla tej belki. Jednocześnie jednak pozwala na uzyskanie spadków przemieszczeń rzędu 7-10% (wzmocnienie pojedyncze) oraz 15-25% wzmocnienie podwójne. Największy procentowy spadek możemy zauważyć w przypadku struktury sześciokątnej typu II obróconej przy wzmocnieniu pojedynczym – 83% początkowej wartości przemieszczeń dla $r_k = 10$ (Rys. 4.60). W przypadku wzmocnienia podwójnego takie zachowanie wykazuje struktura sześciokątna

typu I obrócona – 75,6% początkowej wartości (Rys. 4.61). Poza tymi wartościami odbiegającymi nieznacznie od pozostałych wyników, większość konstrukcji wykazuje podobne spadki – około 90% przy wzmocnieniu pojedynczym oraz około 80% przy wzmocnieniu podwójnym ($r_k = 10$).



Rysunek 4.60 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).



Rysunek 4.61 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami).

Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_m

Wzmocnienie zastrzału A

Nie jest zaskakującym, że w przypadku porównania belki obciążonej dwiema siłami bez dodatkowego wzmocnienia i z nim są bardzo do siebie zbliżone – w przypadku tego typu wzmocnienia dokładanie dodatkowych 10-14% modułów nie wywołało żadnej różnicy w wartościach przemieszczeń (Tab. 1.34., Zał. 1).

Wzmocnienie zastrzału B

Wzmacnianie dodatkowych modułów w przypadku zastrzałów B również nie przyniosło znacznych zmian, pozwalając jedynie na zmniejszenie spadków o setne części procenta (Tab. 1.35., Zał. 1.).

4.3.8. Podsumowanie

Możliwe jest wzmocnienie lokalne wybranego obszaru w konstrukcji zbudowanej z modułów płaskich tensegrity. Wprowadzenie takich obszarów wzmocnień i osłabień pozwala na zmniejszenie przemieszczeń konstrukcji poprzez zwiększenie jej sztywności. Jest to możliwe do wykonania zarówno poprzez zwiększenie sprężenia wstępnego w modułach, jak i również pod wpływem zmiany oryginalnej geometrii struktury – zwiększenie przekrojów wybranych prętów.

Ponadto, możliwe jest odtworzenie wyników uzyskanych za pomocą optymalizacji topologicznej w pełnych konstrukcjach (bez usuniętych modułów) poprzez wprowadzanie wysokich wartości sił samonaprężających do poszczególnych modułów poprzez inteligentny szkielet (imitując obszary materiału) przy jednoczesnym pozostawieniu reszty modułów z wprowadzoną bardzo małą lub zerową wartością *self-stressu* (modelowanie obszarów pustek). Możliwe zatem jest budowanie struktur adaptowalnych do różnych rodzajów obciążeń za pomocą pojedynczych modułów tensegrity. Warto także zauważyć, że jest to najciekawszy z rozpatrywanych przypadków, mogący również przynieść największe korzyści w przypadku wykorzystania w praktyce.

Ważnym jest jednak zauważenie, że przemieszczenia w przypadku modelowania obszarów wypełnionych materiałem i obszarów pustki są znacznie większe niż w przypadku lekkiego wzmacniania konstrukcji. Istotne jest zatem modelowanie ich od początku z odpowiednim

celem, tj.: postawienie sobie pytania jak bardzo chcemy zoptymalizować zaprojektowaną strukturę. Kolejną istotną kwestią w przypadku modelowania tego typu konstrukcji jest określenie zakresu wybranych parametrów – kwestia ta jest najbardziej widoczna w przypadku małych różnic wartości σ pomiędzy poszczególnymi obszarami. W przypadku wybrania zbyt dużej wartości jednolitego sprężenia struktury możemy poprzez wzmacnianie wykroczyć poza zakres stosowalności – wtedy przemieszczenia zamiast spadać, mogą zacząć rosnąć (przekroczymy zakres wypłaszczania się krzywej $\delta(\sigma)$).

W wyniku niniejszych analiz zauważono również jak istotne jest odpowiednie dobranie typu układu modularnego do jej schematu statycznego, a także dobór zagęszczenia modułów wewnątrz konstrukcji i jej wstępnego sprężenia. Obserwując wyniki analiz wykonanych dla belki swobodnie podpartej, pod różnym obciążeniem, można zauważyć, że jeżeli schemat podpór pozostaje ten sam to można swobodnie pracować z różnymi typami obciążeń, co po raz kolejny potwierdza możliwość wykorzystania tych struktur w przypadku adaptowalnych konstrukcji. Możliwe jest zatem wykonanie struktury adaptowalnej tensegrity, do której wprowadzane będą różne schematy („wzory") optymalizacji topologicznej, które będą optymalna odpowiedzią na przyłożone do konstrukcji obciążenia. Obserwując wyniki dla belki swobodnie podpartej można zauważyć, że wprowadzenie „wzoru" (schematu lokalnych wzmocnień) odpowiedniego dla wybranego schematu obciążenia pozwala uzyskać bardzo zbliżone wyniki wartości przemieszczeń pomiędzy poszczególnymi przypadkami (przypadek obciążenia jedną siłą oraz dwoma siłami).

Obserwując wyniki analiz dla różnych przypadków zauważono, że struktury ośmiokątne (szczególnie typu II) wymagają znacznie więcej czasu, aby wykonać obliczenia niezależnie od dobranego schematu statycznego i rodzaju obciążeń, ponadto wymagają większej początkowej wartości sprężenia (lub większego zagęszczenia), aby uzyskać tę samą sztywność co pozostałe konstrukcje. Struktury sześciokątne (w szczególności obrócone) są bardziej efektywne niż struktury ośmiokątne nawet w przypadku jednolitego wzmocnienia. W dalszych obliczeniach, w wyniku wzmocnienia, również uzyskują niższe wartości przemieszczeń. Wpływa to jednak na ich podatność na lokalne wzmocnienie – są już znacznie sztywniejsze przy jednolitym wzmocnieniu. Warto także wspomnieć, że struktura sześciokątna typu II wykazywała największą reaktywność na zmiany wartości współczynnika r_k.

Na szczególną uwagę zasługuje struktura sześciokątna typu I obrócona, która nie tylko uzyskuje niskie wartości przemieszczeń, ale również w porównywalny procentowo sposób uzyskuje spadki przemieszczeń w różnych etapach wzmocnienia. Dodatkowo, konstrukcja ta jest aktywna w przypadku wszystkich typów obciążeń, schematów statycznych i pod wpływem wszystkich współczynników, co czyni ją najbardziej efektywną z wszystkich wybranych do analiz przykładów. Szczególnie istotna jest jej reaktywność na zmianę przekroju zastrzałów, która była rzadziej spotykana w przypadku innych układów. Jednocześnie jest strukturą prostą, co ułatwia wprowadzanie do niej wzorów i wbudowywanie jej w obszary kwadratowe i prostokątne.

Na uzyskane wyniki często wpływ ma również sposób wprowadzenia „wzoru" optymalizacji topologicznej – w szczególności wpływ ma liczba wzmocnionych modułów (w przypadku wzmocnienia podwójnego uzyskujemy większe spadki wartości przemieszczeń). Warto jednak zauważyć, że w przypadku belek zawierających dodatkowe wzmocnienie zmiany pomiędzy dwoma przypadkami były niewielkie, jeżeli niewielka była liczba dodatkowych modułów. Istotniejsze wydawały się dodatkowe moduły w przypadku wspornika, niż w przypadku belki swobodnie podpartej.

Sam wpływ poszczególnych współczynników r_σ, r_k, r_m jest zależny od rozmiarów struktury oraz jej schematu statycznego i sposobu obciążenia. Uzyskiwane spadki obciążeń, procentowo są zazwyczaj zbliżone do siebie. W Przypadku 1., gdzie proporcja wartości współczynnika r_σ był niewielki, typowa różnica w wartościach przemieszczeń oscylowała w okolicy 10-15% (przy wzmocnieniu pojedynczym) i wzrastała nawet do 20-25% przy wzmocnieniu podwójnym. W Przypadku 2., gdzie wartość współczynnika r_σ była bardzo duża, w przypadku podwójnego wzmocnienia można było uzyskać spadki przemieszczeń od 40% do nawet połowy początkowej wartości. Wzmacnianie poprzez zmianę wartości r_k pozwalało na uzyskanie wartości zbliżonych do wykorzystania wstępnego sprężenia (w szczególności w przypadku niewielkich konstrukcji), zaś wpływ współczynnika r_m był silnie zależny od schematu statycznego i rozmiaru struktury. Obserwując wyniki uzyskane dla wspornika o różnej długości, ale tym samym obciążeniu, zauważono, że wraz ze wzrostem rozmiarów konstrukcji znaczenie współczynników r_k i r_m rośnie, zaś r_σ maleje. Tym samym budując dużą strukturę ciągle bardziej efektywne może być usztywnienie jej w pewnych obszarach od początku jej pracy, co jednocześnie zawęża możliwość adaptacji konstrukcji. Warto również zauważyć, że w miarę jak zwiększamy rozmiar

struktury, wyniki procentowych spadków przemieszczeń dla poszczególnych parametrów w różnych układach modularnych stają się do siebie zbliżone. Istotnym jest również fakt, że zmiana przekrojów zastrzałów, niezależnie od rozmiarów struktury, przynosi najmniejsze zyski w porównaniu do pozostałych współczynników.

5. Analizy – struktury typu płytowego zbudowane z modułów przestrzennych (3D)

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie analizy konstrukcji tensegrity typu płytowego zbudowanych z modułów przestrzennych wzmacnianych za pomocą schematów opartych na rozwiązaniach optymalizacji topologicznej. Rozdział obejmuje szczegółowy opis modeli wykorzystywanych w analizach, zastosowanej metody, a także przedstawienie wyników opisanych analiz. Na potrzeby niniejszego rozdziału sformułowano następującą tezę badawczą: „Zastosowanie wzmocnienia inspirowanego optymalizacją topologiczną w strukturach typu płytowego zbudowanych z modułów przestrzennych tensegrity o różnej liczbie warstw modułów pozwala na zwiększenie sztywności konstrukcji. Zastosowane rozwiązanie nie jest zależne od liczby warstw, pozwala na uzyskanie analogicznych wyników. Rozwiązanie to pozwala na budowanie konstrukcji adaptowalnych, w których w strukturze o jednym schemacie podparcia mogą być zastosowane różne „wzory" wzmocnienia w zależności od zastosowanego obciążenia."

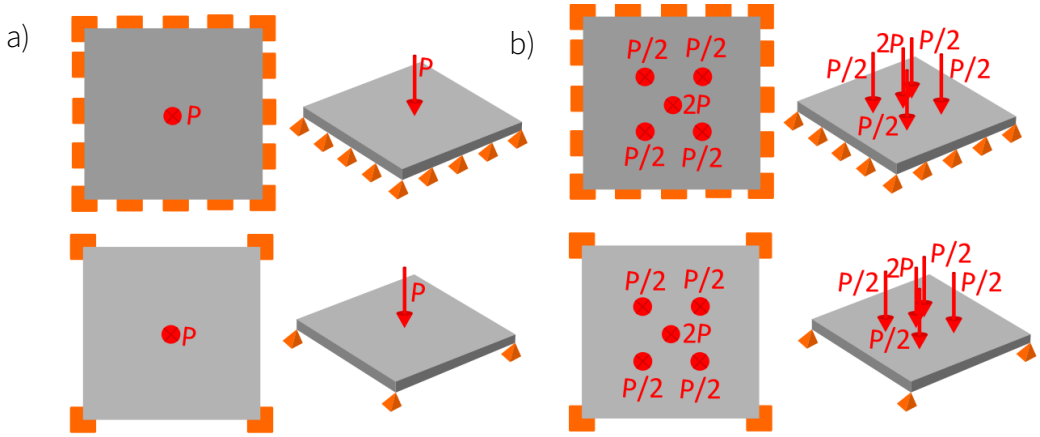
Weryfikacja powyższej tezy wykonana jest na przykładach struktur typu płytowego zbudowanych z dwóch modułów tensegrity: *Simplex* czterozastrzałowy oraz rozszerzony ośmiościan (*octahedron*). Przedstawione płyty składają się z jednej oraz dwóch warstw modułów, podparte są na dwa sposoby: w narożach oraz bokach konstrukcji. W niniejszych przykładach analizowano możliwość wprowadzania różnych wyników optymalizacji topologicznej do tej samej struktury, celem sprawdzenia możliwości adaptacyjnych takich konstrukcji.

We wszystkich przypadkach rozważano wzmocnienie za pomocą zmiany mnożnika *self-stress* oraz za pomocą zmiany geometrii (zmiana przekroju zastrzałów i cięgien). Weryfikację przeprowadzono za pomocą autorskiego programu napisanego w oprogramowaniu *Mathematica (wer. 13.3)*, zakres badania obejmuje analizę wartości przemieszczeń węzłów znajdujących się pod bezpośrednim obciążeniem. Wyniki optymalizacji topologicznej uzyskano w programie oprogramowania *Interactive 3D TopOpt App (ver. 1.03)*. W kolejnych podrozdziałach omówione zostały szczegółowo: geometria modelu, własności materiałowe,

warunki brzegowe, procedura analizy, jej wyniki oraz podsumowanie wyników i odpowiedzi na tezy badawcze zawarte na końcu rozdziału.

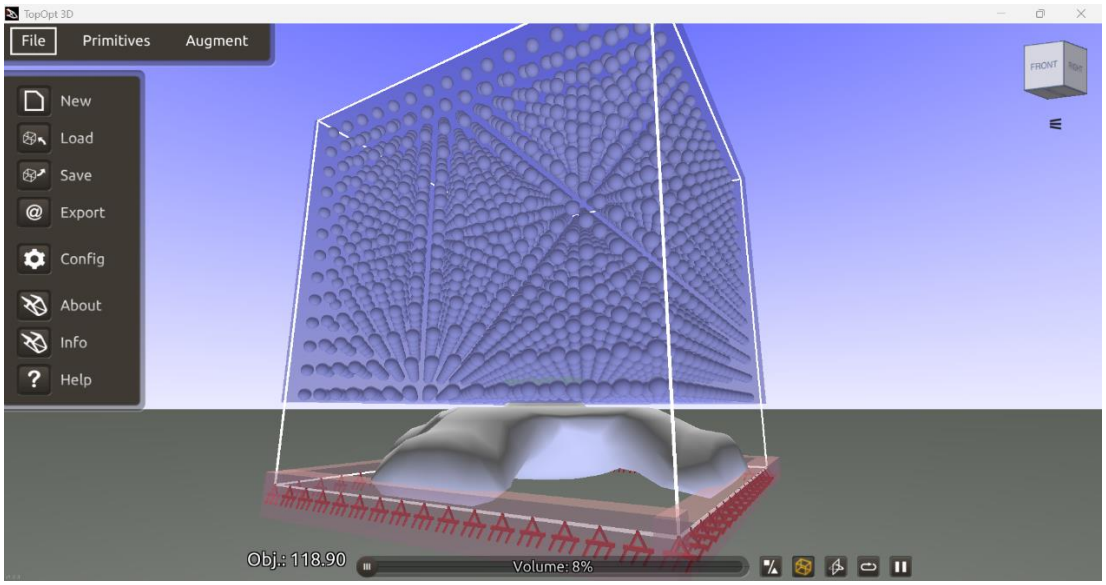
5.1. Zadania optymalizacji topologicznej

W ramach analiz struktur trójwymiarowych wybrano dwa przypadki obciążeń kwadratowej płyty: siłą skupioną $\boldsymbol{P}$ na środku rozpiętości oraz siłą skupioną o wartości $\boldsymbol{2P}$ na środku rozpiętości i czterema siłami skupionymi $\boldsymbol{P/2}$ rozłożonymi równomiernie na środku płyty. Rozpatrywano dwa przypadki podparcia – swobodne podparcie płyty w narożach (przypadek podparcia na słupach) oraz swobodne podparcie boków płyty (przypadek podparcia na ścianach). Przypadki zostały przedstawione schematycznie na Rys. 5.1.

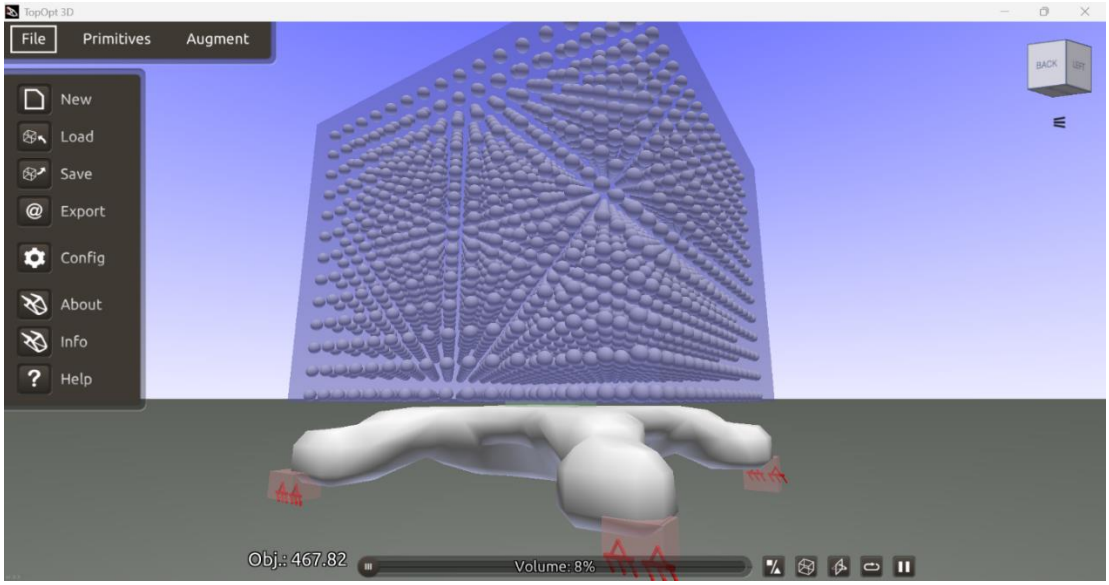


Rysunek 5.1 Schematyczne przedstawienie rozpatrywanych przypadków: a) przypadek obciążenia jedną siłą, b) przypadek obciążenia czterema siłami.

Analizowane przypadki zostały przeniesione do oprogramowania *Interactive 3D TopOpt App (wer. 1.03)*, które pozwala na wykonywanie zadań optymalizacji topologicznej w przestrzeniach trójwymiarowych. Ze względu na ograniczenia narzędzia możliwa była praca w obszarach o określonych proporcjach boków (na przykład 1:1:1, 1:2:1), żaden z tych obszarów nie odpowiadał tradycyjnym wymiarom płyty, w których wysokość powinna być znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów ($\boldsymbol{h/a < 1/5}$ dla płyt średniej grubości oraz $\boldsymbol{h/a < 1/20}$ dla płyt cienkich, gdzie $\boldsymbol{h}$ - wysokość płyty, $\boldsymbol{a}$ – wymiar charakterystyczny, długość lub szerokość płyty). W związku z tym zdecydowano się na pracę w obszarze 1:1:1, w którym wprowadzono przestrzeń bez materiału (oznaczona na Rys. 5.2 i 5.3 jako przestrzeń ze sferami). Wprowadzenie takiej przestrzeni ograniczyło obszar wypełniany materiałem do wymiarów oczekiwanych w płycie. Następnie w każdym z modeli wprowadzono podparcie i obciążenia odpowiadające przypadkom przedstawionym na Rys. 5.1.

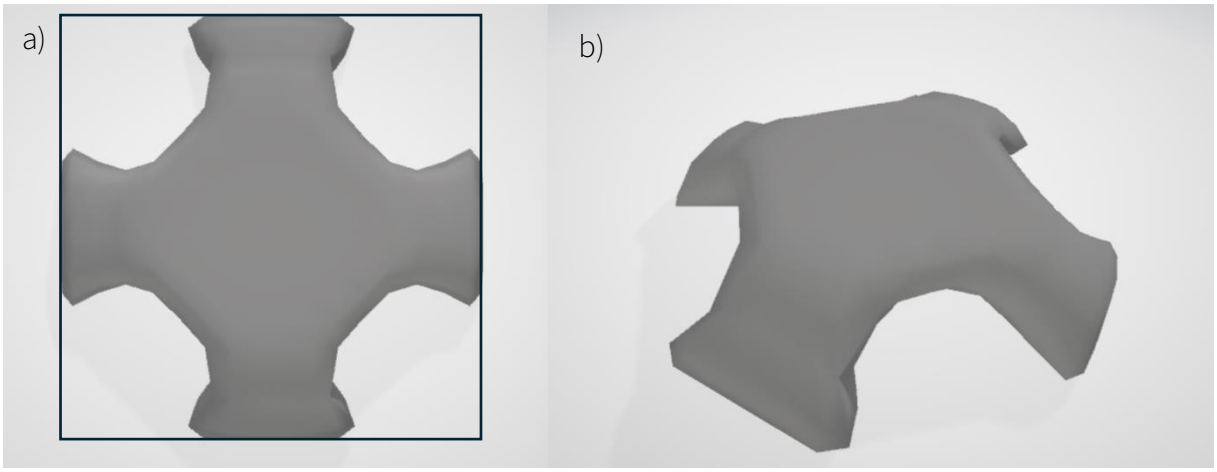


Rysunek 5.2 Zrzut ekranu przedstawiający pracę nad przypadkiem pełnego podparcia płyty na wszystkich bokach.

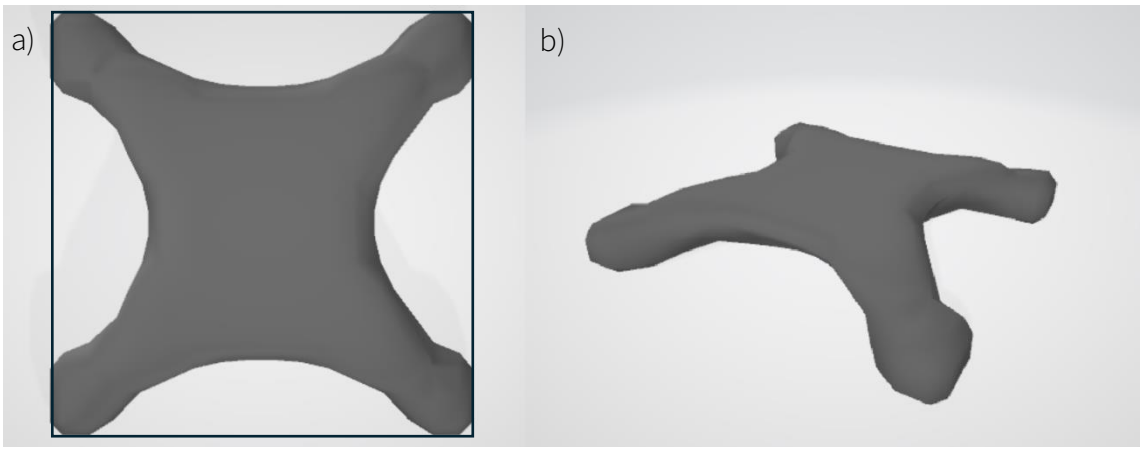


Rysunek 5.3 Zrzut ekranu przedstawiający pracę nad przypadkiem swobodnego podparcia płyty w narożach.

Bryły, będące wynikiem zadań optymalizacji topologicznej, zostały przedstawione na Rys. 5.4 i 5.5. Bryły te są tożsame w przypadku obciążenia pojedynczą siłą skupioną, jak i czterema siłami rozłożonymi na środku płyty (modelowane odpowiednio pojedynczym lub czterema obszarami sił w programie).



Rysunek 5.4 Bryła wynikająca z optymalizacji topologicznej przypadku pełnego podparcia płyty na wszystkich bokach w widoku: a) z góry oraz b) izometrycznym.

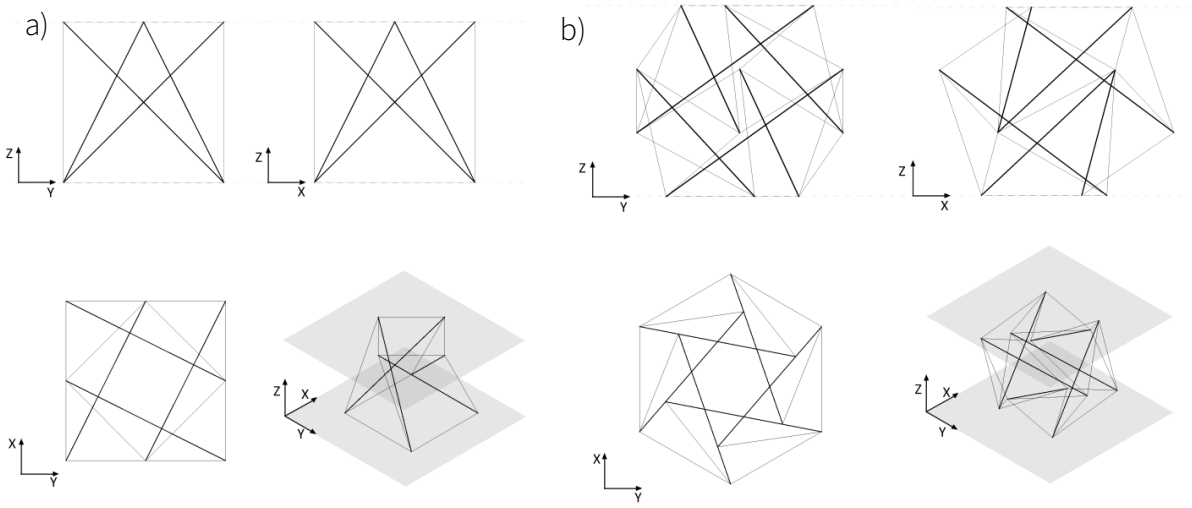


Rysunek 5.5 Bryła wynikająca z optymalizacji topologicznej przypadku swobodnego podparcia płyty w narożach w widoku: a) z góry oraz b) izometrycznym.

5.2. Struktury komórkowe tensegrity

Płyty są płaskimi elementami powierzchniowymi, których grubość jest znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów. Są to konstrukcje obciążone prostopadle do swojej płaszczyznym w związku z czym struktury komórkowe tego typu należy modelować za pomocą trójwymiarowych modułów, gdzie grubość płyty odpowiada wtedy wysokości jednej lub więcej warstw modułów. Jako podstawy struktur modularnych tensegrity wybrano dwa moduły przestrzenne tensegrity: *Simplex* czterozastrzałowy, który ma w podstawach dwa kwadraty oraz rozszerzony ośmiościan (*octaheadron*) o zastrzałach równej długości w układzie, w którym jest podatny (ustawiony na trójkątnej podstawie) (Rys. 5.6). *Simplex* czterozastrzałowy składa się z 12 cięgien (po cztery na każdą z kwadratowych podstaw oraz cztery cięgna łączące postawy) oraz 4 zastrzałów łączących podstawy. Górna podstawa modułu jest kwadratem wpisanym

w dolną podstawę. Moduł w rzutach oraz widoku izometrycznym widoczny jest na Rys. 5.6a. Rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) składa się z 24 cięgien i 6 zastrzałów, które są ułożone parami prostopadle do siebie. Cięgna łączą ze sobą wszystkie zastrzały. W podstawowym układzie (sztywnym) rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) stoi w układzie, w którym wszystkie zastrzały są zgodne z układem współrzędnych (jedna z par ustawiona jest pionowo, zgodnie z osią pionową układu). W przypadku podatnym, który został wybrany do analiz, moduł jest obrócony i stoi na jednej z trójkątnych podstaw łączących zastrzały z każdej z par. Moduł w rzutach oraz widoku izometrycznym widoczny jest na Rys. 5.6b.

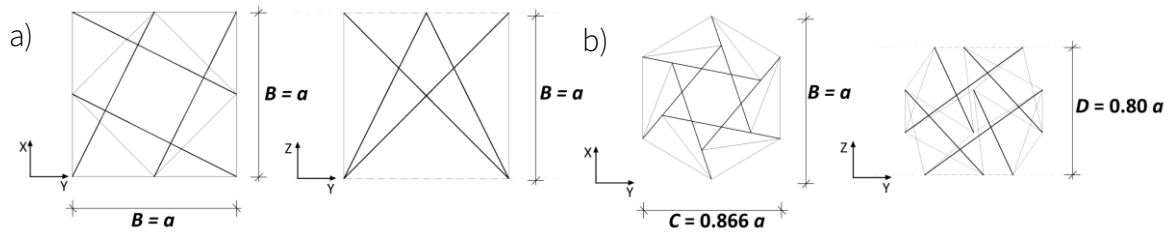


Rysunek 5.6 Wybrane moduły: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie podatnym przedstawione w widoku izometrycznym oraz w widoku trzech płaszczyzn. Na szaro (w widoku izometrycznym) oraz linią przerywaną (w widokach z boku) oznaczone są płaszczyzny podstaw modułów.

Celem uzyskania struktur modularnych o zbliżonych wymiarach jako podstawowy uznano wymiar modułu *Simplex* czterozastrzałowy, który jest wpisany w sześcian o boku $\boldsymbol{a}$. Następnie przeskalowano moduł rozszerzonego ośmiościanu, aby jeden z podstawowych wymiarów (długość) był równy długości modułu *Simplex* czterozastrzałowy. W związku z tym pozostałe wymiary modułu rozszerzonego ośmiościanu są równe: szerokość $\boldsymbol{C = 0{,}866\ a}$ oraz wysokość $\boldsymbol{D = 0{,}80\ a}$ (wymiary oznaczone na Rys. 5.7).

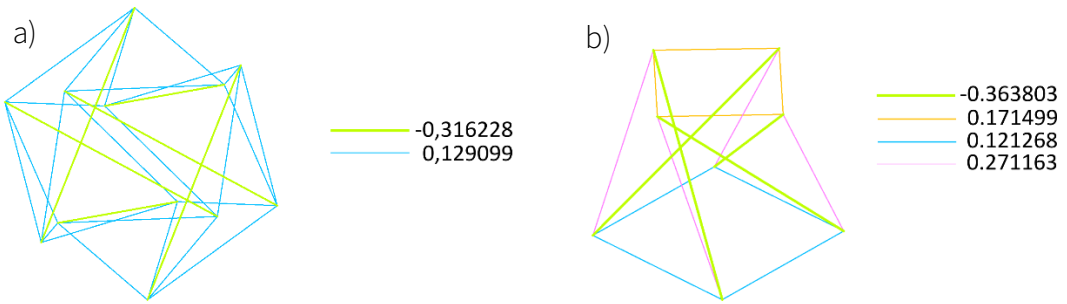
Po ustaleniu proporcji długości boków wewnątrz modułów ustalono stosunek sił sprężających poszczególne cięgna i zastrzały. Oba moduły mają jeden mechanizm infinitezymalny, który jest równoważony przez konkretny zestaw sił samonaprężający o relacjach określonych jak na Rys. 5.8. W przypadku rozszerzonego ośmiościanu, ze względu na identyczne długości zastrzałów, istnieją dwa zestawy prętów o różnych mnożnikach sił sprężających – ściskane

zastrzały i rozciągane cięgna. W przypadku *Simplexa* czterozastrzałowego istnieją cztery zestawy prętów: cięgna postaw górnej i dolnej, cięgna łączące podstawy oraz zastrzały.



Rysunek 5.7 Podstawowe wymiary modułów wykorzystywanych w analizach: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron).

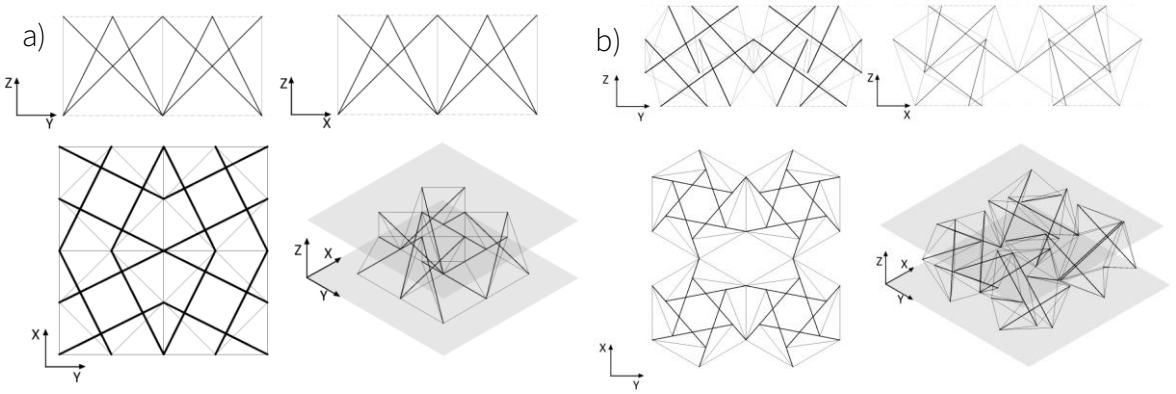
Moduły tensegrity można łączyć ze sobą na dwa sposoby – łącząc moduły o tej samej skrętności lub naprzemiennie moduły o przeciwnych skrętnościach. W pierwszym przypadku uzyskujemy struktury anizotropowe, zaś w drugim - o własnościach ortotropowych. W przypadku modułów *Simplex* czterozastrzałowy łączenie naprzemiennie modułów o zmiennej skrętności pozwala uzyskać konstrukcje o większej podatności, a tym samym struktury, które są łatwiejsze do adaptacji. W przypadku modułu rozszerzonego ośmiościanu w układzie podatnym łączenie naprzemienne modułów pozwala uniknąć dodawania dodatkowych prętów usztywniających konstrukcję – zachowujemy cechy tensegrity w całej płycie.



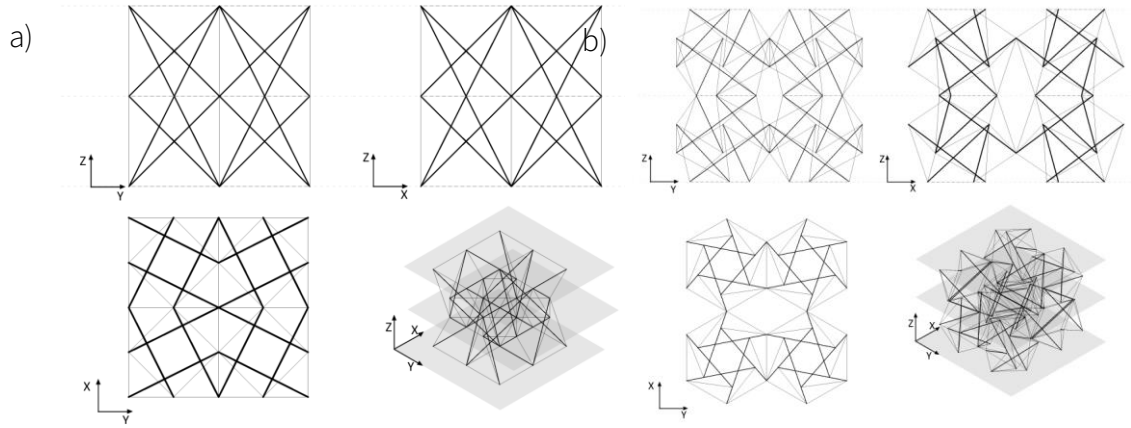
Rysunek 5.8 Moduły: a) rozszerzony ośmiościan (octahedron) oraz b) Simplex czterozastrzałowy z oznaczeniem stosunków wartości sił sprężających.

Moduły łączone są w sposób naprzemienny w struktury nazywane superkomórkami, które następnie są podstawą do budowy całych płyt. Superkomórki mogą być już układane obok siebie bez wymogu zmieniania skrętności. Zdecydowano, że istotnym dla wyników badań będzie przeprowadzenie analizy konstrukcji jednowarstwowych oraz dwuwarstwowych (warstwa górna jest odbiciem symetrycznym względem płaszczyzny górnych podstaw). Struktury dwuwarstwowe wykazują często większą sztywność względem układów jednowarstwowych. Superkomórki w przypadku jednowarstwowych struktur składają się

z czterech modułów ułożonych naprzemiennie, zaś w przypadku dwuwarstwowych – z ośmiu. Sposób łączenia naprzemiennego modułów w superkomórki został przedstawiony na Rys. 5.9 i 5.10 odpowiadających odpowiednio jednowarstwowym i dwuwarstwowym konstrukcjom.



Rysunek 5.9 Superkomórka jednowarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym.

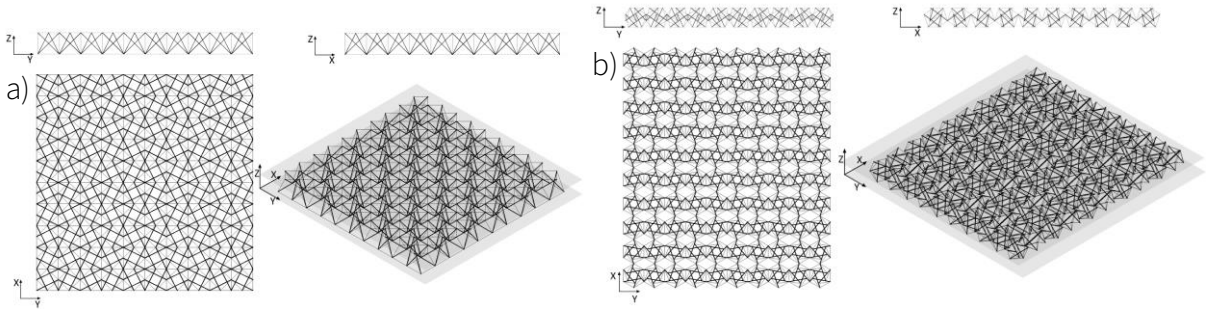


Rysunek 5.10 Superkomórka dwuwarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym.

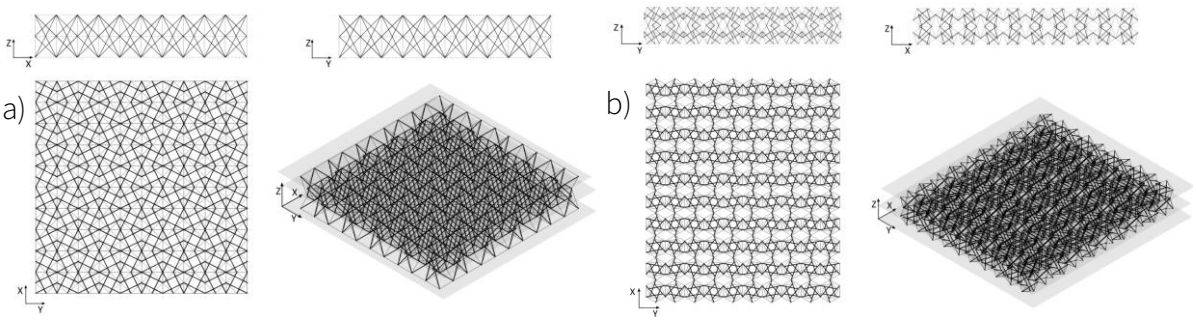
Analizy oparto o podstawowe układy składające się z 5×5 superkomórek poszczególnych modułów – otrzymano tym samym cztery struktury, dwie jednowarstwowe (Rys. 5.11) oraz dwie dwuwarstwowe (Rys. 5.12). Ze względu na uwspólnianie podstawowych wymiarów pojedynczych modułów uzyskane konstrukcje posiadają zbliżone wymiary – w przypadku układów z modułów *Simplex* czterozastrzałowych uzyskujemy strukturę jednowymiarową o wymiarach $10\,a \times 10\,a \times 10\,a$, w przypadku konstrukcji z modułów rozszerzonych ośmiościanów są to wymiary $10\,a\;x\;8{,}66\,a\;x\;8\,a$.

Założono, że dane materiałowe dla modułów będą jednostkowe ($E = 1$, gdzie E – moduł Younga), jako pole przekroju zastrzału ustalono $A_z = 1$, zaś pole przekroju cięgien jest równa

$A_c = k \cdot A_z$. W analizach niezależnych od współczynnika k wynosi on $0{,}1$, każda ze struktur w podstawowej formie sprężona jest z mnożnikiem $\sigma = 0{,}1$.



Rysunek 5.11 Płyta jednowarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym.

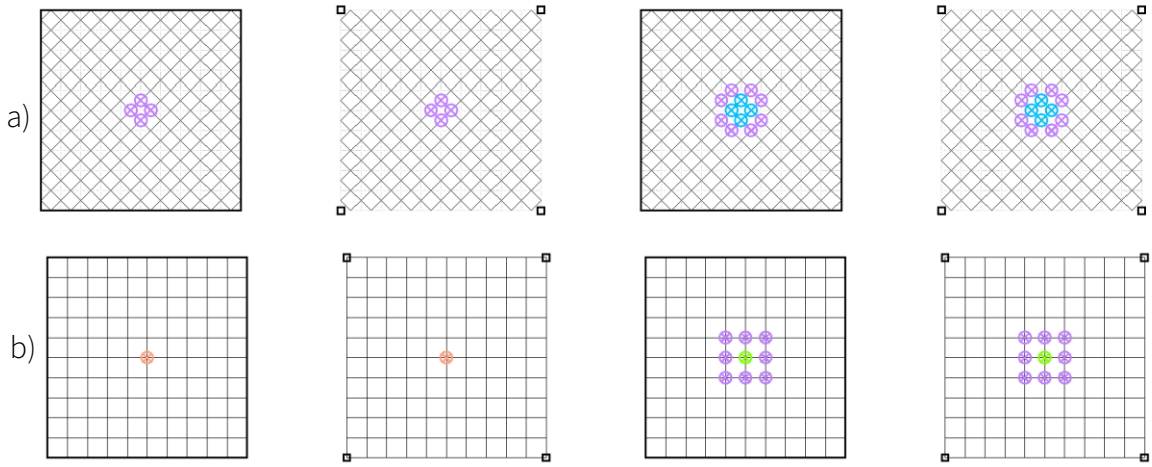


Rysunek 5.12 Płyta dwuwarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym.

Jako sposób podparcia ustalono dwa przypadki: podparcie w narożach oraz podparcie całych boków konstrukcji. W przypadku struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy oznaczało to zablokowanie pojedynczych dolnych węzłów (współrzędna $z = 0$) w narożach całej konstrukcji w kierunkach X, Y oraz Z (podparcie w narożach) oraz zablokowanie wszystkich dolnych węzłów na krawędziach dolnej podstawy w kierunkach X, Y oraz Z (podparcie całych boków) (Rys. 5.13). Struktura zbudowana z modułów rozszerzonego ośmiościanu wymagała zablokowania wszystkich węzłów dolnej podstawy narożnego modułu w kierunkach X, Y oraz Z, aby uzyskać stabilizację i sztywność konstrukcji w przypadku podparcia w narożach. W przypadku podparcia całych boków struktury wymagane było podparcie dolnych węzłów (współrzędna $z = 0$) oraz węzłów środkowych (współrzędna $0 < z < 0.8\ a$) (Rys. 5.14).

W przypadku obciążenia pojedynczą siłą całkowite obciążenie jest jednostkowe i wynosi $P = 1$. W przypadku modelowania na płytach tensegrity było ono przykładane jako jedna siła do górnego węzła na środku płyty (w przypadku konstrukcji z modułów *Simplex*

czterozastrzałowy, dwie warstwy – Rys. 5.13b), cztery siły każda o wartość $P/4$ przyłożone do centralnych węzłów płyty (struktura z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, jedna warstwa – Rys. 5.13a, konstrukcja z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), jedna warstwa – Rys. 5.14a) lub ośmiu sił o wartości $P/8$ przykładanych do symetrycznie do centralnych węzłów górnej powierzchni płyty (struktura z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), dwie warstwy – Rys. 5.14b).

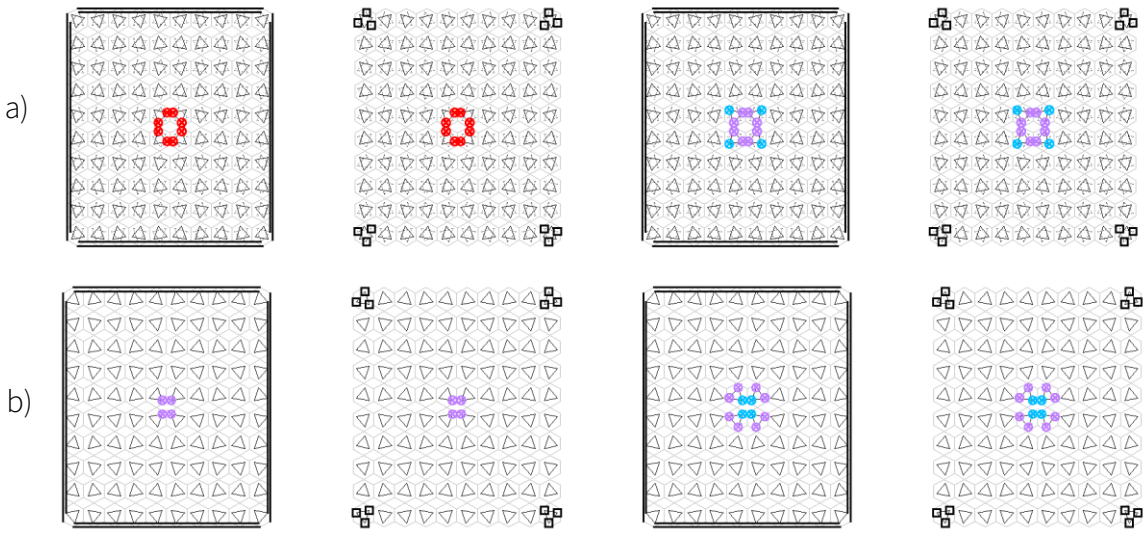


Rysunek 5.13 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła, ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia (pojedyncze siły oznaczone na czerwono) dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy, b) dwóch warstw. Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.

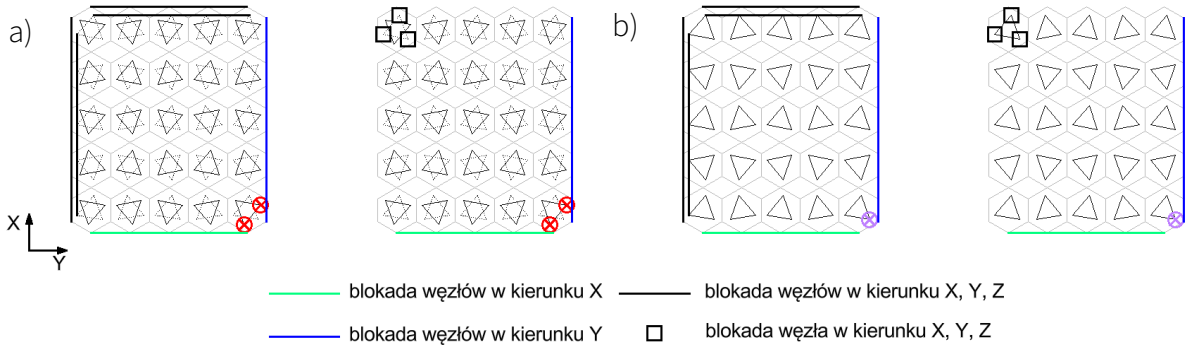
W przypadku modelowania wielu sił (sumarycznie równych $4P$: centralnej równej $2P$ oraz czterech sił $P/2$) na środku płyty obciążenie jest wprowadzane w postaci jednej siły równej $2P$ oraz ośmiu sił na górnej powierzchni płyty, każda o wartości $P/4$ (w przypadku konstrukcji z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, dwie warstwy – Rys. 5.13b) lub w postaci dwunastu sił na górnej powierzchni płyty, cztery równe $P/2$ oraz osiem sił każda o wartości $P/4$ (struktura z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, jedna warstwa – Rys. 5.13a, konstrukcja z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), jedna warstwa – Rys. 5.14a, struktura z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), dwie warstwy – Rys. 5.14b). Jako miejsce odczytu wartości przemieszczeń wybrano węzeł bezpośrednio obciążony siłą, znajdujący się na środku płyty.

Opisane struktury są bardzo złożone i zawierają wiele elementów: w przypadku struktury płytowej wykonanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy jest to 400 zastrzałów i 1200 cięgien (jedna warstwa), 800 zastrzałów i 2400 cięgien (dwie warstwy); w przypadku struktury płytowej

wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) jest to 600 zastrzałów i 2400 cięgien (jedna warstwa), 1200 zastrzałów i 4800 cięgien (dwie warstwy). Tak duży rozmiar modeli wymusił wykorzystanie schematów połówkowych w przypadku obliczeń w programie *Mathematica (wer. 13.3)* ze względu na ograniczenia sprzętowe (pamięć operacyjna). Schemat połówkowy płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) (jedna warstwa oraz dwie warstwy, przypadek pojedynczej siły) wykorzystywanego w analizach został przedstawiony na Rys. 5.15.



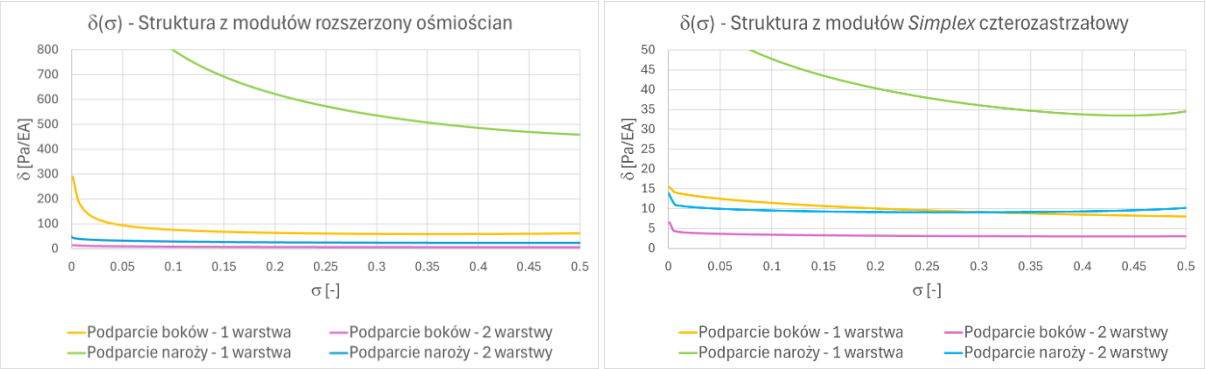
Rysunek 5.14 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła, ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia (pojedyncze siły oznaczone na czerwono) dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy, b) dwóch warstw. Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.



Rysunek 5.15 Schematyczny rysunek schematu połówkowego płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), przypadek pojedynczej siły na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej.

W pierwszym kroku sprawdzono, czy płyty wykonane z modułów zachowały cechy tensegrity, tj.: czy wraz ze wzrostem wartości sił sprężających następuje spadek przemieszczeń zgodnych z obciążeniem. Obie struktury przeanalizowano dla przypadku pojedynczego obciążenia przy podparciu naroży oraz podparciu boków, dla konstrukcji jedno- i dwuwarstwowych. Wszystkie

struktury zachowują cechy tensegrity, przy czym spodziewanie przypadek jednowarstwowych układów przy podparciu w narożach uzyskuje największe wartości przemieszczeń pod siłą, zaś konstrukcje dwuwarstwowe podparte na bokach – najmniejsze (Rys. 5.16). Im mniejsze są początkowe przemieszczenia (przy podparciu boków), tym szybciej (przy mniejszej wartości σ) następuje spadek wartości przemieszczeń. Wykresy przy podparciu naroży są mniej łagodne, natomiast w przypadku podparcia boków następuje szybki spadek i długi okres wypłaszczenia wykresu. Dla wszystkich przypadków dla wartości parametru $\sigma = [0{,}1; 0{,}5]$ można zauważyć przestrzeń stabilizacji wartości przemieszczeń (zakres stosowalności). Powyżej wartości $0{,}5$ można zauważyć wzrost wartości przemieszczeń. Pozwala to ustalić wstępną wartość parametru σ jako $0{,}1$ w dalszych analizach. Biorąc pod uwagę wyniki dla struktur zbudowanych z dwuwymiarowych modułów, istotnym jest ustalić wstępny parametr jako niższy, aby cały układ nie przekroczył zakresu stosowalności.

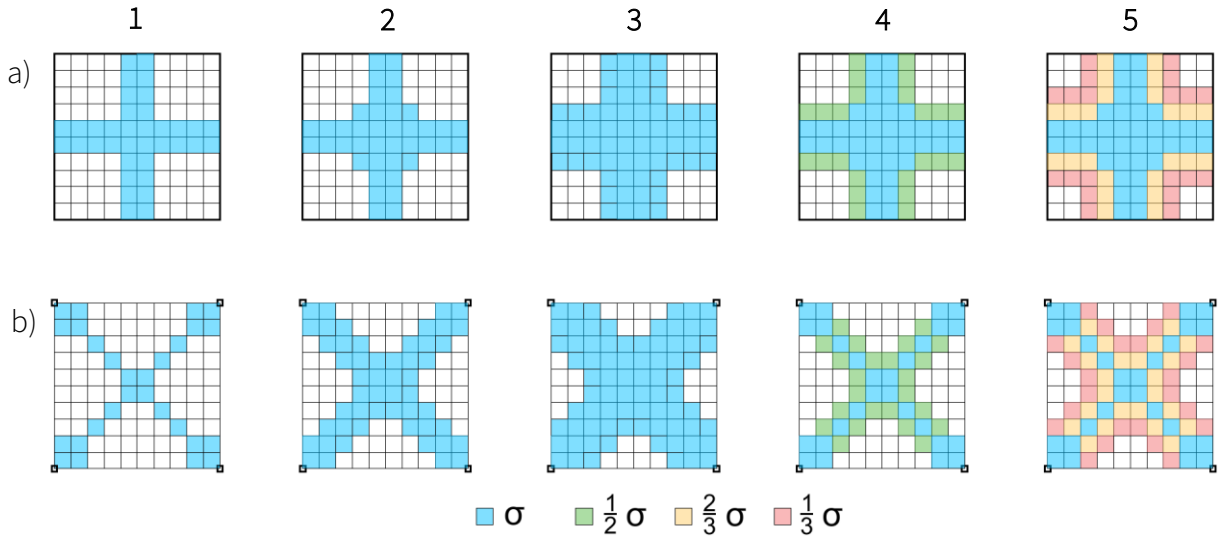


Rysunek 5.16 Wykresy zależności przemieszczenia węzłów pod siłą od mnożnika siły sprężającej w przypadku struktury z modułów: rozszerzony ośmiościan (octahedron) (po lewej) oraz Simplex czterozastrzałowy (po prawej).

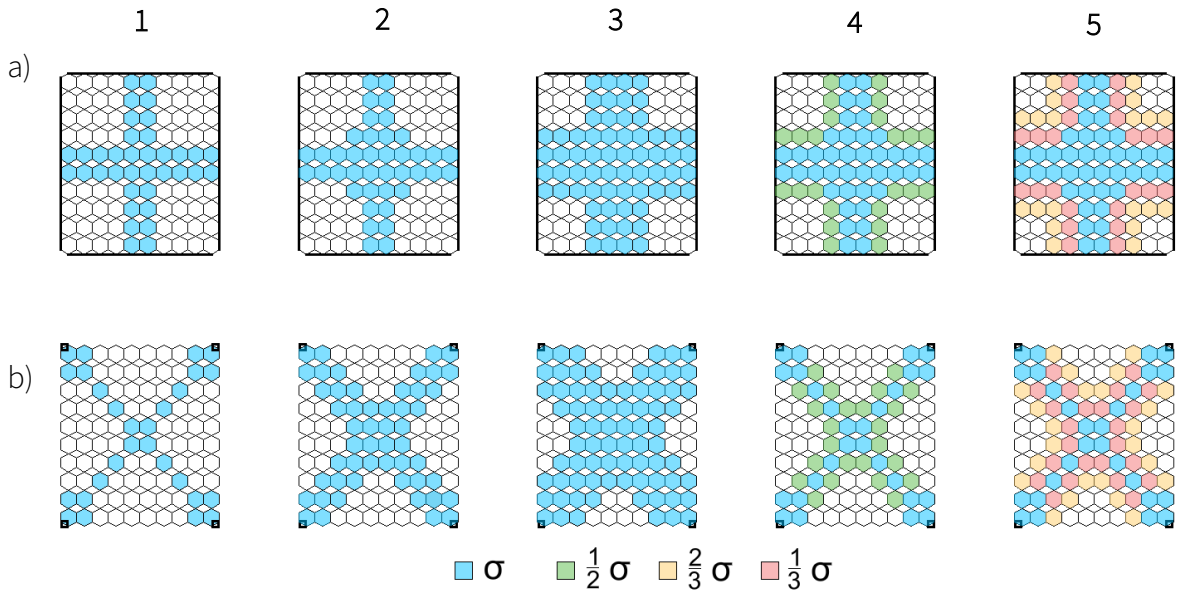
Jako propozycję wzmocnienia zdecydowano się, aby odtworzyć wzory optymalizacji topologicznej na dwa sposoby: poprzez jednolite wzmocnienie (stała, zwiększona, wartość σ lub k w wybranych modułach) lub poprzez wmocnienie stopniowe (zmienna, coraz większe ku środkowi, wartość σ lub k w wybranych modułach). Pierwszy typ przedstawiają schematy 1 - 3 na Rys. 5.17 i 5.18, zaś drugi schematy 4-5 na Rys. 5.17 i 5.18. W analizach przypadku pojedynczej siły wykorzystywane były schematy 1-3, zaś w przypadku wielu sił – wszystkie schematy 1-5. Pozwala to na dokładną analizę możliwości wprowadzania różnego rodzaju wzmocnień oraz różnego rodzaju przypadków obciążeń w tych samych strukturach.

Ze względu na prosty schemat budowy konstrukcji (moduły są układane jedne obok drugich, w liniach prostych) wzory są przeniesione w identyczny sposób. Pozwala to uzyskać jednakowe

pokrycie obszarami wzmocnionymi w obu rodzajach struktur, w przypadku jednakowego sposobu podparcia. W przypadku podparcia boków pozwala to uzyskać procentową proporcję obszarów wzmocnionych do całej konstrukcji wynosi: 36% w przypadku schematu 1, 40% - schematu 2, 64% - schematu 3 i 4 oraz 88 – schematu 5. Przy podpaciu naroży te stosunki wynoszą kolejno: 28%, 52%, 74%, 52% oraz 74%.



Rysunek 5.17 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty dwuwarstwowej wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) podparcie boków struktury, b) podparcie w narożach.



Rysunek 5.18 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty dwuwarstwowej wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty: a) podparcie boków struktury, b) podparcie w narożach.

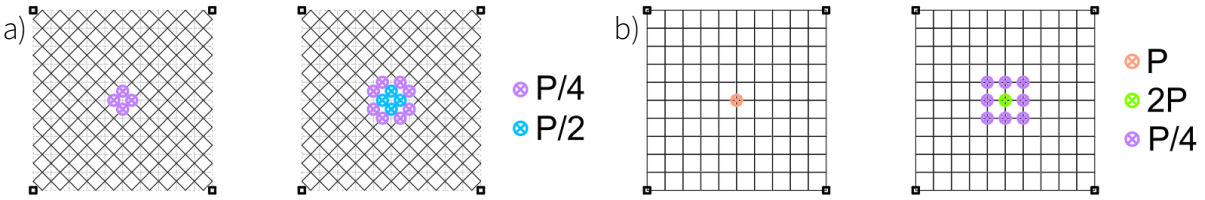
5.3. Przykłady obliczeniowe

Wyniki w formie tabelarycznej dla poszczególnych przypadków znajdują się w Załączniku 1. (załącznik elektroniczny) dostępnym w Bazie Wiedzy Politechniki Warszawskiej pod adresem: repo.pw.edu.pl/info/researchdata/WUTc6c75b7972984e2fb92568496d1e9de8/ (numer DOI: 10.71724/5raw-yd56).

5.3.1. Struktury zbudowane z modułów *Simplex* czterozastrzałowy

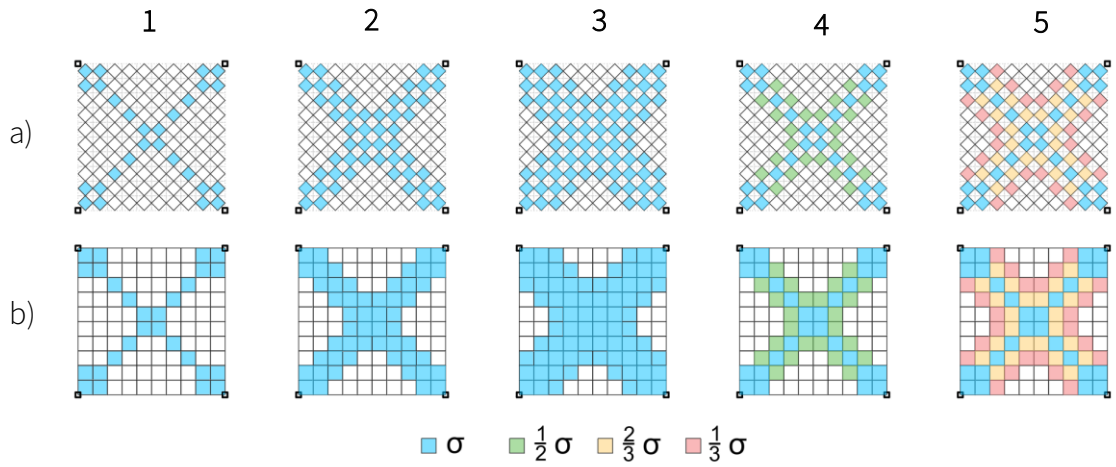
Podparcie naroży

W przypadku podparcia naroży konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy rozpatrywano 2 przypadki obciążenia (siła pojedyncza skupiona w środku rozpiętości płyty oraz zestaw wielu sił skupionych na środku rozpiętości płyty). Oba przypadki były rozpatrywane dla płyty jednowarstwowej oraz dwuwarstwowej (Rys. 5.19).



Rysunek 5.19 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami), b) dwóch warstw warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.

W przypadku obciążenia pojedynczą siłą w środku rozpiętości rozpatrywano przypadek struktury równomiernie wzmocnionej oraz wzmocnień jak pokazano na schematach 1-3 (Rys. 5.20a przedstawia wzmocnienie w przypadku konstrukcji jednowarstwowej, zaś Rys. 5.20b – dwuwarstwowej). Obciążenie wieloma siłami było analizowane dla przypadku wzmocnienia równomiernego, wzmocnień bez stopniowania jak na schematach 1-3 oraz dodatkowo poprzez wzmocnienie jak na schematach 4-5, w których wprowadzono stopniowanie wzmocnienia.



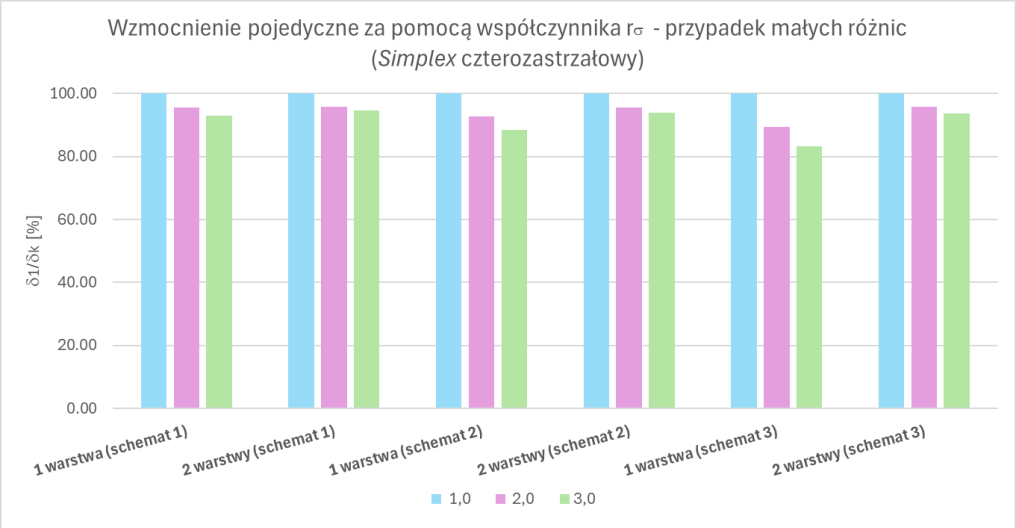
Rysunek 5.20 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej.

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Przypadek 1. opisuje sytuację, w której „wzór" wzmocnienia, czyli moduły o większej wartości siły sprężającej, jest sprężony siłą od jeden do trzy razy większą od siły w pozostałych modułach (wartości współczynnika $r_\sigma = 1$ do $r_\sigma = 3$). Jest to sytuacja lekkiego wzmocnienia struktury, które pozwala na zmniejszenie przemieszczeń wybranych węzłów i nieznaczne usztywnienie konstrukcji w obszarach przeciążonych. W tym przypadku układ modularny bez obszarów wzmocnień miała ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}1,\ k = 0{,}1$. Przypadek dla współczynnika $r_\sigma = 1$ jest przypadkiem struktury jednorodnie wzmocnionej, do której odnoszono się w przypadku przeliczania procentowego wzmocnienia konstrukcji.

W przypadku podparcia naroży najlepsze wyniki uzyskano w dwuwarstwowych strukturach wykonanych z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (9,54 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 1{,}0$, obciążenie pojedynczą siłą). Wyniki ich ugięć pod wpływem pojedynczej siły są nawet pięciokrotnie mniejsze niż w przypadku konstrukcji z tych samych modułów, ale jednowarstwowych (47,71 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 1{,}0$). W przypadku różnicy pomiędzy strukturą złożoną z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) wartość ugięcia jest aż 80-krotnie większa (jedna warstwa, 798,96 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 1{,}0$) i 3-krotnie większa w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej (29,07 $\frac{Pa}{EA}$ dla $r_\sigma = 1{,}0$) niż wartości dwuwarstwowej struktury złożonej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (Tab. 2.1., Zał. 1.).

Wprowadzanie poszczególnych schematów wzmocnienia pozwala uzyskać coraz mniejsze wartości ugięć (Rys. 5.21). W przypadku konstrukcji jednowarstwowych wprowadzenie dwukrotnie większych sił sprężających we wzmacnianych obszarach pozwala uzyskać odpowiednio 95,59% (schemat 1), 92,70% (schemat 2) oraz 89,47% (schemat 3) oryginalnych obciążeń. Wzmocnienie trzykrotne pozwala uzyskać nawet 92,97% (schemat 1), 88,40% (schemat 2) oraz 83,29% (schemat 3) początkowych obciążeń bez użycia wzmocnienia. Warto zauważyć, że schematów w takim układzie można używać zamiennie, aby uzyskać podobny efekt – można na przykład zamienić schemat 2 z dwukrotnym wzmocnieniem na schemat 1 z trzykrotnym wzmocnieniem. Pozwala to na adaptację różnych przypadków w zależności od możliwości sprężenia. Dwuwarstwowe struktury, które już w przypadku początkowych obciążeń uzyskują niższe wartości ugięć, pod wpływem wybranych schematów również pozwalają na uzyskanie zmniejszonych ugięć o około 4% w przypadku podwójnego wzmocnienia oraz 5% (schemat 1) do 6% (schemat 3) w przypadku potrójnego wzmocnienia wybranych obszarów. W tym przypadku również można używać zamiennie różnych schematów, aby uzyskać analogiczny wynik.

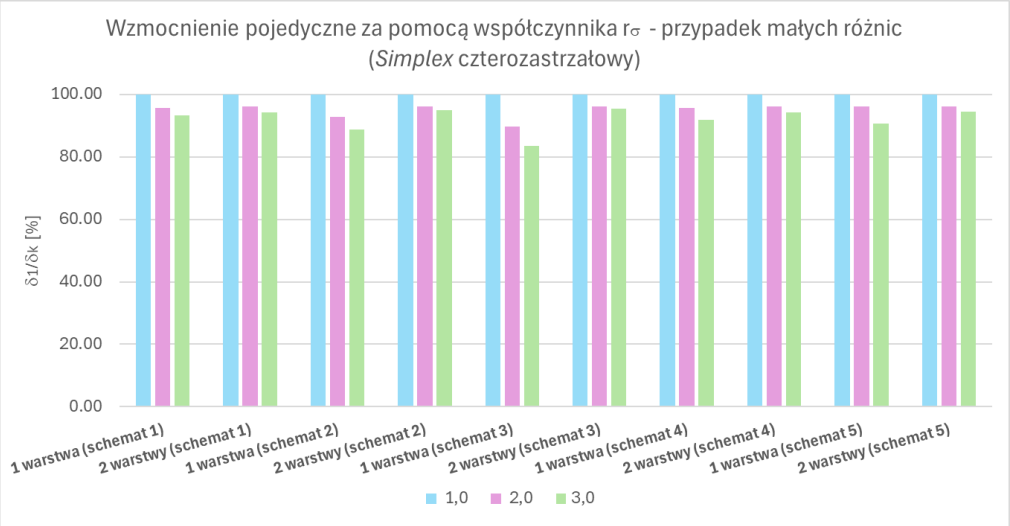


Rysunek 5.21 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

W przypadku obciążenia wieloma siłami ($r_\sigma = 1{,}0$) ponownie konstrukcja dwuwarstwowa złożona z modułów *Simplex* czterozastrzałowy uzyskuje najmniejsze wartości przemieszczeń (34,91 $\frac{Pa}{EA}$) – 5-krotnie mniejsze niż w przypadku jednej warstwy *Simplexa* czterozastrzałowego

(186,06 $\frac{Pa}{EA}$) oraz 86-krotnie (jedna warstwa – 2991,26 $\frac{Pa}{EA}$) i 3-krotnie (dwie warstwy – 110,27 $\frac{Pa}{EA}$) mniejsze niż struktury składające się z rozszerzonych ośmiościanów (Tab. 2.4., Zał. 1.).

Wprowadzenie większej liczby sił oraz większej liczby schematów pozwala jeszcze lepiej pokazać możliwości adaptowalności takich konstrukcji – nie tylko wprowadzanie obszarów wzmocnień pozwala uzyskać spadek wartości przemieszczeń o nawet 20%, jak i pozwala używać zamiennie wielu różnych schematów (Rys. 5.22). W przypadku struktur jednowarstwowych można zaobserwować wcześniej spotykane spadki wartości przemieszczeń, coraz większe dla kolejnych schematów, od 95,82% (schemat 1) do nawet 89,65% (schemat 3) oryginalnych przemieszczeń w przypadku wzmocnień podwójnych. W przypadku wzmocnień potrójnych są to wartości od 93,36% do 83,57% wartości początkowych przemieszczeń. Stosowanie schematów ze stopniowym wzmocnieniem (schemat 4 i 5) również pozwala uzyskać spadki wartości równe 91,94% (schemat 4) i 90,71% (schemat 5) w przypadku wzmocnienia potrójnego. Oznacza to, że mogą one swobodnie zastąpić jednolite wzmocnienie. Dwuwarstwowe struktury ponownie uzyskują bardziej zbliżone wyniki: od 95,59% (schemat 1) do 94,31% (schemat 3) wartości początkowych przemieszczeń przy wzmocnieniu trzykrotnym, niewiele więcej (około 96%) w przypadku wzmocnienia dwukrotnego. Tutaj ponownie, schematy 4 i 5 pozwalają uzyskać kolejno 94,35% oraz 94,46% wartości początkowych ugięć przy potrójnym wzmocnieniu, analogicznie około 96% przy wzmocnieniu podwójnym.



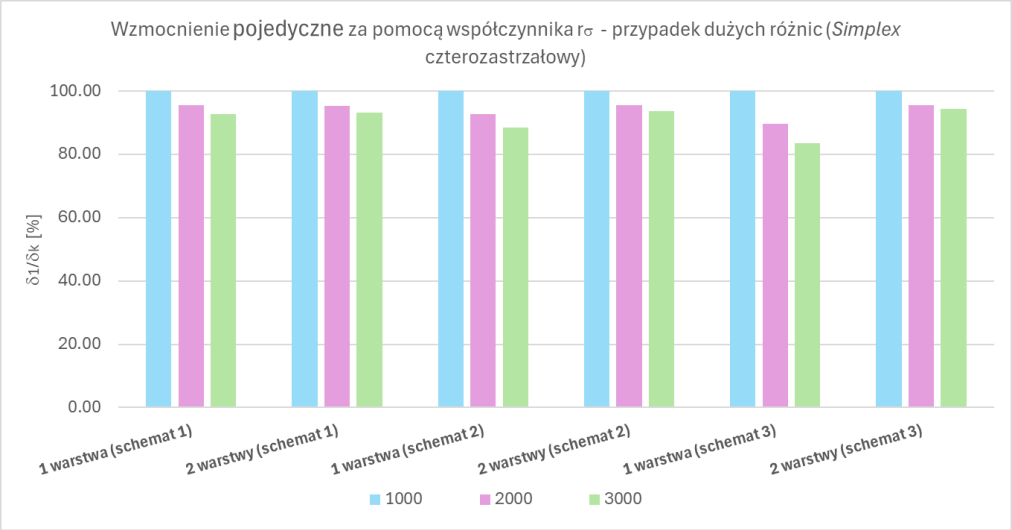
Rysunek 5.22 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

W tym przypadku obszary wzmocnione są sprężone siłą od tysiąca do trzech tysięcy razy większą niż w przypadku obszarów niewzmocnionych (wartości współczynnika $r_\sigma = 1000$ do $r_\sigma = 3000$). Przypadek ten ilustruje sytuację, gdy wzmacniamy jedynie obszary imitujące materiał w strukturze topologicznie optymalnej, pozostałe obszary zaś imitują pustkę. W ten sposób starano się zbliżyć jak najbardziej to wyników optymalizacji topologicznej. W tym przypadku siatka modularna bez obszarów wzmocnień miała ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}00001,\ k = 0{,}1$. Punktem odniesienia zawsze są konstrukcje dla przypadku r_σ równie 1000. W tym przypadku oznacza to dwie różne wartości dla wzmocnienia podwójnego i pojedynczego. Takie podejście wynika z faktu, że struktura sprężona tak małą siłą nie jest w stanie uzyskać stabilności pod obciążeniem.

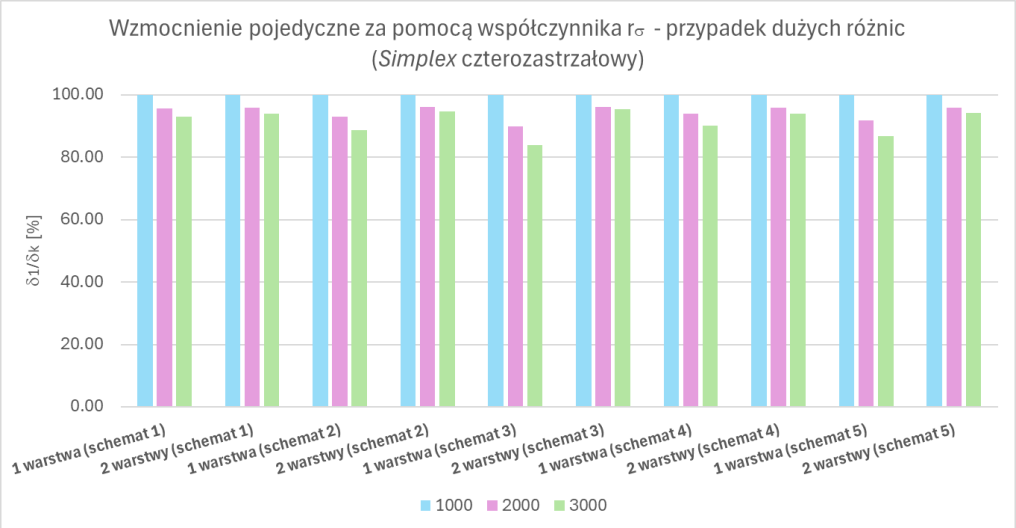
Również w przypadku dużych różnic pomiędzy obszarami wzmocnionymi i osłabionymi (modelowanie obszarów materiału i pustki) najmniejsze wartości ugięć uzyskują konstrukcje dwuwarstwowe zbudowane z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (9,70 $\frac{Pa}{EA}$). Wyniki są 6-krotnie mniejsze niż w przypadku jednowarstwowej struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (58,69 $\frac{Pa}{EA}$) , 170-krtonie mniejsze niż w przypadku jednowarstwowej (1708,51 $\frac{Pa}{EA}$) oraz 3,5-krotnie mniejsze w przypadku dwuwarstwowej konstrukcji (34,86 $\frac{Pa}{EA}$) zbudowanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) (Tab. 2.2., Zał. 1.).

Kolejne schematy wzmocnień zastosowane w płycie jednowarstwowej pozwalają uzyskać spadki obciążeń sięgające nawet 20% (Rys. 5.23). Zastosowanie schematu 1 pozwalało uzyskać spadek wartości przemieszczeń około 95% ($r_\sigma = 2000$) do 93% ($r_\sigma = 3000$), schemat 2 zwiększał te wartości do odpowiednio 93% i 89%, a schemat 3 do wartości 90% oraz 84%. Ponownie można zauważyć, że poszczególne schematy i wartości wzmocnień mogą być stosowane zamiennie. W przypadku struktury dwuwarstwowej spadki wartości przemieszczeń są mniejsze ze względu na większą sztywność konstrukcji. Wszystkie schematy pozwalają uzyskać spadek wartości przemieszczeń około 95% ($r_\sigma = 2000$) do 93% ($r_\sigma = 3000$).



Rysunek 5.23 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Wprowadzenie większej liczby sił i większej liczby schematów pozwala zobaczyć szersze możliwości adaptacji układów wielomodułowych. Większe różnice pomiędzy obszarami wzmocnionymi i niewzmocnionymi pozwalają uzyskać wyniki analogiczne do przypadków małych różnic – możliwe jest uzyskanie spadku wartości przemieszczeń nawet o 20% (Rys. 5.24). W przypadku struktur jednowarstwowych modelowanie obszarów materiału i pustki pozwala na spadki wartości przemieszczeń od 95,69% ($r_\sigma = 2000$) do 93% ($r_\sigma = 3000$) w przypadku schematu 1, od 92,90% ($r_\sigma = 2000$) do 88,78% ($r_\sigma = 3000$) w przypadku schematu 2 i od 89,83% ($r_\sigma = 2000$) do 83,88% ($r_\sigma = 3000$) w przypadku schematu 3. Schemat 4 i 5 pozwalają za to na spadki wartości przemieszczeń do, odpowiednio, 90% i 86,66% ($r_\sigma = 3000$). Łatwo zauważyć również, że wiele ze schematów pozwala wymiennie uzyskać analogiczne wyniki.



Rysunek 5.24 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Przypadek 3. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

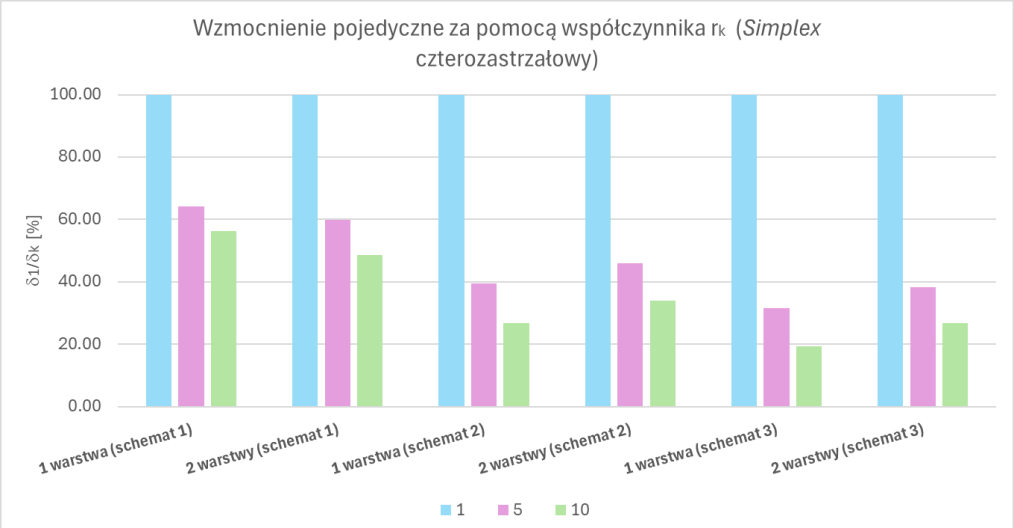
Analizowano sytuację, w której wzmocnienie jest wprowadzane już na etapie budowy struktury, tworząc konstrukcję, która od początku jest optymalna topologicznie dla przyjętego obciążenia. W tym przypadku siatka modularna bez obszarów wzmocnień miała ustalone następujące współczynniki: $\sigma = 0{,}1,\ k = 0{,}1$, zaś obszary wzmocnione zawierają moduły sztywniejsze o określoną wartość – przekroje cięgien są zwiększane od przypadku dziesięciokrotnie mniejszego od przekroju zastrzałów do przypadku, w którym cięgna i zastrzały mają równe pola. Spadek procentowy przemieszczeń obliczono przyjmując jako punkt odniesienia siatki o współczynniku k równym 0,1 w całej konstrukcji $(r_k = 1)$.

We wszystkich przypadkach zwiększanie sztywności struktury poprzez zmianę współczynnika k (zmianę geometrii konstrukcji na etapie budowy) pozwala uzyskać największe spadki przemieszczeń. Ponownie dwuwarstwowa struktura zbudowana z modułów *Simplex* czterozastrzałowy jest konstrukcją o najmniejszych wartościach przemieszczeń (9,54 $\frac{Pa}{EA}$). Tym razem jednak różnice pomiędzy poszczególnymi strukturami są mniejsze, bardziej zbliżone do Przypadku 1. wzmocnienia za pomocą sił samonaprężających. Iloraz wartości ugięć konstrukcji dwuwarstwowej do struktury jednowarstwowej modelowanej modułami *Simplex* czterozastrzałowy (47,71 $\frac{Pa}{EA}$) wynosi 5. Sztywniejsza jest dwuwarstwowa konstrukcja zbudowana z rozszerzonych ośmiościanów (29,41 $\frac{Pa}{EA}$), stosunek jej ugięć do ugięć dwuwarstwowej struktury modelowanej modułami *Simplex* czterozastrzałowy wynosi 3.

Największe ugięcia zaobserwowano w przypadku jednowarstwowej konstrukcji zbudowanej z rozszerzonych ośmiościanów (805,52 $\frac{Pa}{EA}$) i są one o około 84 razy większe niż w przypadku najmniejszych ugięć (Tab. 2.3., Zał. 1.).

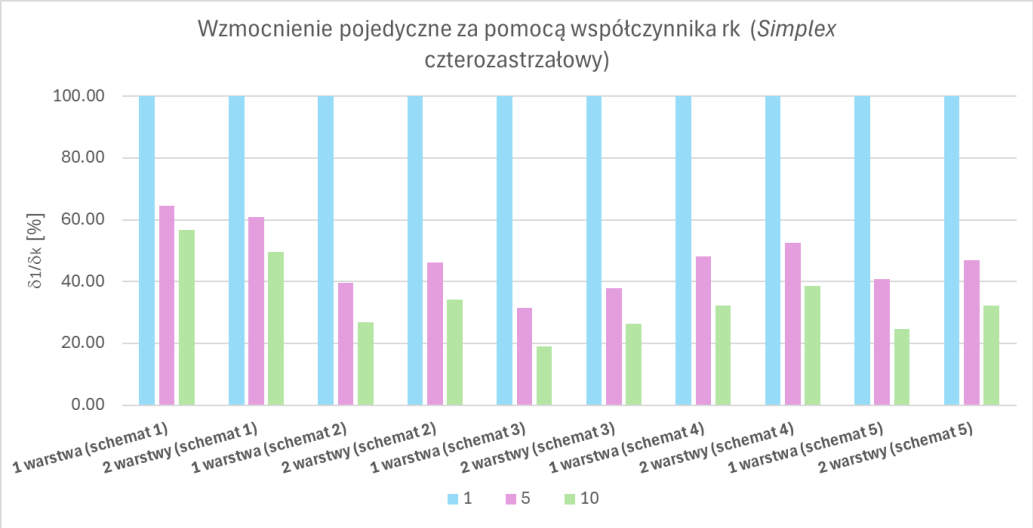
Jednowarstwowe struktury zbudowane z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, w których współczynnik $r_k = 5$ pozwalają na spadek wartości przemieszczeń o około 35% (schemat 1), 60% (schemat 2) oraz 70% (schemat 3) (Rys. 5.25). Są to wartości znacznie przekraczające możliwości, które można uzyskać za pomocą wzmacniania siłą sprężającą. W przypadku $r_k = 10$ wartości te spadają aż o 45% (schemat 1),, 70% (schemat 2) oraz 80% (schemat 3). Warto zauważyć, że przy takiej zmianie uzyskujemy w przypadku schematu 3 i $r_k = 10$ wartości przemieszczeń zbliżone dla układów dwuwarstwowych – pozwala to zatem na wymienność wielu struktur w zależności od możliwości i zakresu projektu. W przypadku konstrukcji dwuwarstwowych, które oryginalnie mają znacznie niższe wartości przemieszczeń również możemy uzyskać znacznie większe spadki. W przypadku $r_k = 5$ do około 60% początkowych przemieszczeń dla schematu 1, około 46% dla schematu 2 oraz 38% dla schematu 3. Przy jeszcze większym wzmocnieniu ($r_k = 10$) wartości te wynoszą odpowiednio około 49%, 34%, 27% początkowych przemieszczeń (Rys. 5.25).

Zmiana sposobu obciążenia i dodanie nowych schematów pokazuje, że w dalszym ciągu jesteśmy w stanie adaptować konstrukcje do warunków zewnętrznych (Rys. 5.26). Wprowadzone trzy podstawowe schematy w strukturze jednowarstwowej pozwalają ponownie na znaczne spadki wartości przemieszczeń – dla układów jednowarstwowych ($r_k = 5$) jest to od około 65% początkowych przemieszczeń w przypadku schematu 1, około 40% w przypadku schematu 2 i 32% w przypadku schematu 3. Zwiększenie współczynnika r_k do wartości 10 pozwala uzyskać odpowiednio wartości około 57%, 27% i zaledwie 19% oryginalnych przemieszczeń. Schemat 4 i 5 również pozwalają na znaczne spadki, przy różnorodnym sprężeniu całej konstrukcji – dla $r_k = 5$ otrzymujemy spadki o około 50% (schemat 4) i 60% (schemat5), w przypadku $r_k = 10$ wartości przemieszczeń maleją o około 68% (schemat 4) i 76% (schemat 5). Ponownie wzmocnienie $r_k = 10$ pozwala uzyskać sztywność struktury jednowarstwowej zbliżoną od konstrukcji dwuwarstwowej.



Rysunek 5.25 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

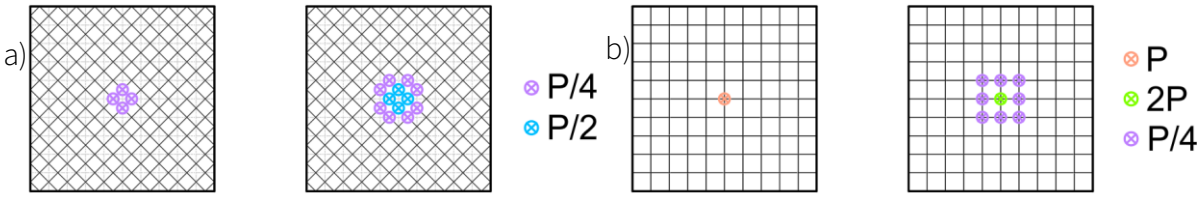
Struktury dwuwarstwowe zbudowane z modułów *Simplex* czterozastrzałowy uzyskują spadki przemieszczeń zbliżone do układów jednowarstwowych pod względem procentowym. W przypadku $r_k = 5$ wartości przemieszczeń wynoszą kolejno 60,77% (schemat 1), 46,15% (schemat 2) oraz 37,96% (schemat 3) początkowych przemieszczeń. Schematy 4 i 5 pozwalają zaś na uzyskanie wartości 52,54% oraz 47,01% wartości początkowych. Wzmocnienie do $r_k = 10$ pozwala natomiast na uzyskanie wartości 49,61% (schemat 1), 34,23% (schemat 2) oraz 26,36% (schemat 3) wartości początkowych, w przypadku schematu 4 są to wartości 38,61% początkowych przemieszczeń, a schematu 5 – 32,16%. Uzyskane wyniki są wynikami spodziewanymi – usztywnienie struktury na etapie jej budowy zazwyczaj pozwala na uzyskanie znacznie mniejszych przemieszczeń.



Rysunek 5.26 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

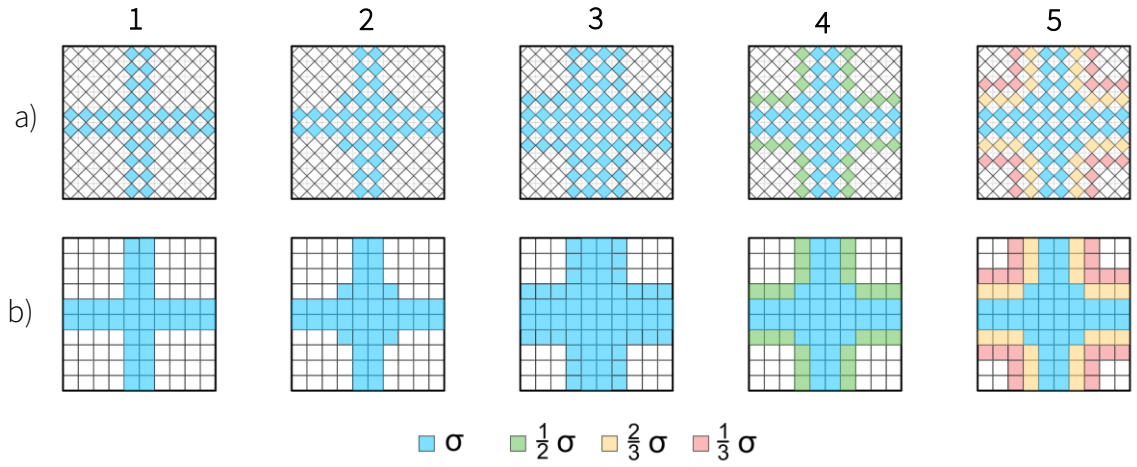
Podparcie boków

Analogicznie jak w przypadku podparcia naroży, w przypadku podparcia boków struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy rozpatrywano 2 przypadki obciążenia (siła pojedyncza oraz zestaw wielu sił). Przypadki również były rozpatrywane dla płyty jednowarstwowej oraz dwuwarstwowej (Rys. 5.27).



Rysunek 5.27 Schemat statyczny: podpory (ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami), b) dwóch warstw warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.

Rozpatrywano przypadki wzmocnień schematami 1-3 dla przypadku obciążenia pojedynczą siłą, zaś schematami 1-5 przy obciążeniu wieloma siłami. Analogicznie jak przy podparciu naroży skupiono się na konstrukcji jedno- oraz dwuwarstwowej, rozpatrując przypadki równomiernego wzmocnienia jak i wzmocnienia stopniowanego (Rys. 5.28).



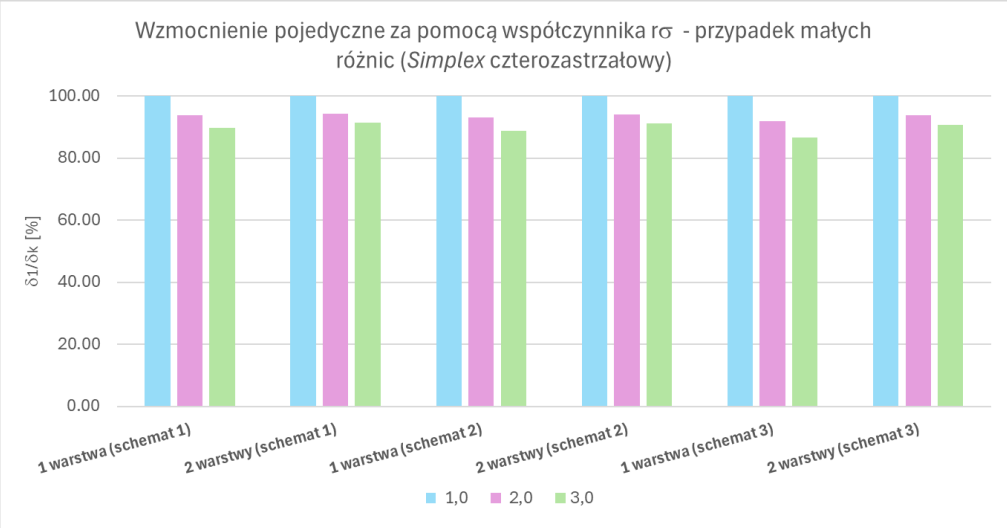
Rysunek 5.28 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej.

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Podparcie całych boków konstrukcji (czyli wszystkich węzłów na bokach struktur) pozwala w znacznym stopniu zmniejszyć wartości przemieszczeń. W przypadku układu jednowarstwowego złożonego z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (z wartości 47,71 $\frac{Pa}{EA}$ do 11,46 $\frac{Pa}{EA}$) pozwala to nawet na 11-krotny spadek wartości w odniesieniu do struktury podpartej w narożach (przypadek pojedynczej siły). W przypadku konstrukcji dwuwarstwowej ten spadek jest 3-krotny z wartości 9,54 $\frac{Pa}{EA}$ na wartość 3,44 $\frac{Pa}{EA}$. Początkowe wartości przemieszczeń struktury dwuwarstwowej złożonej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (w przypadku pojedynczej siły) pozwalają uzyskać przemieszczenia 3-krotnie mniejsze niż w przypadku konstrukcji jednowarstwowej z tych samych modułów, 20-krotnie mniejsze niż w przypadku struktury jednowarstwowej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) (68,62 $\frac{Pa}{EA}$) i 2,5-krotnie mniejsze niż w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej zbudowanej z tych modułów (8,71 $\frac{Pa}{EA}$) (Tab. 2.7., Zał. 1.). Zwiększenie obciążenia w przypadku podparcia boków nadal pozwala na uzyskanie znacznie mniejszych przemieszczeń niż w przypadku podparcia naroży – w przypadku struktury jednowarstwowej złożonej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy obserwujemy zmniejszenie wartości przemieszczeń 4-krotnie (do 42,41 $\frac{Pa}{EA}$), dwuwarstwowej – 3-krotnie (do 10,79 $\frac{Pa}{EA}$). Przy podparciu boków konstrukcji, w stosunku do dwuwarstwowej struktury z modułów *Simplex* czterozastrzałowy otrzymujemy przemieszczenia 4-krotnie mniejsze (jednowarstwowa konstrukcja z modułów *Simplex* czterozastrzałowy), 22-krotnie mniejsze (jednowarstwowa struktura z modułów rozszerzony

ośmiościan (*octahedron*) – 247,44 $\frac{Pa}{EA}$) oraz 3-krotnie mniejsze (dwuwarstwowa konstrukcja z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) – 29,15 $\frac{Pa}{EA}$) (Tab. 2.10, Zał. 1.).

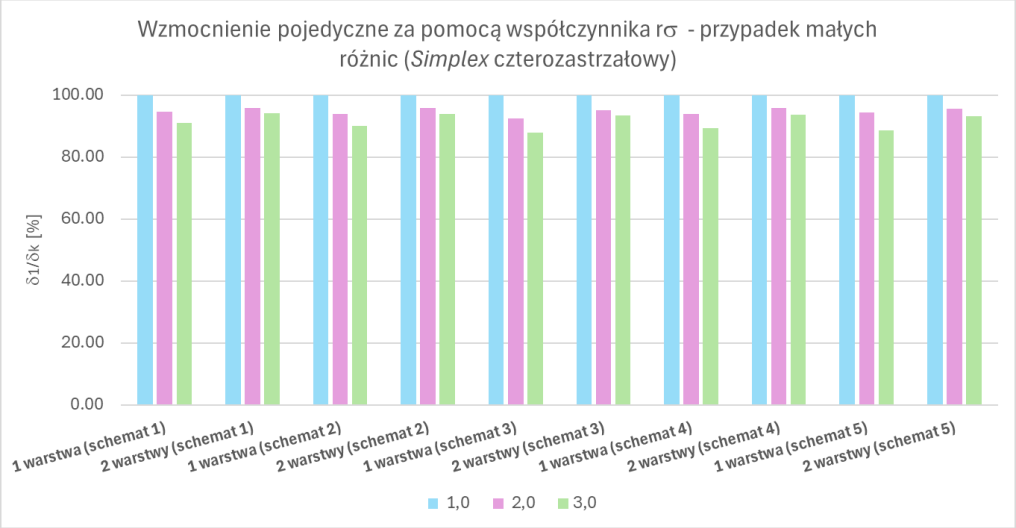
Wzmocnienie przy współczynniku $r_\sigma = 2$ pozwala na uzyskanie wartości przemieszczeń o około 6% mniejszych w przypadku schematu 1, struktura jednowarstwowa, pojedyncze obciążenie. Dla schematu 2 wartość przemieszczeń nieznacznie spada w porównaniu do schematu 1, zaś w przypadku schematu 3 spadek przemieszczeń wynosi około 8%. Zwiększenie współczynnika r_σ do wartości 3 sprawia, że wartości przemieszczeń są o około 10% (schemat 1), 11% (schemat 2) i 13% (schemat 3) mniejsze od wartości początkowych. Konstrukcje dwuwarstwowe uzyskują zbliżone spadki: schemat 1 pozwala na zmniejszenie wartości przemieszczeń o około 5% ($r_\sigma = 2$) i 8% ($r_\sigma = 3$), w przypadku schematu 2 te wartości są zbliżone, zaś schemat 3 pozwala uzyskać wartości kolejno 6% i 9% mniejsze od wartości początkowych przemieszczeń (Rys. 5.29).



Rysunek 5.29 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Zwiększenie obciążenia przy podparciu boków struktury nieznacznie zwiększa wartości przemieszczeń, nadal pozwalając na wykorzystanie obszarów wzmocnień do zmniejszenia ich wartości. W przypadku jednowarstwowej konstrukcji spadki przemieszczeń są bardzo zbliżone do przypadku pojedynczej struktury – przy współczynniku $r_\sigma = 2$ otrzymujemy kolejno 94,66% (schemat 1), 94,05% (schemat 2) oraz 92,61% (schemat 3) początkowych przemieszczeń (Rys. 5.30). Schemat 4 i 5 pozwala na spadki do 94,05% i 94,40% początkowych

wartości. Zwiększenie współczynnika r_σ do wartości 3 pozwala na uzyskanie jeszcze mniejszych przemieszczeń: 91,16% (schemat 1), 90,07% (schemat 2) oraz 87,87% (schemat 3) początkowych przemieszczeń. Ponownie powyższe schematy można zastąpić schematem 4 lub 5, który pozwala na uzyskanie 89,32% i 88,72% początkowych przemieszczeń. Konstrukcja dwuwarstwowa, mimo oryginalnie mniejszych wartości przemieszczeń, również pozwala na podobne procentowe spadki wartości. Współczynnik $r_\sigma = 2$ pozwala na spadki o około 4% dla wszystkich pięciu schematów, zaś $r_\sigma = 3$ zwiększa tę wartość do około 6%.



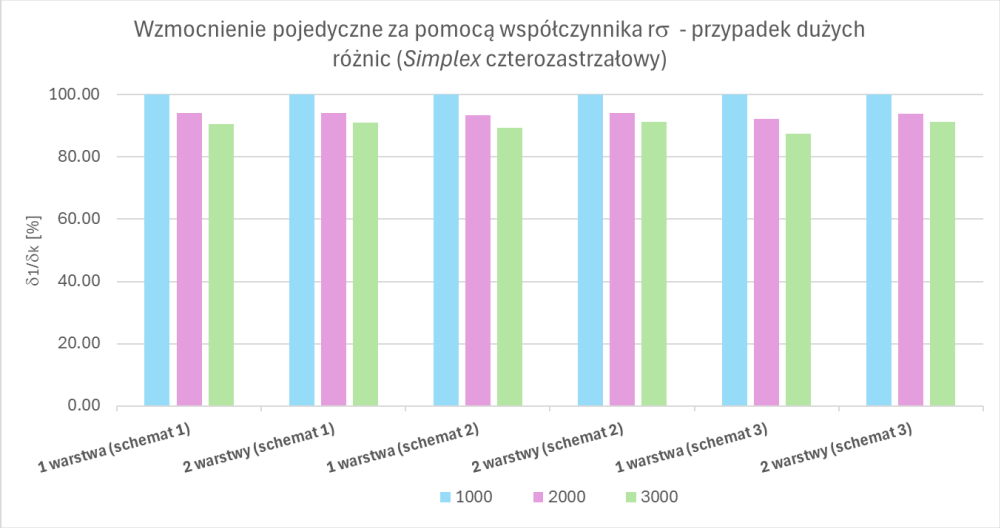
Rysunek 5.30 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

Podparcie boków konstrukcji pozwala na swobodne korzystanie ze wzmacniania struktury w postaci modelowania obszarów materiału i pustki. Przy porównaniu z podparciem naroży można zauważyć znaczne spadki, szczególnie zauważalne w przypadku konstrukcji z modułów z rozszerzonego ośmiościanu. Spadek wartości przemieszczeń struktury dwuwarstwowej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (która zawsze uzyskuje najmniejsze wartości przemieszczeń) jest około 3-krotny (analogicznie do przypadku małych różnic wartości sprężenia). Oznacza to, że konstrukcje oparte w pełni na bokach są znacznie sztywniejsze. W przypadku obciążenia pojedynczą siłą ilorazy wartości przemieszczeń (w porównaniu do struktury dwuwarstwowej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy – 3,56 $\frac{Pa}{EA}$) są większe: 3,5-krotnie (konstrukcja jednowarstwowa z modułów *Simplex* czterozastrzałowy – 12,61 $\frac{Pa}{EA}$), 21-

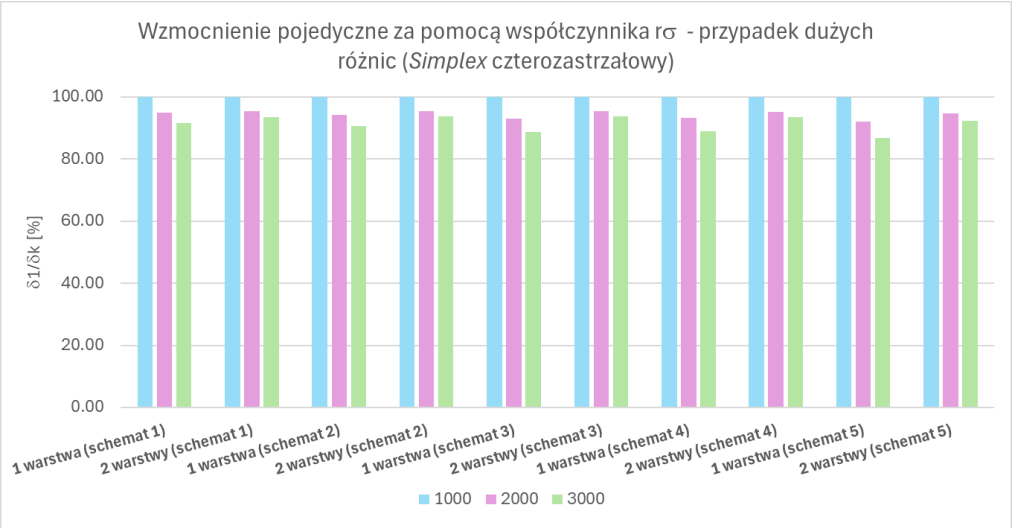
krotnie (struktura jednowarstwowa z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) – 74,82 $\frac{Pa}{EA}$) oraz 2,5-krotnie (konstrukcja dwuwarstwowa z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) – 9,10 $\frac{Pa}{EA}$). W przypadku zwiększenia obciążenia te wartości są kolejno: 4-krotnie (46,87 $\frac{Pa}{EA}$), 24-krotnie (274,75 $\frac{Pa}{EA}$) oraz 3-krotnie (30,65 $\frac{Pa}{EA}$) większe od przemieszczeń struktury dwuwarstwowej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (11,27 $\frac{Pa}{EA}$). Należy zauważyć, że w przypadku tego typu wzmocnienia dla każdego przypadku punktem odniesienia są wyniki dla wartości współczynnika $r_\sigma = 1000$ – różne dla każdego przypadku (Tab. 2.11., Zał. 1.).

W przypadku konstrukcji jednowarstwowej wzmocnienie zwiększone do $r_\sigma = 2000$ powodowało spadek przemieszczeń o około 6% w przypadku schematu 1 i 2 oraz około 7% w przypadku schematu 3 (Rys. 5.31). Zwiększenie wzmocnienia do $r_\sigma = 3000$ zwiększało spadki do 9% (schemat 1), 10% (schemat 2) oraz 12% (Schemat 3). Zauważalne jest tutaj, że im większy jest współczynnik r_σ, tym większe staje się znaczenie wzmocnienia strefowego i pojawiają się większe różnice pomiędzy schematami. Dwuwarstwowa struktura zbudowana z modułów *Simplex* czterozastrzałowy jest bardziej zbliżona pomiędzy schematami ze względu na znaczną początkową sztywność – wartości przemieszczeń zmniejszają się o około 6% we wszystkich trzech schematach dla przypadku $r_\sigma = 2000$, zaś w przypadku $r_\sigma = 3000$ o około 8%.



Rysunek 5.31 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Zwiększenie obciążenia pozwala na większe zróżnicowanie pomiędzy schematami w przypadku struktury jednowarstwowej. W przypadku $r_\sigma = 2000$ schemat 1 uzyskuje 94,87% początkowych przemieszczeń, a w przypadku $r_\sigma = 3000$: 91,67% (Rys. 5.32). Schemat 2 w tych przypadkach uzyskuje kolejno 94,23% i 90,52% wartości początkowych przemieszczeń, zaś schemat 3 – 92,97% i 88,61%. Schemat 4 i 5 uzyskują bardzo zbliżone wyniki: 92,97% wartości początkowych przemieszczeń (schemat 4, $r_\sigma = 2000$) i 88,89% wartości początkowych przemieszczeń (schemat 4, $r_\sigma = 3000$) oraz 92,06% wartości początkowych przemieszczeń (schemat 5, $r_\sigma = 2000$) i 86,72% wartości początkowych przemieszczeń (schemat 5, $r_\sigma = 3000$). Wprowadzenie schematów do dwuwarstwowej konstrukcji pozwala uzyskać spadki przemieszczeń o około 4% ($r_\sigma = 2000$, schematy 1-4) oraz około 6% ($r_\sigma = 3000$, schematy 1-4). Schemat 5 za to pozwala na niewiele większe spadki – 5% ($r_\sigma = 2000$) oraz 7% ($r_\sigma = 3000$).

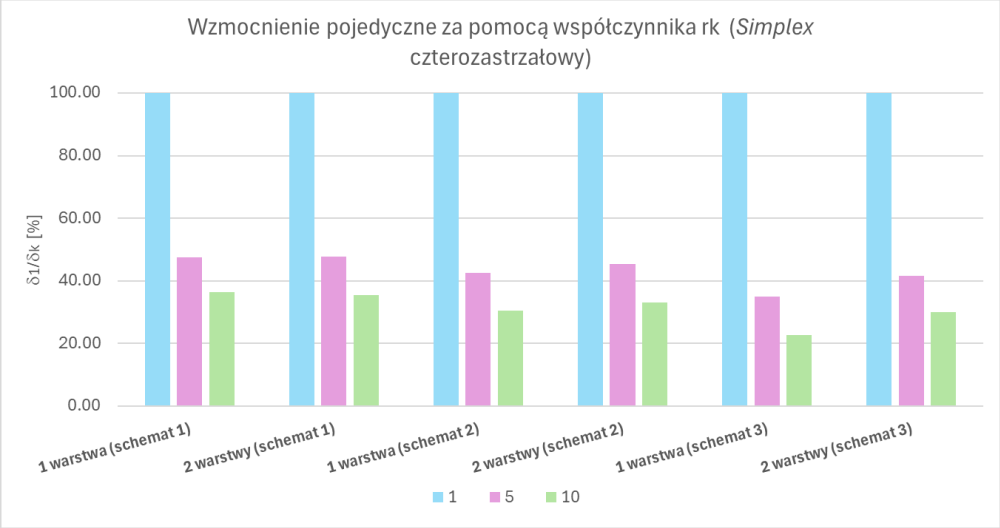


Rysunek 5.32 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Przypadek 3. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

Wzmacnianie za pomocą zmiany geometrii konstrukcji (przed wbudowaniem) ponownie pozwala na uzyskanie największych spadków wartości przemieszczeń – jest to zawsze co najmniej 50% w przypadku współczynnika $r_k = 5$. W przypadku jednowarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy przy zmianie geometrii zgodnie z wcześniej wymienionym współczynnikiem otrzymano zmniejszenie przemieszczeń do 47,41% (schemat 1), 42,56% (schemat 2) oraz 34,98% (schemat 3) początkowych przemieszczeń

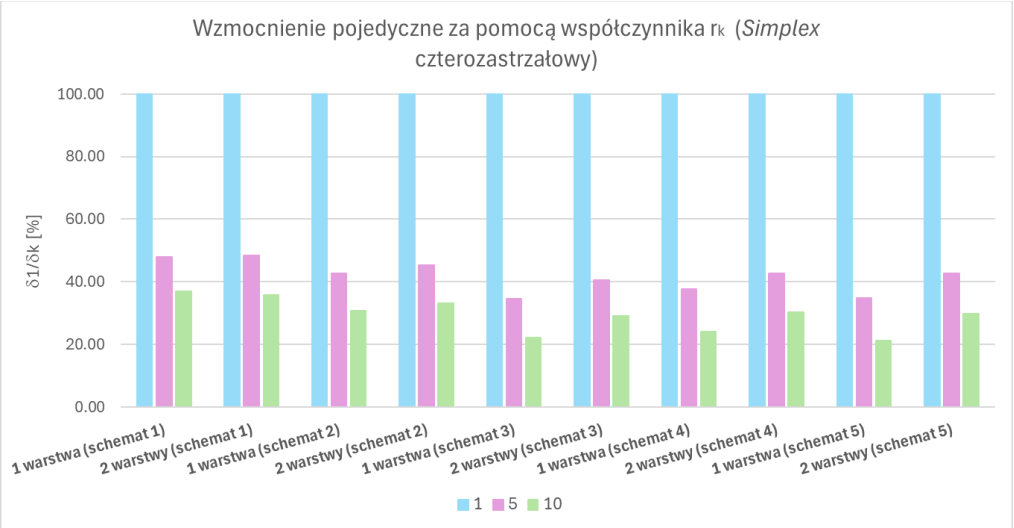
(Rys. 5.33). Pod wpływem pogrubienia zastrzałów otrzymaliśmy zmniejszenie do 36,41% (schemat 1), 30,59% (schemat 2) oraz 22,69% (schemat 3) początkowych przemieszczeń. Schemat 2 i 3 tym samym osiągał wyniki przemieszczeń zbliżone do równomiernie wzmocnionej struktury dwuwarstwowej. W przypadku dwuwarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy otrzymujemy spadki dla $r_k = 5$ równe 47,85% (schemat 1), 45,34% (Schemat 2) oraz 41,53% (schemat 3) – wartości te są bardzo do siebie zbliżone. W przypadku $r_k = 10$ wartości te odpowiednio wynoszą 35,41%, 33,18% oraz 29,89%. Przy zmniejszonym obciążeniu i sztywnej konstrukcji różnice stają się niewielkie pomiędzy poszczególnymi schematami.



Rysunek 5.33 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

Pod wpływem zwiększenia obciążenia ciągle jesteśmy w stanie uzyskać zbliżone spadki obciążeń. Wszystkie schematy uzyskują zbliżone wyniki, ze szczególnie wysokim spadkiem w przypadku schematów 3-5 (Rys. 5.34). W przypadku struktury jednowarstwowej, dla współczynnika $r_k = 5$,schemat 1 pozwala na spadki o około 52%, schemat 2 – o 58%, zaś schemat 3-5 odpowiednio 66%, 62% i 66% oryginalnej wartości. Wraz ze wzrostem współczynnika r_k do 10 spadki te wzrastają i schemat 1 pozwala uzyskać wartości o 63% mniejsze, schemat 2 – 70% mniejsze, 3 – 87%, a 4 i 5 odpowiednio 76% i 78%. Uzyskane w ten sposób wyniki są bliskie wartościom przemieszczeń równomiernie sprężonej dwuwarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy. W przypadku struktury dwuwarstwowej spadki wartości przemieszczeń również są do siebie zbliżone – dla $r_k = 5$

i przypadku schematu 1 uzyskujemy zmniejszenie wartości przemieszczeń o około 51%, w przypadku schematu 2 jest to zmniejszenie o około 54%, schematu 3 – 60%, zaś 4 i 5 około 57% względem początkowych przemieszczeń. Zwiększenie sztywności konstrukcji ($r_k = 10$) pozwala zmniejszyć przemieszczenia jeszcze bardziej – schemat 1 wtedy uzyskuje wartości o 64% mniejsze, schemat 2 – 66%, schematy 3, 4 i 5 – aż 70%.

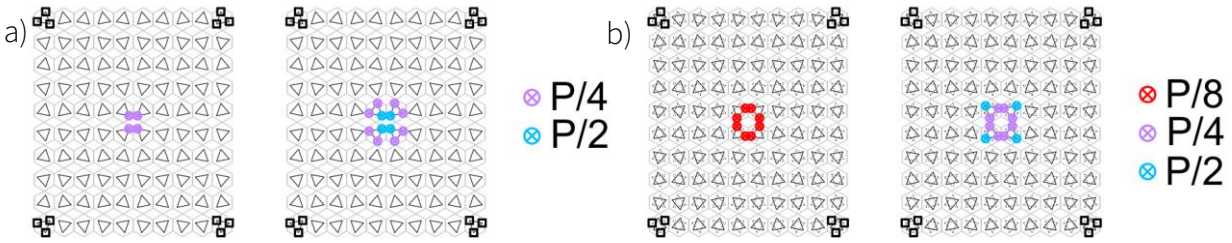


Rysunek 5.34 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy).

5.3.2. Struktury zbudowane z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*)

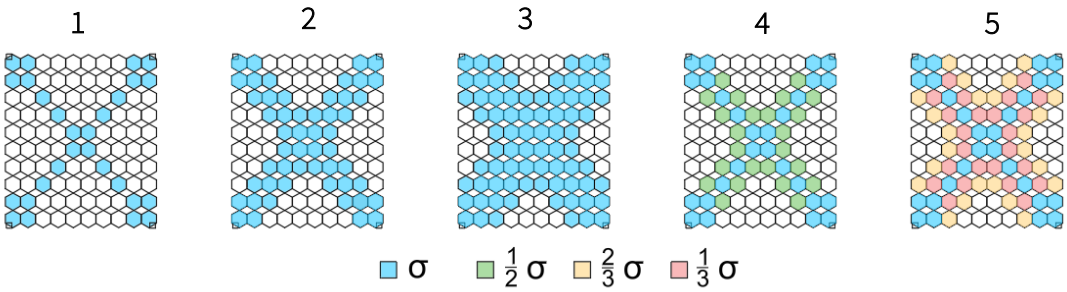
Podparcie naroży

W celu porównania wyników stworzono również płytę modularną zbudowaną z rozszerzonych ośmiościanów, którą przeanalizowano w warunkach analogicznych do płyt przedstawionych w Rozdziale 5.3.1. Ponownie rozpatrywano 2 przypadki obciążenia: siła pojedyncza skupiona w środku rozpiętości płyty oraz zestaw wielu sił skupionych na środku rozpiętości płyty (Rys. 5.35).



Rysunek 5.35 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.

Również wzmocnienie zostało wykonane w analogiczny sposób - dla obciążenia pojedynczą siłą w środku rozpiętości rozpatrywano przypadek konstrukcji równomiernie wzmocnionej oraz wzmocnień jak pokazano na schematach 1-3. Obciążenie wieloma siłami było analizowane dla przypadku wzmocnienia równomiernego oraz wzmocnień jak na schematach 1-5, rozpatrując stopniowanie wzmocnienia (Rys. 5.36).



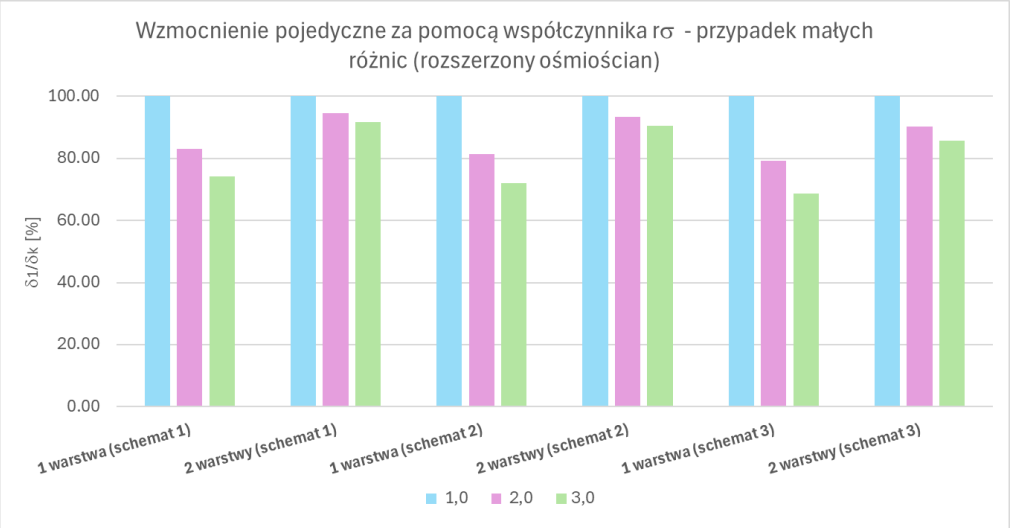
Rysunek 5.36 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty jednowarstwowej.

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

Struktura składająca się z rozszerzonych ośmiościanów uzyskuje znacznie większe wartości ugięć niż w przypadku konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, szczególnie w przypadku podparcia naroży. Istotny jest fakt, że wykorzystanie dwóch warstw pomaga w zmniejszeniu wartości ugięć – w przypadku obciążenia pojedynczą siłą zmiana struktury jednowarstwowej na dwuwarstwową pozwala na spadek obciążeń o około 27 razy (z wartości $798{,}96\frac{Pa}{EA}$ na wartość $29{,}07\frac{Pa}{EA}$). Warto zauważyć, że procentowe spadki w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej są zbliżone do przypadku struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, ponadto dwuwarstwowa konstrukcja zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) pozwala uzyskać wartości niższe niż

w przypadku jednowarstwowej struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy (Tab. 2.1. i 2.4., Zał. 1.).

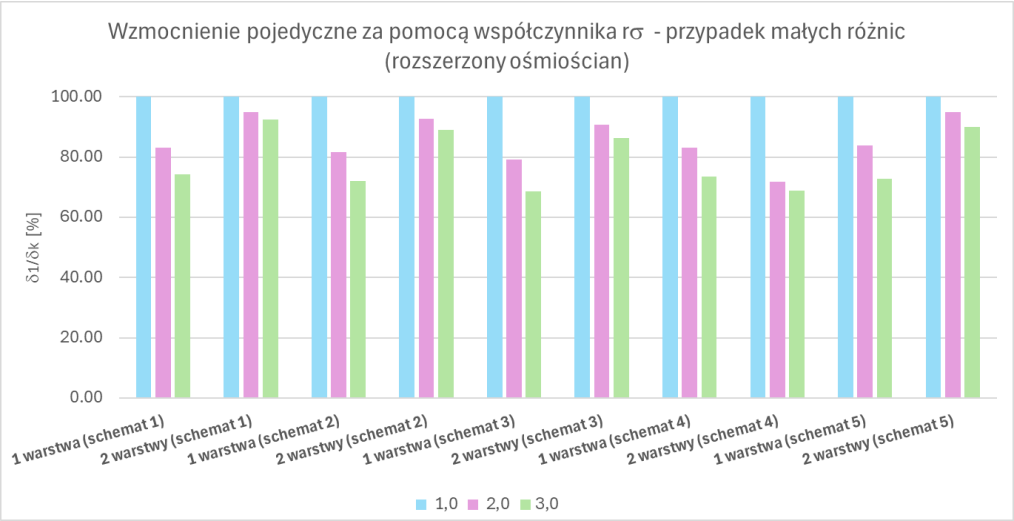
W przypadku wzmocnienia płyty składającej się z jednej warstwy modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) możemy uzyskać spadki przemieszczeń, w przypadku schematu 1, od około 17% ($r_\sigma = 2{,}0$) do nawet 26% ($r_\sigma = 3{,}0$) (Rys. 5.37). Stosowanie schematu 2 w takim przypadku pozwala na spadki odpowiednio o około 18% i 28%, zaś schematu 3 – około 21% i 31%. Wprowadzenie dwuwarstwowej struktury pozwala na uzyskanie mniejszych procentowych spadków, które wynika z faktu, że same w sobie przemieszczenia uzyskują znacznie mniejsze wartości. W przypadku dwóch warstw otrzymujemy spadki o 5% ($r_\sigma = 2{,}0$) oraz 8% ($r_\sigma = 3{,}0$) dla schematu 1, zaś dla schematu 2 odpowiednio 6% i 9%. Schemat 3 zwiększa te wartości do 9% i 14% (Rys. 5.37).



Rysunek 5.37 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

W przypadku zwiększenia wartości oraz zmiany rozkładu sił w strukturze podpartej w narożach uzyskujemy wzrost wartości przemieszeń, który jest znaczny w przypadku konstrukcji jednowarstwowej (która właściwie w tym przypadku nie nadaje się do praktycznego wykorzystania). W przypadku struktury dwuwarstwowej wartości przemieszczeń są ponownie mniejsze (110,27 $\frac{Pa}{EA}$) od wartości przemieszczeń jednowarstwowej konstrukcji modularnej *Simplex* czterozastrzałowy (186,06 $\frac{Pa}{EA}$) (Tab. 2.4., Zał. 1.).

Zastosowanie schematu 1 w strukturze jednowarstwowej pozwala na znaczne spadki wartości przemieszczeń, dochodzące do wartości 74,35% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 3{,}0$). Analogicznie schemat 2, 4 oraz 5 ($r_\sigma = 3{,}0$) pozwalają na uzyskanie zbliżonych wartości około 72% początkowych wartości, zaś schemat 3 – 68% początkowych wartości przemieszczeń (Rys. 5.38). Ciągle jednak uzyskane wartości są zbyt duże do praktycznego zastosowania. W przypadku konstrukcji dwuwarstwowej uzyskujemy już bardziej sensowne wyniki. Ze względu na mniejsze początkowe wartości przemieszczeń uzyskujemy również mniejsze procentowe spadki wartości przemieszczeń, również w różny sposób działają poszczególne schematy. W przypadku dwuwarstwowym schemat 1 pozwala uzyskać około 92% wartości przemieszczeń struktury równomiernie sprężonej ($r_\sigma = 3{,}0$). Schemat 2 kolejno pozwala uzyskać spadek do około 89% wartości przemieszczeń początkowych konstrukcji, schemat 3 – 95%. W tym przypadku to schemat 4 pozwala w znacznie większym stopniu zmniejszyć przemieszenia – do około 69% początkowej wartości. Schemat 5 zaś pozwala osiągnąć około 90% wartości początkowych przemieszczeń (Rys. 5.38). Warto zauważyć, że wybrane schematy mogą być zastosowane przy różnych przypadkach obciążeń i w każdym z nich pozwalają na spadki wartości przemieszczeń o zbliżonych procentowych wartościach.



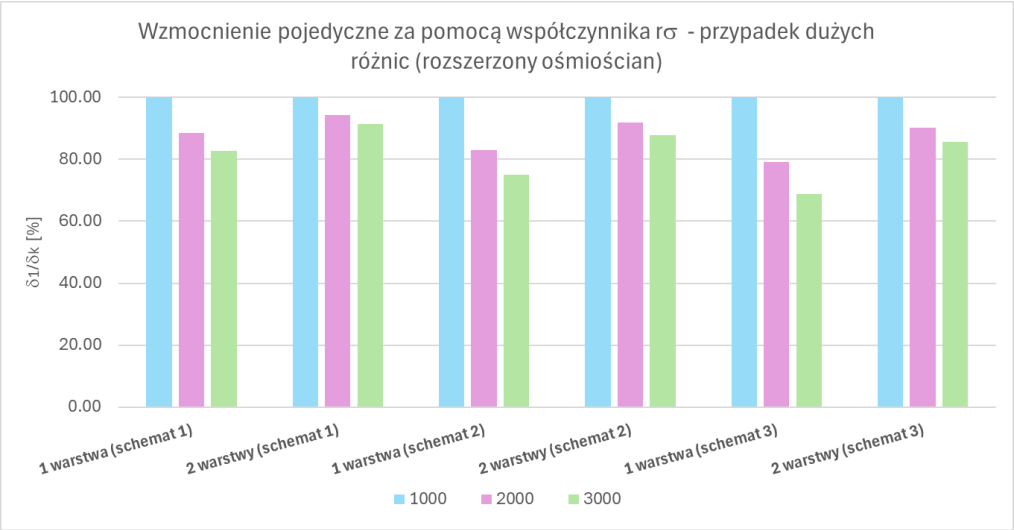
Rysunek 5.38 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

Wprowadzenie modelowania obszarów materiału i pustki w przypadku struktury jednowarstwowej wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*) jest bardzo

wymagające – już na początku konstrukcja uzyskuje bardzo duże wartości przemieszeń (wartości rzędu $\mathbf{1500}\frac{Pa}{EA}$). W przypadku struktury dwuwarstwowej zaś różnice te nie są aż tak znaczne i ugięcia początkowe są zbliżone do przypadku niewielkiego wzmocnienia, na przykład $\mathbf{29}\frac{Pa}{EA}$ w przypadku $r_\sigma = \mathbf{1{,}0}$ oraz $\mathbf{34{,}86}\frac{Pa}{EA}$ w przypadku $r_\sigma = \mathbf{1000{,}0}$ dla schematu 1 przy analogicznym obciążeniu (Tab. 2.2., Zał. 1.).

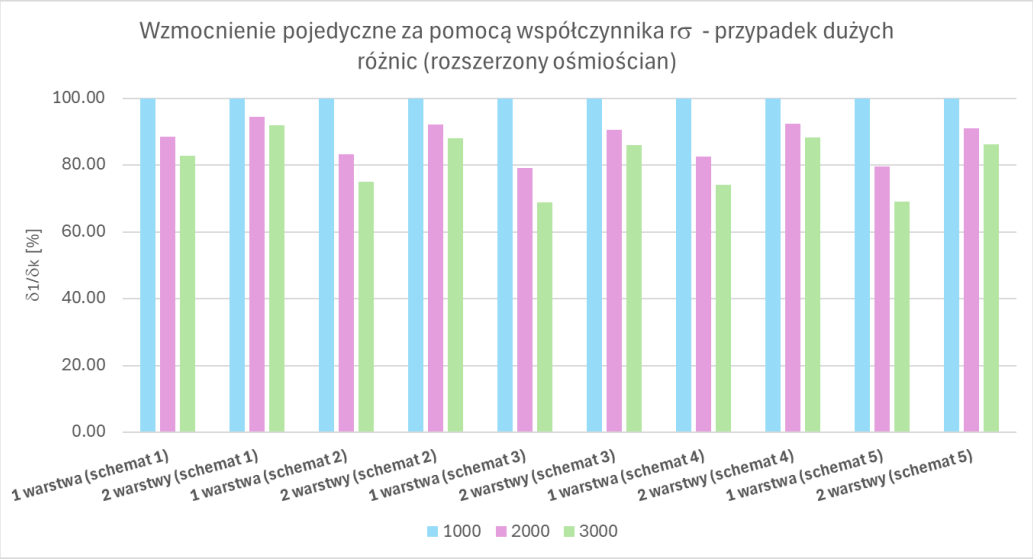
W przypadku obciążenia pojedynczą siłą jednowarstwowej struktury, wzmocnionej ze współczynnikiem $r_\sigma = \mathbf{2000}$, uzyskujemy spadki wartości przemieszczeń o około 11% (schemat 1), 17% (schemat 2) oraz 21% (schemat 3). Zwiększenie współczynnika $r_\sigma = \mathbf{3000}$ pozwala zwiększyć te spadki do około 17% (schemat 1), 25% (schemat 2) oraz 31% (schemat 3). Zastosowanie konstrukcji dwuwarstwowej znacznie zmniejsza wartości przemieszczeń, ale również zastosowanie poszczególnych schematów pozwala uzyskać kolejne spadki wartości. W przypadku schematu 1 spadki te są równe od około 5% ($r_\sigma = \mathbf{2000}$) do 8% ($r_\sigma = \mathbf{3000}$), schematu 2 – od około 8% ($r_\sigma = \mathbf{2000}$) do 12% ($r_\sigma = \mathbf{3000}$), a schematu 3 – od około 9% ($r_\sigma = \mathbf{2000}$) do 14% ($r_\sigma = \mathbf{3000}$) (Rys. 5.39). Ponownie, jak w przypadku wcześniejszych przykładów, można wykorzystywać zamiennie poszczególne schematy z różnymi wartościami współczynnika r_σ i uzyskać podobne efekty w zależności od wymagań.



Rysunek 5.39 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

W przypadku zwiększenia wartości siły w przypadku struktury jedno-, jak i dwuwarstwowej dochodzi do wzrostu wartości przemieszczeń, mimo to jednak pojawiają się znaczne spadki

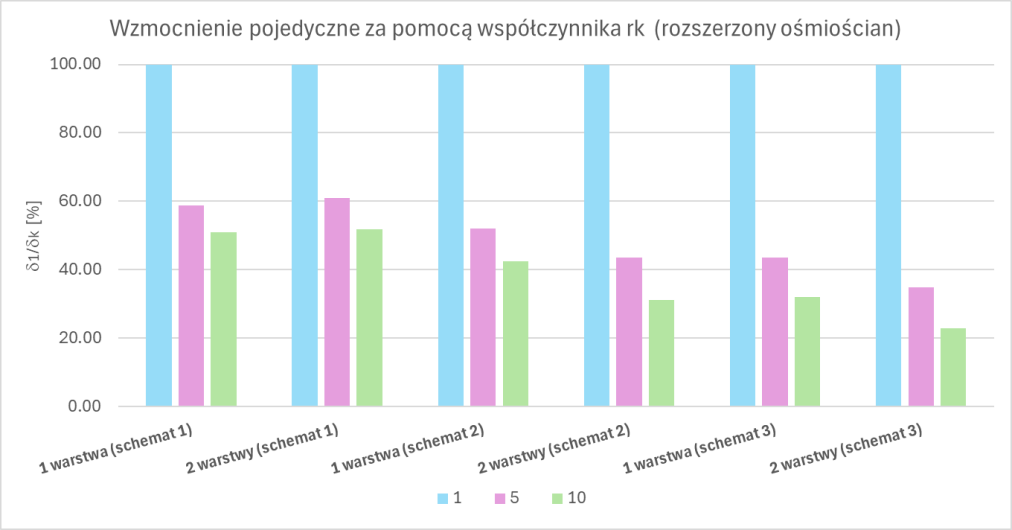
wartości przemieszczeń po zastosowaniu odpowiednich schematów wzmocnienia. W przypadku konstrukcji jednowarstwowej dla schematu 1 uzyskujemy spadki wartości przemieszczeń do wartości od 88,47% ($r_\sigma = 2000$) do 82,82% ($r_\sigma = 3000$) początkowej wartości przemieszczeń (za którą uznajemy wzmocnienie $r_\sigma = 1000$). Schemat 2 pozwala na zmniejszenie wartości przemieszczeń od 83,12% ($r_\sigma = 2000$) do 75,07% ($r_\sigma = 3000$) początkowych wartości przemieszczeń, schemat 3 zaś 79,11% ($r_\sigma = 2000$) do 68,83% ($r_\sigma = 3000$). Zastosowanie schematów warstwowych pozwala na uzyskanie podobnych wartości: schemat 4 prowadzi do spadków wartości od 82,60% ($r_\sigma = 2000$) do 74,08% ($r_\sigma = 3000$) początkowych wartości, zaś schemat 5: od 79,46% ($r_\sigma = 2000$) do 68,94% ($r_\sigma = 3000$) (Rys. 5.40). Zmiana struktury na dwuwarstwową prowadzi do zmniejszenia wartości przemieszeń, a tym samym mniejszych procentowo spadków przemieszczeń: schemat 1 pozwala na spadki od 94,51% ($r_\sigma = 2000$) do 91,87% ($r_\sigma = 3000$) początkowych przemieszczeń, schemat 2 odpowiednio od 92,03% do 88,09%, zaś schemat 3 – od 90,48% do 85,94%. Tutaj również można zastosować schematy ze zmiennym wzmocnieniem, które pozwalają na spadki od około 90% ($r_\sigma = 2000$) do 86% ($r_\sigma = 3000$). (Rys. 5.40). Ponownie, można wykorzystywać zamiennie różne schematy, co pozwala na jeszcze większe dostosowanie konstrukcji do pracy w warunkach adaptacji.



Rysunek 5.40 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

Przypadek 3. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

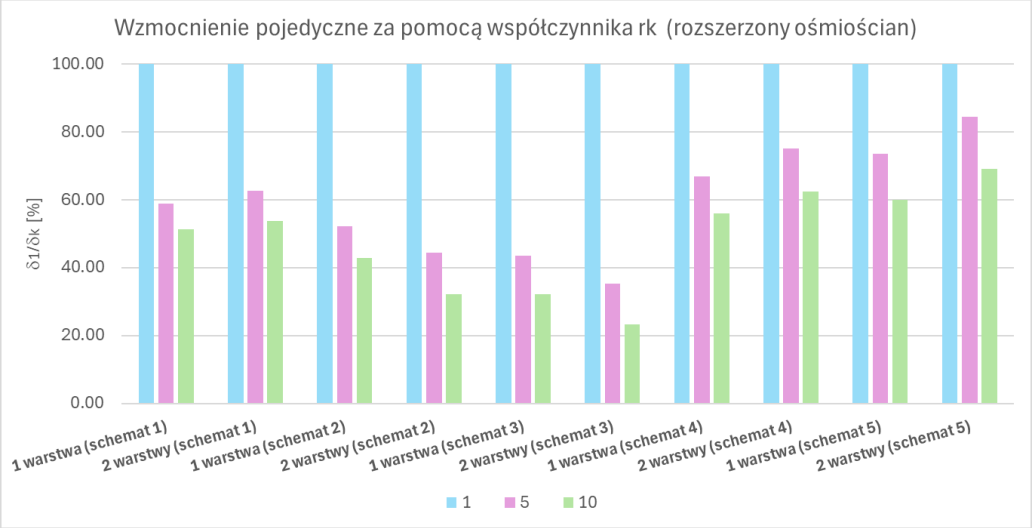
Tak jak w przypadku struktur składających się z modułów *Simplex* czterozastrzałowy, zmiana przekrojów cięgien pozwala na uzyskanie największych spadków przemieszczeń (tym samym największej sztywności konstrukcji). Jednowarstwowe płyty modułowe, pod wpływem pojedynczej siły, mogą uzyskać o około 41% mniejsze przemieszczenia ($r_k = 5$, schemat 1), a nawet o 49% w przypadku zmiany współczynnika na $r_k = 10$. W przypadku zmiany na schemat 2 spadki te są bliskie od 48% ($r_k = 5$) do 57% ($r_k = 10$), zaś schematu 3 – od około 56% ($r_k = 5$) do nawet 67% ($r_k = 10$) (Rys. 5.41). Przy zmianie na strukturę dwuwarstwową spadki są zbliżone procentowym wartościom – schemat 1 pozwala na spadki od około 39% ($r_k = 5$) do 48% ($r_k = 10$), schemat 2: od 56% do 68%, zaś schemat 3 od 65% do nawet 77% (Rys. 5.41).



Rysunek 5.41 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

W przypadku zwiększenia wartości siły, wartości przemieszczeń rosną, mimo to jednak możliwa jest znaczna redukcja przemieszczeń przy zmianie geometrii struktury. Konstrukcja jednowarstwowa przy użyciu schematu 1 pozwala na spadki przemieszczeń do wartości 59,01% początkowych przemieszczeń dla współczynnika $r_k = 5$, zaś przy współczynniku $r_k = 10$ jest to wartość 51,25%. Schemat 2 pozwala na spadki wartości do 52,19% oryginalnych przemieszczeń dla $r_k = 5$ oraz 42,80% dla $r_k = 10$, zaś schemat 3 pozwala na wartości odpowiednio 43,67% i 32,11%. Zastosowanie zmiennej sztywności w konstrukcji pozwala na uzyskanie od 66,93% do 55,93% (schemat 4) oraz od 73,56% do 60,05% (schemat 5). Zmiana

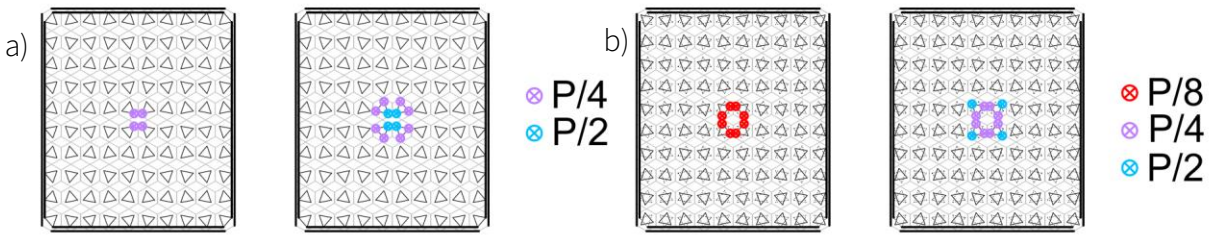
na schemat o zmiennej sztywności powoduje skok wartości przemieszczeń w odniesieniu do przypadku stałego wzmocnienia. Zmiana na dwuwarstwową strukturę pozwala uzyskać procentowo podobne wartości. Schemat 1 pozwala na uzyskanie spadków od 62,70% ($r_k = 5$) do 53,72% początkowej wartości przemieszczeń ($r_k = 10$), schemat 2 – odpowiednio od 44,54% do 32,11%, a schemat 3 – od 32,25% do 23,34%. Ponownie, zauważalny jest skok przy układach o zmiennej sztywności: schemat 4 pozwala na spadek od 75,12% ($r_k = 5$) do 62,45% ($r_k = 10$), zaś schemat 5 - od 84,47% ($r_k = 5$) do 69,23% ($r_k = 10$) (Rys. 5.42).



Rysunek 5.42 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

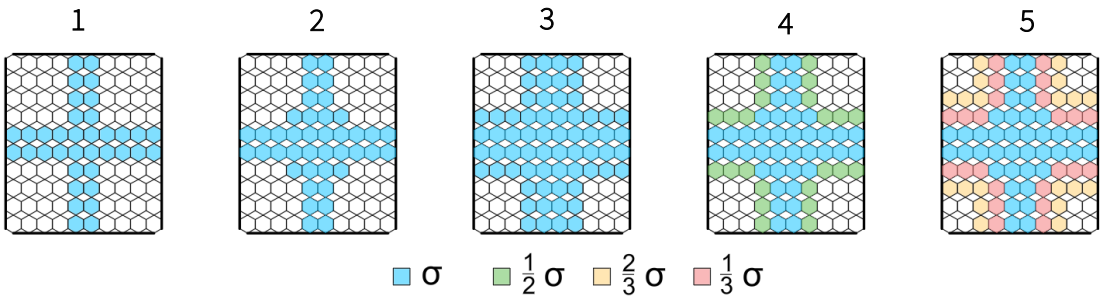
Podparcie boków

Ostatnie analizy przedstawione w niniejszym rozdziale również są analogiczne do przypadku płyty wykonanej z *Simplexów* czterozastrzałowych - rozpatrywano dwa przypadki obciążenia: siła pojedyncza skupiona w środku rozpiętości płyty oraz zestaw wielu sił skupionych na środku rozpiętości płyty (Rys. 5.43).



Rysunek 5.43 Schemat statyczny: podpory (ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne.

Analogicznie wykonano również wzmocnienie w płycie zbudowanej z rozszerzonych ośmiościanów, rozpatrując wzmocnienia o równomiernej wartości oraz wartości stopniowanej (Rys. 5.44).

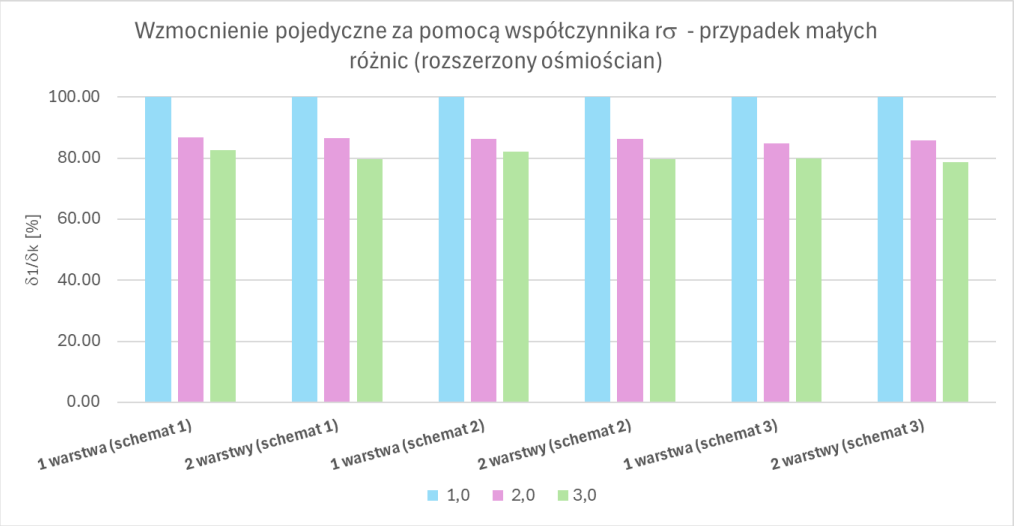


Rysunek 5.44 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty: jednowarstwowej.

Przypadek 1. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - niskie wartości

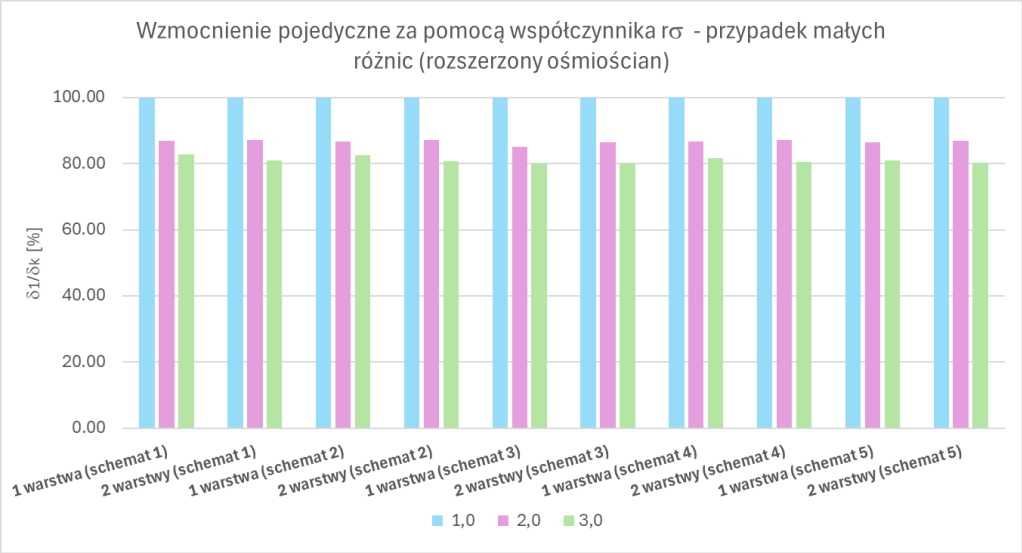
W przypadku podparcia boków zarówno jednowarstwowe, jak i dwuwarstwowe struktury wykonane z modułów rozszerzonego ośmiościanu pozwalają na uzyskanie sensownych wartości przemieszczeń. W przypadku konstrukcji dwuwarstwowej ($\mathbf{8{,}71}\frac{Pa}{EA}$) jej wartości są zbliżone do wartości ugięć jednowarstwowej płyty zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy ($\mathbf{11{,}46}\frac{Pa}{EA}$) w przypadku pojedynczego obciążenia. Jednowarstwowa struktura uzyskuje najwyższe wartości z wszystkich czterech przypadków (Tab. 2.7., Zał. 1.).

Konstrukcja jednowarstwowa podparta po bokach, z niewielkim wzmocnieniem za pomocą sprężenia pozwala na spadki wartością procentową zbliżone do struktury zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy. W przypadku schematu 1 przemieszczenia uzyskują 86,67% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 82,58% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$) wartości przemieszczeń konstrukcji równomiernie sprężonej (Rys. 5.45). Schemat 2 pozwala na zmniejszenie tych wartości do 86,33% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 82,09% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$), zaś schemat 3 – 84,87% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 79,92% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$). W przypadku struktury dwuwarstwowej również można zauważyć niewielkie różnice pomiędzy poszczególnymi schematami – dla schematu 1: 86,44% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 79,63% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$) wartości przemieszczeń konstrukcji równomiernie sprężonej, schematu 2: 86,41% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 79,60% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$), zaś schemat 3: 85,71% (dla $r_\sigma = \mathbf{2{,}0}$) oraz 78,76% (dla $r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$). Dopiero większe wzmocnienie ($r_\sigma = \mathbf{3{,}0}$) pozwala zauważyć różnice pomiędzy poszczególnymi schematami.



Rysunek 5.45 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

Analogiczna sytuacja widoczna jest w przypadku zwiększonej siły – niezależnie od schematu zauważamy bardzo podobny poziom spadku wartości przemieszczeń. Każdy ze schematów w przypadku struktury jednowarstwowej pozwala uzyskać spadek wartości przemieszczeń w okolicach 13% w przypadku $r_\sigma = 2{,}0$ – są to kolejno wartości dla schematu 1: 86,89%, 2: 86,60%, 3: 85,01%, 4: 86,61% oraz 5: 86,58% pierwotnych przemieszczeń (Rys. 5.46). Łatwo zauważyć, że schematy są wzajemnie wymienne w tym przypadku, z największym wpływem schematu 3 co jest spodziewanym wynikiem. W przypadku zwiększenia różnic pomiędzy poszczególnymi przypadkami ($r_\sigma = 3{,}0$) również otrzymujemy zbliżone wartości przemieszczeń – spadek wartości wynosi około 17%. Są to wartości około 82% pierwotnych przemieszczeń w przypadku schematu 1, 2 i 3 do wartości około 81% pierwotnych przemieszczeń w przypadku schematu 3 i 5. Konstrukcja dwuwarstwowa zachowuje się w sposób analogiczny do struktury jednowarstwowej – procentowe spadki są zbliżone do siebie, ponieważ podobnie jak we wcześniejszych przypadkach wzmocnienie ze współczynnikiem $r_\sigma = 2{,}0$ pozwala na spadki w okolicach 13%, każdy ze schematów uzyskuje wartości około 87% wartości pierwotnych przemieszczeń. W przypadku zwiększenia wzmocnienia ($r_\sigma = 3{,}0$) otrzymujemy już większe spadki przemieszczeń, w okolicach 19-20%, gdzie największą sztywność uzyskują konstrukcje wzmacniane z układem ze schematów 3-4. Pozwala to też zauważyć, że można wymiennie stosować te trzy schematy i zmiennie wzmacniać strukturę.

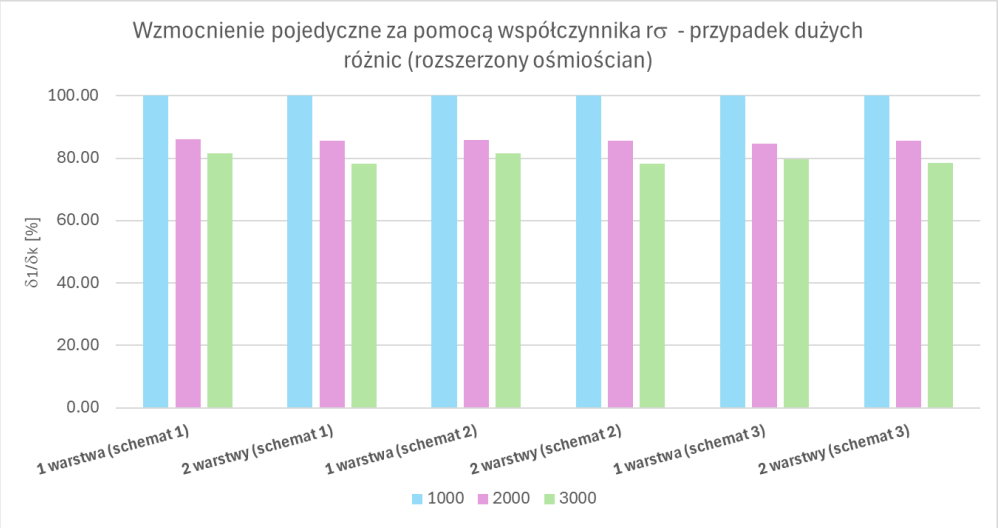


Rysunek 5.46 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

Przypadek 2. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_σ - wysokie wartości

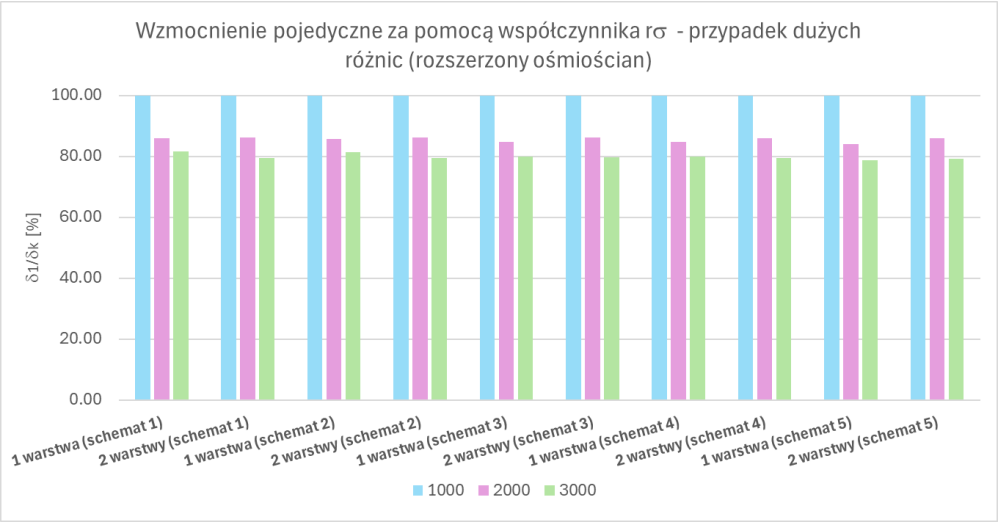
Zastosowanie podparcia wszystkich boków pozwala na tyle zmniejszyć przemieszczenia jednowarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), aby były one w zakresie użytkowalności nawet w przypadku stosowania dużych różnic pomiędzy obszarami wzmocnionymi i niewzmocnionymi (około $74\frac{Pa}{EA}$ w przypadku obciążenia pojedynczą siłą, $274\frac{Pa}{EA}$ w przypadku obciążenia wieloma siłami) (Tab. 2.8., Zał. 1.).

Zastosowanie struktury jednowarstwowej pozwala uzyskać spadki rzędu około 14-15% początkowej wartości przemieszczeń w przypadku wzmocnienia ze współczynnikiem $r_\sigma = 2000{,}0$ oraz 19-20% w przypadku wzmocnienia ze współczynnikiem $r_\sigma = 3{,}0$. Największy spadek wartości przemieszczeń pozwala uzyskać schemat 3, w przypadku którego otrzymujemy 79,75% początkowych przemieszczeń ($r_\sigma = 3000{,}0$). Podwójna warstwa modułów w układzie usztywnia go, ale ciągle pozwala na uzyskanie znaczących spadków wartości przemieszczeń – od 14% ($r_\sigma = 2000{,}0$) do 19% ($r_\sigma = 3000{,}0$), niezależnie od schematów. Warto zauważyć, że w przypadku schematu 2 i 3 wyniki te są bardzo zbliżone do siebie (Rys. 5.47).



Rysunek 5.47 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

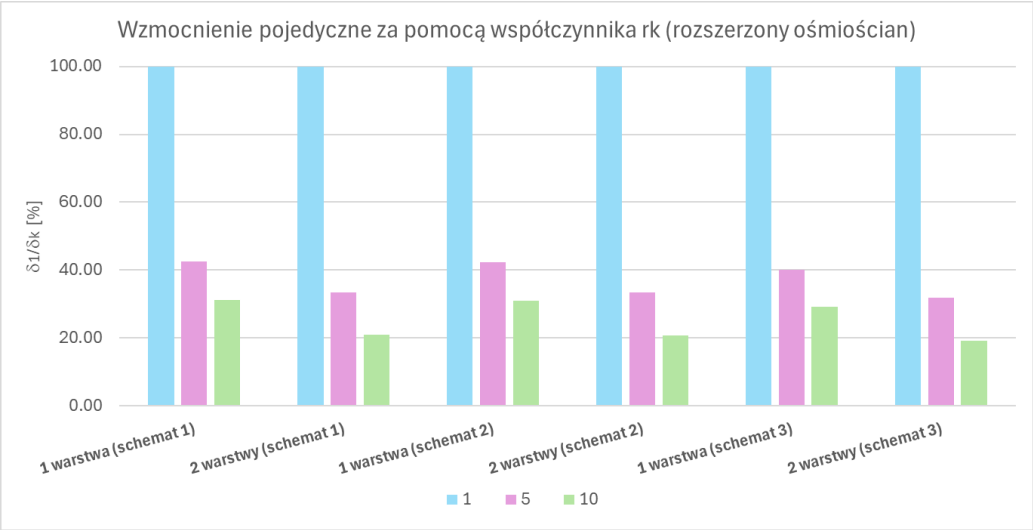
W wyniku zwiększenia obciążenia wyniki ugięć stają się bardziej zbliżone do siebie – struktury jednowarstwowe uzyskują około 86% początkowych wartości przemieszczeń na skutek wzmocnienia ze współczynnikiem $r_\sigma = 2000{,}0$. Pod wpływem większej różnicy wzmocnień ($r_\sigma = 3000{,}0$) uzyskują około 81-82% początkowych wartości przemieszczeń. W przypadku wykorzystania większych różnic wzmocnień ($r_\sigma = 3000{,}0$) nie uzyskano większych różnic pomiędzy poszczególnymi schematami: 1 – 80,90% początkowych przemieszczeń, 2 – 80,86%, 3 – 79,95%, 4 – 80,52%, 5 – 80,27%. Jest to zachowanie analogiczne pomiędzy wszystkimi konstrukcjami (Rys. 5.48).



Rysunek 5.48 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_σ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

Przypadek 3. Wzmocnienie obszarów poprzez zmianę współczynnika r_k

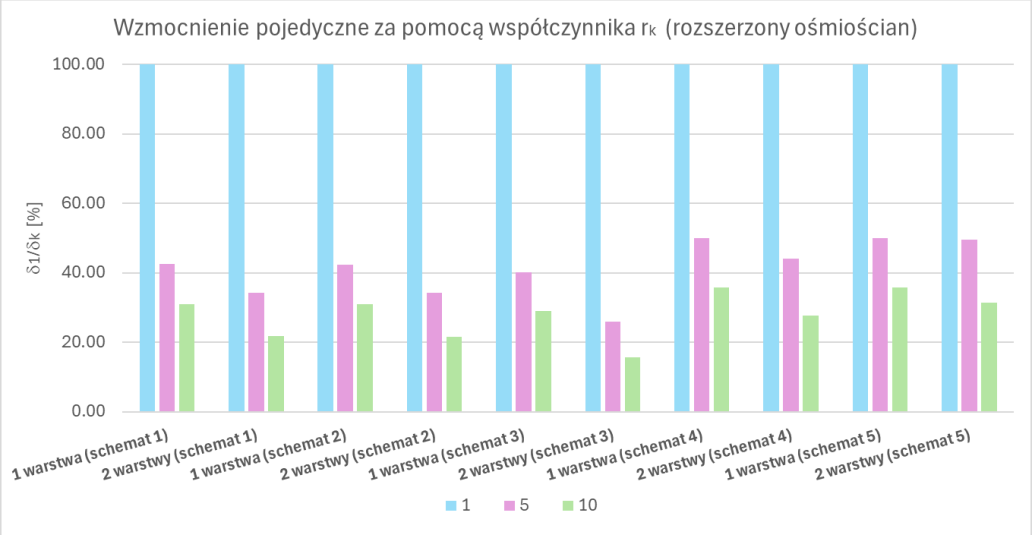
Analogicznie, jak w przypadku wszystkich wcześniejszych analiz, wpływ zmiany współczynnika r_k jest największy – pozwala osiągnąć znaczne spadki wartości przemieszczeń zarówno w przypadku struktur jedno-, jak i dwuwarstwowych. W przypadku konstrukcji jednowarstwowych przy pojedynczej sile obciążającej osiągamy już znaczne spadki wartości przemieszczeń przy wykorzystaniu zaledwie pięciokrotnego wzrostu współczynnika $r_k = 5$: przy wykorzystaniu schematu 1 jest to 42,54% początkowej wartości przemieszczeń, schematu 2 – 42,28%, zaś schematu 3 zaledwie 40,13% (Rys. 5.49). Przy zwiększeniu współczynnika do $r_k = 10$ wartości te spadają odpowiednio do 31,12%, 30,97% oraz 29,14%. Struktura dwuwarstwowa, z natury sztywniejsza, pozwala na jeszcze większe spadki przemieszczeń: schemat 1 prowadzi do 33,48% wartości przemieszczeń konstrukcji w pełni sprężonej, schemat 2 pozwala uzyskać 33,50% tej wartości, zaś schemat 3 – 31,89% ($r_k = 5$). Zwiększenie $r_k = 10$ pozwala na zwiększenie sztywności struktury i jeszcze większe spadki wartości przemieszczeń: schemat 1 – 20,98%, schemat 2 – 20,83%, zaś schemat 3 – 19,26% początkowej wartości przemieszczeń.



Rysunek 5.49 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan(octahedron)).

Zwiększenie obciążenia przypadającego na konstrukcje nie wpływa w znacznym stopniu na wartości przemieszczeń i ciągle pozwala na uzyskanie znacznych spadków nawet przy zastosowaniu wartości współczynnika $r_k = 5$. Struktura jednowarstwowa uzyskuje wtedy spadki o około 58% pierwotnej wartości przemieszczeń (schematy 1-3) oraz nieco większe

wartości, spadki są mierzone o około 50% pierwotnej wartości, w przypadku schematów 4-5. Analogiczne zachowanie można zauważyć w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej: schematy 1-2 pozwalają na spadki rzędu o 65%, schemat 3 – 74%. Zaś schematy 4-5: o około 50% wartości przemieszczeń dla struktury o jednorodnej geometrii. Zwiększenie różnic pomiędzy obszarami wzmocnionymi i niewzmocnionymi ($r_k = 10$) pozwala na uzyskanie jeszcze lepszych wyników – konstrukcja jednorodna uzyskuje wyniki o około 70% niższe (schemat 1-3), a w przypadku schematów 4-5 o 65%. Struktura dwuwarstwowa w tych samych warunkach uzyskuje jeszcze lepsze wyniki: schematy 1-2 pozwalają na spadki wartości przemieszczeń o 79%, schemat 3 – aż 84%, zaś schematy 4-5 o około 70% (Rys. 5.50).



Rysunek 5.50 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika r_k (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)).

5.3.3. Podsumowanie

Przedstawione powyżej analizy dowodzą, że możliwe jest wykorzystanie wzmacniania konstrukcji zbudowanych z modułów przestrzennych tensegrity w konkretnych obszarach z wykorzystaniem rozwiązań optymalizacji topologicznej. Co istotne, zastosowanie takich rozwiązań pozwala uzyskać zmniejszenie wartości przemieszczeń w strukturze, a tym samym zwiększyć jej sztywność. Jest to możliwe za pomocą obu ustalonych wcześniej rozwiązań – za pomocą zmiany poziomu siły sprężającej (zmiana współczynnika σ), jak i również poprzez zmianę przekrojów cięgien w poszczególnych modułach (zmiana współczynnika k).

Zastosowanie zmiany przekrojów cięgien pozwala uzyskać znacznie większe usztywnienie konstrukcji - współczynnik $r_k = 5$ pozwala już na spadki wartości przemieszczeń o około 40-

45% wartości przemieszczeń konstrukcji o jednorodnej geometrii. Jest to rozwiązanie znacznie bardziej efektywne, jednak pozwala dostosować strukturę do niewielkiego zakresu możliwych obciążeń. W przypadku zastosowania usztywnienia konstrukcji za pomocą zmiany sprężenia w strukturze można uzyskać mniej spektakularne efekty – spadki wartości przemieszczeń zazwyczaj są w okolicach 10-15% początkowych przemieszczeń konstrukcji sprężonej jednorodnie. Wartości te jednak są już często wystarczające do wykorzystania w praktycznych zastosowaniach (szczególnie w przypadku struktur zbudowanych z modułów *Simplex* czterozastrzałowy), a jednocześnie pozwalają na wprowadzanie różnorodnych układów lokalnych wzmocnień konstrukcji, co pozwala ją dostosować do niezliczonych przypadków obciążeń. Ponadto, zauważono, że struktury mogą być wzmacniane na różne sposoby (poprzez różne „wzory" optymalizacji topologicznej), co uzasadnia sens budowania konstrukcji adaptowalnych do różnych przypadków obciążeń z wykorzystaniem modułów tensegrity.

W trakcie analiz zauważono również, że istotne jest ustalenie bazowej wartości siły sprężającej jako dostatecznie niskiej, aby nie doprowadzić do zniszczenia elementów struktury (na przykład wyboczenie prętów ściskanych pod wpływem zbyt wysokich wartości sił) lub przekroczenia zakresu stosowalności konstrukcji (przekroczenie obszaru wewnątrz którego wraz ze wzrostem sprężenia, wartości przemieszczeń maleją). Jest to szczególnie zauważalne w trakcie wykorzystywania schematów ze zróżnicowanym wzmocnieniem (schematy 4-5).

Analizując powyższe wyniki oceniono, że istotne jest rozważenie początkowego schematu statycznego konstrukcji, który pozwoli na jak najlepsze wykorzystanie możliwości adaptacyjnych. Struktury dwuwarstwowe, z natury bardziej sztywne, często wymagają wykorzystania znacznych różnic pomiędzy obszarami wzmocnionymi i osłabionymi, aby uzyskać znacznie mniejsze wartości przemieszczeń. Z drugiej strony jednak, konstrukcje jednowarstwowe zbudowane z modułu rozszerzony ośmiościan (*octahedron*), nie są możliwe do wykorzystania w praktyce bez dodatkowego wzmocnienia. W przypadku struktury dwuwarstwowej nie zauważono takich uwarunkowań. Warto tu także wspomnieć o sposobie podparcia konstrukcji – w analizach rozważano dwa skrajne przypadki (podparcie naroży i podparcie boków). Podparcie struktury wzdłuż boków często pozwala uzyskać znaczną jej sztywność, a tym samym, ponownie, ciężej jest uzyskać znaczne różnice pomiędzy konstrukcją wzmocnioną lokalnie a wzmocnioną w sposób jednorodny. Istotny jest także dobór

początkowych modułów – jednowarstwowa struktura zbudowana z modułów *Simplex* czterozastrzałowy pozwala uzyskać wartości przemieszczeń początkowych dwuwarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów rozszerzony ośmiościan (*octahedron*). W tym przypadku jest jednak możliwe wykorzystanie lokalnego wzmacniania za pomocą zmiany przekrojów prętów, które pozwala na zbliżenie tych wyników.

Zatem adaptowalność struktury jest najbardziej zauważalna przy wykorzystaniu możliwie najbardziej podatnej konstrukcji początkowej, czyli takiej, która jest zbudowana z mniej sztywnych modułów oraz podpartej w minimalny wymagany sposób. Wtedy można zauważyć największe różnice pomiędzy zastosowaniem poszczególnych schematów lokalnego wzmocnienia. Ponadto, warto zauważyć, ze poszczególne schematy mogą działać zamiennie wobec siebie w przypadku poszczególnych obciążeń – można zastosować stałe wzmocnienie lokalne o mniejszej wartości sił sprężających lub wzmocnienie zmienne o większej wartości sił sprężających bezpośrednio pod obszarem obciążonym. Warto także wspomnieć, że schematy uzyskują podobne wyniki (procentowe, względem początkowego przemieszenia) spadków wartości przemieszczeń, a poszczególne struktury różnią się właśnie początkową wartością przemieszczenia.

6. Przykład zastosowania – wiata przystankowa węzła tramwajowego

Celem rozdziału jest przedstawienie przykładu zastosowania konstrukcji tensegrity z inteligentnym szkieletem wewnętrznym. Rozdział obejmuje opis modelu konstrukcji dachu wiaty przystankowej węzła tramwajowego na miejscu istniejącej wiaty przystanku na węźle przesiadkowym Młociny w Warszawie. Na potrzeby niniejszego rozdziału sformułowano następującą tezę badawczą: „Konstrukcja tensegrity wzmocniona za pomocą inteligentnego szkieletu opartego na wynikach optymalizacji topologicznej pozwala na użytkowanie struktury w warunkach nietypowych, a także wymagających tylko czasowego wzmocnienia. Wprowadzenie inteligentnego szkieletu powoduje zmniejszenie przemieszczeń w porównaniu do konstrukcji jednolicie wzmocnionej."

Weryfikacja tezy została wykonana na przykładzie dwóch konstrukcji dachu: jednowarstwowej oraz dwuwarstwowej konstrukcji zbudowanej z modułów *Simplex* czterozastrzałowy. W analizach wykorzystano wzmocnienie lokalne. Wykonano analizę czterech przypadków obciążenia: pracownik poruszający się po zadaszeniu, pracownik stojący w miejscu, zalegający śnieg, obciążenie ozdobami świątecznymi.

We wszystkich przypadkach rozważano wzmocnienie za pomocą sprężenia, weryfikację przeprowadzono w oprogramowaniu *Abaqus (wer. 2018).* W celu porównania wyników pomiędzy poszczególnymi stopniami wzmocnienia odczytywano wartości przemieszczeń węzłów w wybranych przekrojach konstrukcji. W kolejnych podrozdziałach omówiono: opis geometrii i modelu numerycznego konstrukcji, sposób obliczania przypadków obciążeń, analizy poszczególnych przypadków i ich wyniki oraz podsumowanie wyników i wnioski zawarte na końcu rozdziału.

6.1. Opis konstrukcji

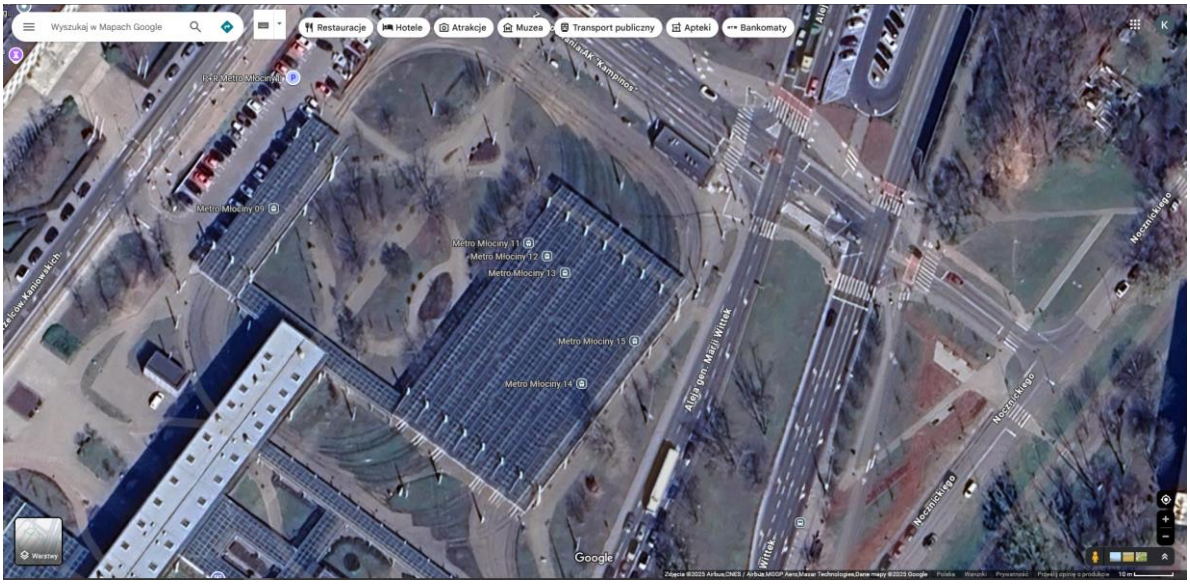
6.1.1. Geometria konstrukcji oraz model numeryczny

Jako przykład zastosowania adaptowalnej struktury tensegrity wybrano konstrukcję dachu wiaty przystankowej węzła tramwajowego. O tym, że konstrukcje te mogą być ozdobą, a nawet symbolem miasta świadczy przykład Dworca Tramwajowego Centrum na ulicy Piotrkowskiej w Łodzi, popularnie nazywanego Stajnią Jednorożców. Wiata o wysokości 13 m,

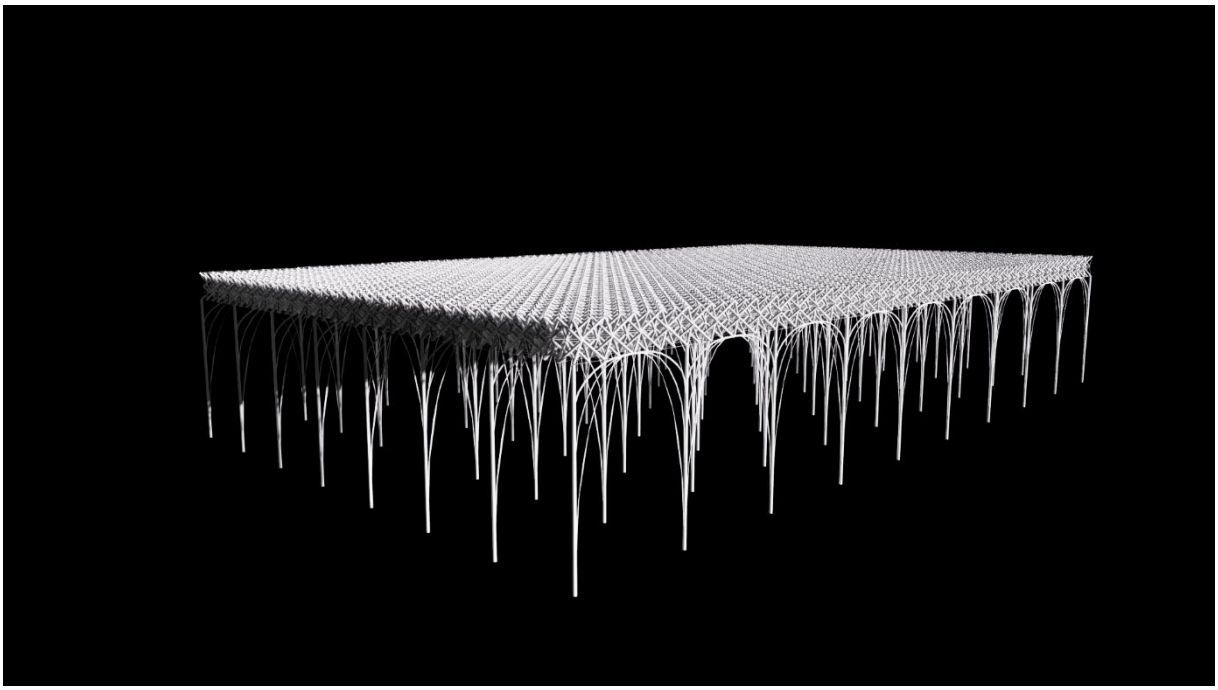
szerokości 33 m i długości 100 m, a swoją nazwę zawdzięcza charakterystycznym kolorowym membranom EFTE zamontowanym jako jej pokrycie (Rys. 6.1). Konstrukcja ta dzięki swojemu niezwykłemu wyglądowi nawiązującemu do okresu secesji bardzo szybko stała się punktem turystycznym miasta i jego symbolem.

Rysunek 6.1 Dworzec Tramwajowy Centrum w Łodzi (Stajnia Jednorożców) (źródło: archiwum własne autorki).

W pracy zaproponowano strukturę tensegrity zadaszenia przystanku tramwajowego, która miałaby zastąpić istniejącą konstrukcję zadaszenia przystanku tramwajowego w miejscu węzła transportowego Metro Młociny w Warszawie (Rys. 6.2). Na podstawie bezpośrednich oględzin istniejącej konstrukcji uzupełnionych o analizę zdjęć satelitarnych, a także na podstawie obowiązujących przepisów techniczno-budowlanych, dostępnych danych katalogowych dotyczących infrastruktury przystanków tramwajowych i wymiarów analogicznych, wcześniej udokumentowanych, obiektów ustalono wymiary nowej konstrukcji przystanku tramwajowego. Struktura ma następujące wymiary: 42 m szerokości oraz 72 m długości. Cała konstrukcja ma 13 m wysokości. Zaprojektowano główną konstrukcję wykonaną ze stali konstrukcyjnej, na bazie istniejących rozwiązań cięgnowych oraz przykrycie struktury za pomocą membran ETFE, które jest powszechnie wykorzystywane w tego typu konstrukcjach jako lżejszy zamiennik szkła (jak w przykładzie konstrukcji Dworca Tramwajowego Centrum w Łodzi). Wizualizacja konstrukcji wykonana w programie *Twinmotion (wer. 2025.2)* została przedstawiona na Rys. 6.3 i 6.4.



Rysunek 6.2 Zdjęcie satelitarne przedstawiające zadaszenie przystanku tramwajowego w miejscu węzła transportowego Metro Młociny w Warszawie (źródło: Google Maps).



Rysunek 6.3 Wizualizacja konstrukcji wykonana w programie Twinmotion.

W ramach analiz zdecydowano się na przebadanie zachowania dwóch różnych konstrukcji: jednowarstwowej i dwuwarstwowej struktury zbudowanej z przestrzennych modułów tensegrity *Simplex* czterozastrzałowy. Rozpatrywano przypadki modułu o wymiarach zewnętrznych $1\,m \times 1\,m \times 1\,m$. Wymiar pozwala na zbudowanie konstrukcji o regularnej siatce modularnej: otrzymujemy strukturę 42×72 moduły (21×36 superkomórek). Jako podstawową superkomórkę wybrano układ o przeciwnych skrętnościach modułów, który jest

bardziej podatny i częściej wykorzystywany w analizach potencjalnych konstrukcji. Moduły przyjmują następujące wartości mnożników siły sprężającej dla poszczególnych typów prętów: cięgna dolne sprężane są z mnożnikiem $p = 0{,}121268$, cięgna górne $p = 0{,}171499$, cięgna skośne $p = 0{,}271163$, a zastrzały z mnożnikiem $p = -0{,}363803$.

Rysunek 6.4 Wizualizacja konstrukcji i otoczenia wykonana w programie Twinmotion.

6.2. Model obliczeniowy

Strukturę zamodelowano w programie *Abaqus (wer. 2018)* służącym do analizy MES, powszechnie wykorzystywanym w inżynierii lądowej i mechanicznej. W obliczeniach przyjęto fizycznie liniowy model materiału, co oznacza, że nie uwzględniano nieliniowości materiałowych. Zastosowano natomiast analizę geometrycznie nieliniową, umożliwiającą uwzględnienie zmian konfiguracji konstrukcji w trakcie obciążania, w tym wpływu przemieszczeń, obrotów oraz sił osiowych na sztywność układu. Ma to szczególne znaczenie w przypadku struktur tensegrity, które z punktu widzenia mechaniki konstrukcji mogą być traktowane jako szczególny przypadek układów kratownicowych, jednak ich odpowiedź mechaniczna jest ściśle związana z występowaniem mechanizmów infinitezymalnych oraz stanów samonaprężenia. We wcześniejszych przykładach zastosowanie analizy według teorii II rzędu było wystarczające do wykazania zasadności stosowania szkieletów tensegrity oraz do uchwycenia wpływu samonaprężenia na pracę układu. W przykładzie zastosowania

zdecydowano się jednak dodatkowo uwzględnić nieliniowość geometryczną, aby dokładniej odwzorować rzeczywistą odpowiedź konstrukcji pod obciążeniem, w szczególności możliwość zmiany jej sztywności wraz z postępującą deformacją. Podejście to odpowiada analizie geometrycznie nieliniowej, określanej w literaturze jako teoria III rzędu, która — w odróżnieniu od teorii II rzędu — pozwala uwzględnić efekt samousztywnienia struktury tensegrity wynikający ze zmiany jej geometrii podczas pracy pod obciążeniem (Al Sabouni-Zawadzka, Gilewski 2018b).

Z perspektywy mechaniki konstrukcji, konstrukcje tensegrity są specyficznym przypadkiem kratownic, w związku z tym w analizach cięgna oraz zastrzały zostały zamodelowane za pomocą kratownicowych elementów skończonych T3D2. Geometrię prętów wybrano na podstawie katalogu producenta Leviat (Leviat brak daty) na podstawie analizy nośności dla określonej kombinacji obciążeń – elementy są wykonane ze stali konstrukcyjnej S355J2 ($E = 210\ GPa, \nu = 0{,}3$).

Ponieważ skupiono się na możliwościach adaptacyjnych struktury, w niniejszej analizie badano tylko zachowanie konstrukcji wykonanej z modułów tensegrity, pomijając analizę słupów będących podporami konstrukcji. Jako sposób podparcia zamodelowano strukturę słupów rozstawioną co 6 m na boku krótszym konstrukcji (pozwalających na zbudowanie 7 przystanków tramwajowych) oraz co 8 m na boku dłuższym. Podparcie za pomocą słupa zostało zamodelowane jako blokady przemieszczeń X, Y, Z pojedynczych węzłów w punkcie podparcia.

Obciążenia zostały zaprojektowane jako pionowe siły węzłowe oraz ciężar własny konstrukcji wyliczany automatycznie przez program na podstawie podanej gęstości materiału (stal: $7850\ kg/m^3$). Wszystkie dane do modelu zostały wprowadzone w jednostkach: m, kN, kg.

6.2.1. Obciążenia

Obciążenia stałe

Zakłada się obciążenia od ciężaru własnego konstrukcji stalowej tensegrity pobrane na podstawie modelu z oprogramowania *Abaqus (wer. 2018).* Dodatkowo, konstrukcja jest obciążona ciężarem własnym membran ETFE o grubości $200\ \mu m$ w systemie trójwarstwowym oraz ciężarem profili mocujących pokrycie do stalowej konstrukcji tensegrity. Masa takiego

systemu, zgodnie z informacjami ze katalogów producentów membran ETFE tensaform (Tensaform brak daty) i tempo (Tempo brak daty)), wynosi około $2 - 3\ kg/m^2$.

Ciężar pokrycia membraną ETFE wraz z profilami mocującymi:

$$g_{ETFE} = 3\ \frac{kg}{m^2} \cdot 9{,}80665\ \frac{N}{kg} = 29{,}42\ \frac{N}{m^2} = 0{,}029\ \frac{kN}{m^2}$$

Obciążenie użytkowe

Zgodnie z normą (Polski Komitet Normalizacyjny 2011a), Tab. 6.9 oraz 6.10 (Rozdział 6. Obciążenia użytkowe w budynkach) ustalono kategorię zadaszenia jako H – Dachy bez dostępu, z wyjątkiem zwykłego utrzymania i napraw. Norma zaleca w takiej sytuacji przyjęcie obciążenia $q_k = 0{,}4\ \frac{kN}{m^2}, Q_k = 1{,}0\ kN$.

Obciążenie śniegiem

Obciążenie śniegiem obliczono zgodnie z normą (Polski Komitet Normalizacyjny 2010b), z wykorzystaniem wzoru 5.1 (Rozdział 5. Obciążenie śniegiem dachów).

Obciążenie śniegiem gruntu (Warszawa, strefa 2): $s_k = 0{,}9\ kN/m^2$

Teren wystawiony na działanie wiatru: $C_e = 0{,}8$

Współczynnik termiczny (brak różnic temperatury pomiędzy powierzchnią dachu, a przestrzenią pod dachem): $C_t = 1{,}0$

Współczynnik kształtu dachu (spadek dachu: $5°$, brak przeszkód umożliwiających gromadzenie się śniegu): $\mu_1 = 0{,}8$

Obciążenie dachu śniegiem: $s = \mu_1 \cdot C_e \cdot C_t \cdot s_k = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}0 \cdot 0{,}9 = 0{,}576\ \frac{kN}{m^2}$

Obciążenie wiatrem

Obciążenie wiatrem obliczono zgodnie z normą (Polski Komitet Normalizacyjny 2011b), z uwzględnieniem rozdziału 7.3 Wiaty.

Wymiary konstrukcji: $b = 72\ m, d = 42\ m, h = 13\ m$

Współczynnik kierunkowy: $c_{dir} = 1{,}0$

Współczynnik sezonowy: $c_{season} = 1{,}0$

Podstawowa bazowa prędkości wiatru (strefa 1, A < 300 m n.p.m.): $v_{b,0} = 22\frac{m}{s}$

Bazowa prędkość wiatru: $v_b = c_{dir} \cdot c_{season} \cdot v_{b,0} = 1{,}0 \cdot 1{,}0 \cdot 22 = 22\frac{m}{s}$

Gęstość powietrza (wartość zalecana): $\rho = 1{,}25\frac{kg}{m^3}$

Wartość bazowa ciśnienia prędkości wiatru: $q_b = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_b^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}25 \cdot 22^2 = 302{,}5\frac{N}{m^2} = 0{,}303\frac{kN}{m^2}$

Zgodnie z Załącznikiem krajowym dopuszcza się stosowanie współczynnika ekspozycji zgodnie z wzorem podanym w Tab. NA.3.

Współczynnik ekspozycji (kategoria terenu III): $C_e = 1{,}9 \cdot \left(\frac{z_e}{10}\right)^{0{,}26} = 1{,}9 \cdot \left(\frac{13}{10}\right)^{0{,}26} = 2{,}034$

Wartość szczytowa ciśnienia prędkości: $q_p(z) = C_e(z) \cdot q_b = 2{,}034 \cdot 0{,}303 = 0{,}616\frac{kN}{m^2}$

Dla przypadku $\varphi = 0$ (wiata pusta, brak blokady przez materiały składowane), gdzie znak „-” oznacza obciążenie netto działające ku górze:

Strefa A: $c_{p,net,A} = -0{,}6$ Strefa B: $c_{p,net,B} = -1{,}4$

Strefa C: $c_{p,net,C} = -1{,}4$ Stefa D: $c_{p,net,D} = -1{,}1$

Zatem obciążenie w poszczególnych strefach wynosi:

Strefa A: $w_A = q_p(z) \cdot c_{p,net,A} = 0{,}616 \cdot (-0{,}6) = -0{,}370\frac{kN}{m^2}$

Strefa B: $w_B = q_p(z) \cdot c_{p,net,B} = 0{,}616 \cdot (-1{,}4) = -0{,}862\frac{kN}{m^2}$

Strefa C: $w_C = q_p(z) \cdot c_{p,net,C} = 0{,}616 \cdot (-1{,}4) = -0{,}862\frac{kN}{m^2}$

Stefa D: $w_D = q_p(z) \cdot c_{p,net,D} = 0{,}616 \cdot (-1{,}1) = -0{,}678\frac{kN}{m^2}$

Przeliczenie obciążeń na kierunek pionowy

$$g_{ETFE|} = g_{ETFE} = 0{,}029\frac{kN}{m^2}$$

$$q_{k|} = q_k \cdot \cos\alpha = 0{,}4 \cdot 0{,}996 = 0{,}398\ \frac{kN}{m^2}$$

$$s_{k|} = s \cdot \cos\alpha = 0{,}576 \cdot 0{,}996 = 0{,}574\,\frac{kN}{m^2}$$

$$w_{k,A,|} = w_A \cdot \cos\alpha = -0{,}370 \cdot 0{,}996 = 0{,}369\,\frac{kN}{m^2}$$

$$w_{k,BC,|} = w_{BC} \cdot \cos\alpha = -0{,}862 \cdot 0{,}996 = 0{,}859\,\frac{kN}{m^2}$$

$$w_{k,D,|} = w_D \cdot \cos\alpha = -0{,}678 \cdot 0{,}996 = 0{,}675\,\frac{kN}{m^2}$$

Wybrane kombinacje obciążeń SGN

Zdecydowano się na wykonanie kilku podstawowych kombinacji obciążeń, które pozwolą na ustalenie wymiarów przekrojów podstawowej konstrukcji.

Kombinacja 1.: Obciążenie dominujące: obciążenie stałe

Obliczenia według wzoru 6.10a z (Polski Komitet Normalizacyjny 2010a):

$$Q_{SGN} = \sum \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_{Q,1} \cdot \psi_{0,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Tabela 6.1 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 1.

Rodzaj obciążenia			Obciążenie charakterystyczne $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$		Współczynnik obciążenia		Obciążenie obliczeniowe $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$
stałe	ciężar własny konstrukcji		$g_{k\|}$	$g_{k\|}$	γ_g	1,35	$1{,}35 \cdot g_{k\|}$
	ciężar pokrycia		$g_{ETFE\|}$	0,029	γ_g	1,35	0,039
zmienne	śnieg		$s_{k\|}$	0,574	$\psi_{0,1} \cdot \gamma_{Q,1}$	0,5 · 0,7	0,431
	wiatr	pole A	$w_{k,A,\|}$	−0,369	$\psi_{0,2} \cdot \gamma_{Q,2}$	1,5 · 0,6	−0,356
		pole B i C	$w_{k,BC,\|}$	−0,859			−0,773
		pole D	$w_{k,D,\|}$	−0,675			−0,608
	użytkowe		$q_{k\|}$	0,398	$\psi_{0,3} \cdot \gamma_{Q,3}$	1,5 · 0	0,000

	Pole A	$0{,}113 + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$
	Pole B i C	$-0{,}303 + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$
	Pole D	$-0{,}138 + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$

Kombinacja 2.: Obciążenie dominujące: obciążenie śniegiem

Obliczenia według wzoru 6.10b z (Polski Komitet Normalizacyjny 2010a):

$$Q_{SGN} = \sum \xi \cdot \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Tabela 6.2 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 2.

Rodzaj obciążenia			Obciążenie charakterystyczne $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$		Współczynnik obciążenia		Obciążenie obliczeniowe $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$
stałe	ciężar własny konstrukcji		$g_{k\|}$	$g_{k\|}$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$1{,}15 \cdot g_{k\|}$
	ciężar pokrycia		$g_{ETFE\|}$	$0{,}029$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$0{,}033$
zmienne	śnieg		$s_{k\|}$	$0{,}574$	$\gamma_{Q,1}$	$1{,}5$	$0{,}861$
	wiatr	pole A	$w_{k,A,\|}$	$-0{,}369$	$\psi_{0,2} \cdot \gamma_{Q,2}$	$1{,}5 \cdot 0{,}6$	$-0{,}356$
		pole B i C	$w_{k,BC,\|}$	$-0{,}859$			$-0{,}773$
		pole D	$w_{k,D,\|}$	$-0{,}675$			$-0{,}608$
	użytkowe		$q_{k\|}$	$0{,}398$	$\psi_{0,3} \cdot \gamma_{Q,3}$	$1{,}5 \cdot 0$	$0{,}000$
					Pole A		$0{,}538 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole B i C		$0{,}121 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole D		$0{,}287 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$

Kombinacja 3.: Obciążenie dominujące: obciążenie wiatrem

Obliczenia według wzoru 6.10b z (Polski Komitet Normalizacyjny 2010a):

$$Q_{SGN} = \sum \xi \cdot \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Tabela 6.3 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 3.

Rodzaj obciążenia			Obciążenie charakterystyczne $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$		Współczynnik obciążenia		Obciążenie obliczeniowe $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$
stałe	ciężar własny konstrukcji		$g_{k\|}$	$g_{k\|}$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$1{,}15 \cdot g_{k\|}$
	ciężar pokrycia		$g_{ETFE\|}$	$0{,}029$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$0{,}033$
zmienne	śnieg		$s_{k\|}$	$0{,}574$	$\psi_{0,2} \cdot \gamma_{Q,2}$	$0{,}5 \cdot 0{,}7$	$0{,}431$
	wiatr	pole A	$w_{k,A,\|}$	$-0{,}369$	$\gamma_{Q,1}$	$1{,}5$	$-0{,}594$
		pole B i C	$w_{k,BC,\|}$	$-0{,}859$			$-1{,}289$
		pole D	$w_{k,D,\|}$	$-0{,}675$			$-1{,}013$
	użytkowe		$q_{k\|}$	$0{,}398$	$\psi_{0,3} \cdot \gamma_{Q,3}$	$1{,}5 \cdot 0$	$0{,}000$
					Pole A		$-0{,}130 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole B i C		$-0{,}825 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole D		$-0{,}549 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$

Kombinacja 4.: Obciążenie dominujące: obciążenie użytkowe

Obliczenia według wzoru 6.10b z (Polski Komitet Normalizacyjny 2010a):

$$Q_{SGN} = \sum \xi \cdot \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Z uwagi na pkt. 3.3.2 (1) PN-EN 1991-1-1:2004/AC:2009, pominięto wpływ oddziaływania wiatru.

Tabela 6.4 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 4.

Rodzaj obciążenia			Obciążenie charakterystyczne $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$		Współczynnik obciążenia		Obciążenie obliczeniowe $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$
stałe	ciężar własny konstrukcji		$g_{k\|}$	$g_{k\|}$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$1{,}15 \cdot g_{k\|}$
	ciężar pokrycia		$g_{ETFE\|}$	$0{,}029$	$\xi \cdot \gamma_g$	$0{,}85 \cdot 1{,}35$	$0{,}033$
zmienne	śnieg		$s_{k\|}$	$0{,}574$	$\psi_{0,2} \cdot \gamma_{Q,2}$	$0{,}5 \cdot 0{,}7$	$0{,}431$
	wiatr	pole A	$w_{k,A,\|}$	$-0{,}369$	$\psi_{0,3} \cdot \gamma_{Q,3}$	$1{,}5 \cdot 0$	$0{,}000$
		pole B i C	$w_{k,BC,\|}$	$-0{,}859$			$0{,}000$
		pole D	$w_{k,D,\|}$	$-0{,}675$			$0{,}000$
	użytkowe		$q_{k\|}$	$0{,}398$	$\gamma_{Q,1}$	$1{,}5$	$0{,}597$
					Pole A		$1{,}061 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole B i C		$1{,}061 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
					Pole D		$1{,}061 + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$

Kombinacja 5.: Obciążenie dominujące: obciążenie użytkowe

Obliczenia według wzoru 6.10b z (Polski Komitet Normalizacyjny 2010a):

$$Q_{SGN} = \sum \xi \cdot \gamma_{G,j} \cdot G_{k,j} + \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1} + \sum_{i>1} \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$$

Z uwagi na pkt. 3.3.2 (1) PN-EN 1991-1-1:2004/AC:2009, pominięto wpływ oddziaływania śniegu.

Tabela 6.5 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 5.

<table>
<tr><th colspan="3" rowspan="2">Rodzaj obciążenia</th><th colspan="2" rowspan="2">Obciążenie charakterystyczne $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$</th><th colspan="2" rowspan="2">Współczynnik obciążenia</th><th rowspan="2">Obciążenie obliczeniowe $\left[\frac{kN}{m^2}\right]$</th></tr>
<tr></tr>
<tr><td rowspan="6">stałe</td><td colspan="2" rowspan="2">ciężar własny konstrukcji</td><td rowspan="2">$g_{k\vert}$</td><td rowspan="2">$g_{k\vert}$</td><td rowspan="2">$\xi \cdot \gamma_g$</td><td rowspan="2">$0{,}85 \cdot 1{,}35$</td><td rowspan="2">$1{,}15 \cdot g_{k\vert}$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="2">ciężar pokrycia</td><td>$g_{ETFE\vert}$</td><td>$0{,}029$</td><td>$\xi \cdot \gamma_g$</td><td>$0{,}85 \cdot 1{,}35$</td><td>$0{,}033$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">zmienne</td><td colspan="2">śnieg</td><td>$s_{k\vert}$</td><td>$0{,}574$</td><td>$\psi_{0,3} \cdot \gamma_{Q,3}$</td><td>$1{,}5 \cdot 0$</td><td>$0{,}000$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">wiatr</td><td>pole A</td><td>$w_{k,A,\vert}$</td><td>$-0{,}369$</td><td rowspan="3">$\psi_{0,2} \cdot \gamma_{Q,2}$</td><td rowspan="3">$1{,}5 \cdot 0{,}6$</td><td>$-0{,}356$</td></tr>
<tr><td>pole B i C</td><td>$w_{k,BC,\vert}$</td><td>$-0{,}859$</td><td>$-0{,}773$</td></tr>
<tr><td>pole D</td><td>$w_{k,D,\vert}$</td><td>$-0{,}675$</td><td>$-0{,}608$</td></tr>
<tr><td colspan="2">użytkowe</td><td>$q_{k\vert}$</td><td>$0{,}398$</td><td>$\gamma_{Q,1}$</td><td>$1{,}5$</td><td>$0{,}597$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="2">Pole A</td><td>$0{,}274 + 1{,}15 \cdot g_{k\vert}$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="2">Pole B i C</td><td>$-0{,}143 + 1{,}15 \cdot g_{k\vert}$</td></tr>
<tr><td colspan="5"></td><td colspan="2">Pole D</td><td>$0{,}023 + 1{,}15 \cdot g_{k\vert}$</td></tr>
</table>

Podsumowanie kombinacji obciążeń

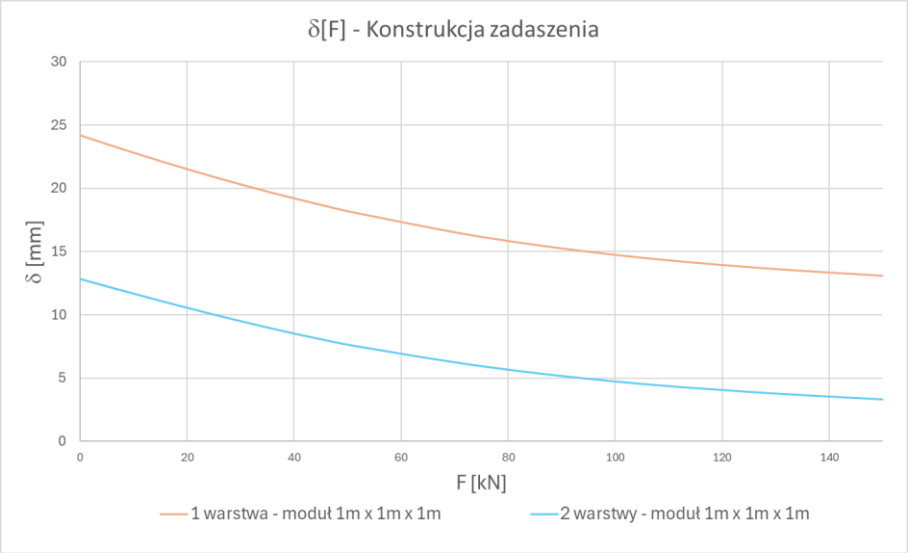
Na podstawie analizy poszczególnych kombinacji obciążeń do dalszych obliczeń wybrano Kombinację 3., która odpowiada sytuacji ssania wiatru (podnoszenia dachu wiaty) oraz Kombinację 4., która odpowiada sytuacji parcia wiatru (obciążenie dachu zgodne z grawitacją). W przypadku wartości $g_{k\vert} > 0{,}8\ kN/m^2$, Kombinacja 4 jest kombinacją pozwalającą uzyskać największe obciążenie struktury i to dla niej będą wykonywane dalsze obliczenia poszukiwania przekrojów konstrukcji oraz przypadków wzmocnień.

Tabela 6.6 Podsumowanie kombinacji obciążeń.

Pole	K1	K2	K3	K4	K5
A	$0{,}113\frac{kN}{m^2} + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$	$0{,}538\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$-0{,}130\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$1{,}061\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$0{,}274\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
B i C	$-0{,}303\frac{kN}{m^2} + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$	$0{,}121\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$-0{,}825\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$1{,}061\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$-0{,}143\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$
D	$-0{,}138\frac{kN}{m^2} + 1{,}35 \cdot g_{k\|}$	$0{,}287\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$-0{,}549\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$1{,}061\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$	$0{,}023\ \frac{kN}{m^2} + 1{,}15 \cdot g_{k\|}$

Poszukiwanie struktury oraz ocena cech tensegrity

W wyniku analiz zachowania struktur tensegrity jedno- oraz dwuwarstwowych pod wpływem obciążenia siłą powierzchniową o wartości $1{,}061\ kN/m^2 + g_{k|}$, przeliczoną na pojedyncze siły węzłowe, zdecydowano o przyjęciu następujących przekrojów prętów: w przypadku cięgien są to pręty pełne o średnicy nominalnej 16 mm, w przypadku zastrzałów są to rury o średnicy nominalnej 139 mm i grubości ścianek 4 mm z katalogu producenta Leviat (Leviat brak daty). Następnie przeprowadzono analizę zachowania konstrukcji pod wpływem zwiększania sił sprężających, celem potwierdzenia cech tensegrity w konstrukcji. W przypadku braku sił sprężających program zgłasza błąd wynikający z braku wystarczającej sztywności konstrukcji (brak stabilizacji mechanizmów infinitezymalnych). W miarę zwiększania siły F (gdzie $F_0 = p \cdot F$ – siła sprężająca w poszczególnych prętach, p – mnożnik siły sprężającej zależny od rodzaju pręta) w zakresie od 0.1 kN do 150 kN można zauważyć spadek wartości przemieszczeń węzła znajdującego się pod siłą (Rys. 6.5), które jest charakterystyczne dla struktur tensegrity). Zauważono, że konstrukcja dwuwarstwowa jest sztywniejsza od struktury jednowarstwowej, wykres przemieszczeń struktury dwuwarstwowej jest przesunięty równolegle względem wykresu przemieszczeń konstrukcji jednowarstwowej. W przypadku struktury jednowarstwowej osiągamy wartości przemieszczeń o około 10 mm mniejsze niż w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej. Niezależnie od wykorzystanej struktury, wynikowe przemieszczenia zawierają się w przedziale $\frac{L}{200} = \frac{6000\ mm}{300} = 30\ mm$ a $\frac{L}{300} = \frac{6000\ mm}{300} = 20\ mm$, gdzie L – mniejszy rozstaw słupów podpierających konstrukcję.



Rysunek 6.5 Wykresy zależności przemieszczenia węzłów pod siłą od wartości siły sprężającej konstrukcji zadaszenia przystanku tramwajowego w przypadku różnych typów struktury modułów Simplex czterozastrzałowy.

W celu wykonania analiz należy określić siłę krytyczną dla prętów ściskanych, aby móc określić zakres siły sprężającej element. Siłę tę obliczono zgodnie z wzorem Eulera dla przekroju pierścieniowego.

$$I = \frac{\pi \cdot (D_z^4 - D_w^4)}{64} = \frac{\pi \cdot (0{,}139^4 - 0{,}131^4)}{64} = 0{,}00000387\ m^4 = 3{,}87 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$F_{kr,1m} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\mu \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 3{,}87 \cdot 10^{-6}}{1{,}0 \cdot 1{,}5^2} = 3{,}558 \cdot 10^6\ N = 3558\ kN$$

Z powyższych wyliczeń oraz biorąc pod uwagę wartość mnożnika $\boldsymbol{p}$ dla zastrzału, zakres wartości siły $\boldsymbol{F}$, który nie przekroczy wartości krytycznych, wynosi 0 – 9880 kN w przypadku modułu $\mathbf{1}\ \boldsymbol{m} \times \mathbf{1}\boldsymbol{m} \times \mathbf{1}\ \boldsymbol{m}$.

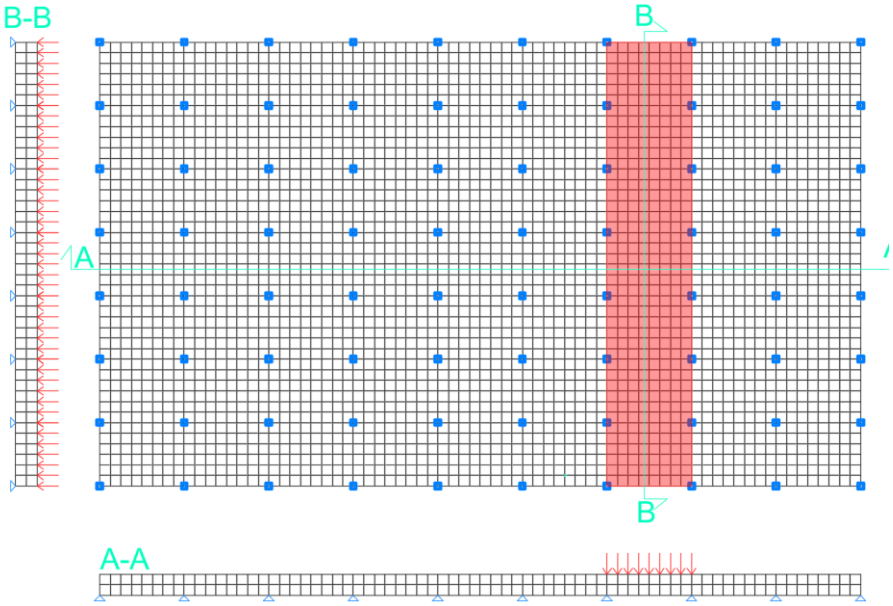
6.3. Wzmocnienie przy użyciu szkieletu wewnętrznego

Struktury adaptowalne charakteryzują się zdolnością do reagowania na zmienne warunki eksploatacyjne, odpowiadając zarówno na sytuacje wyjątkowe (takie jak: gwałtowna śnieżyca, wichura, zniszczenie elementów konstrukcji), jak i na sytuacje, które mogą się wielokrotnie powtarzać w cyklu życia struktury, czyli działania związane utrzymaniem techniczny, konstrukcji lub tymczasowym mocowaniem elementów ozdobnych lub funkcjonalnych do konstrukcji. W niniejszych analizach przygotowano cztery możliwe przypadki wykorzystania struktury adaptowalnej przystanku tramwajowego. W badaniach każdego z przypadków zdecydowano się na podstawowe wzmocnienie konstrukcji z siłą

o wartości $F = 50\ kN$, które pozwoli na bezpieczne zwiększanie siły w poszczególnych obszarach wzmocnionych bez ryzyka przekroczenia zakresu stosowalności przyjętego modelu obliczeniowego. W obszarach wzmocnionych zastosowano wartości siły $F = \{100\ kN, 200\ kN, 400\ kN\}$, co odpowiada współczynnikowi $r_\sigma = \{2{,}4{,}8\}$.

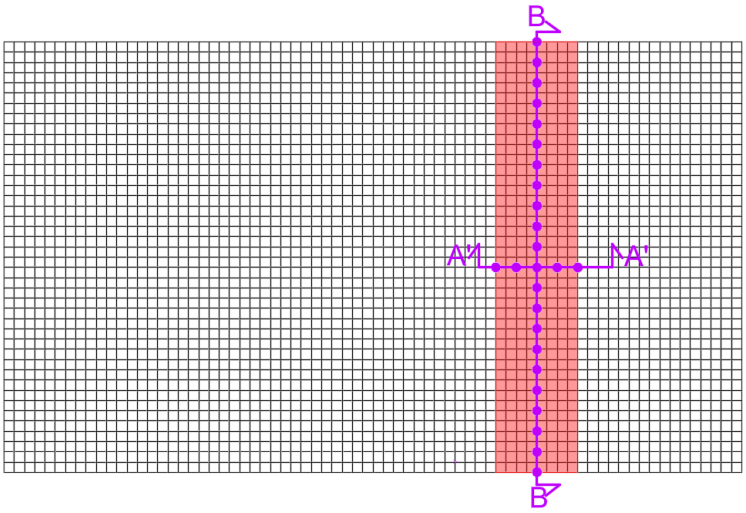
6.3.1. Wzmocnienie pasa modułów – Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu

Jednym z najczęściej spotykanych przypadków wykorzystania wzmocnienia adaptacyjnego jest możliwość użycia go w przypadku działań związanych z utrzymaniem technicznym konstrukcji – pracownik poruszający się po zadaszeniu może zrzucać śnieg znajdujący się na nim, naprawiać elementy struktury lub je wymieniać. W takim przypadku wymagane byłoby tymczasowe wzmocnienie konstrukcji na ścieżce po której porusza się pracownik techniczny – może być to na przykład pas pojedynczych modułów lub określony obszar pomiędzy słupami. W poniższej analizie wzmocniony zostanie pas modułów znajdujący się pomiędzy dwoma rzędami słupów przedstawiony jak na Rys. 6.6. W przypadku tej analizy założone zostanie obciążenie rozłożone równomiernie na wybranym pasie modułów. Założono przeciętne obciążenie pracownika ze sprzętem jako $P = 120\ kg \cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 1177N = 1{,}177\ kN$. Jest to obciążenie przyjmowane na każdy pojedynczy moduł.



Rysunek 6.6 Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory.

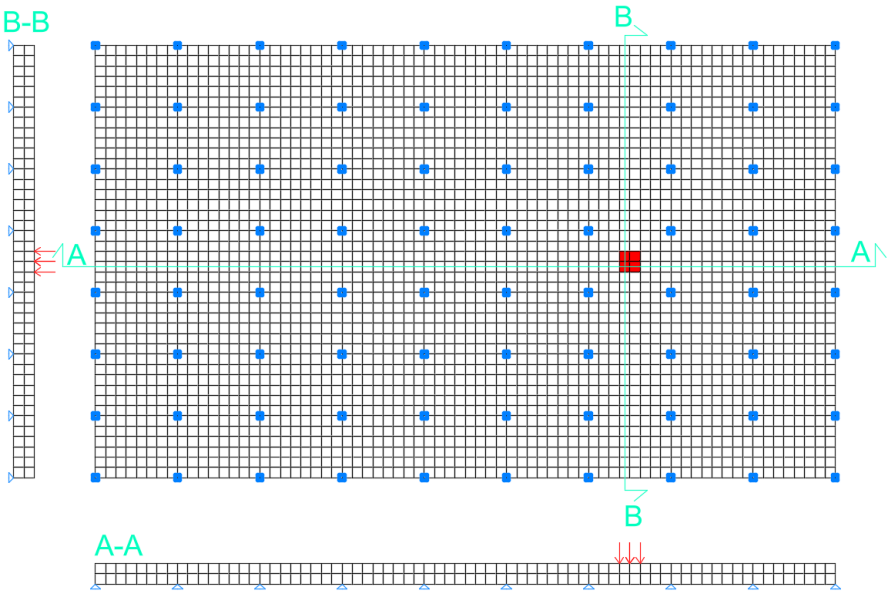
Wyniki analiz zostały przedstawione w formie linii ugięcia górnej powierzchni w kierunku pionowym (osi Z), na liniach przekrojów oznaczonych na Rys. 6.7. Linie zostały umieszczone na środku rozpiętości pomiędzy dwoma liniami podparć za pomocą słupów – są to obszary z największymi ugięciami.



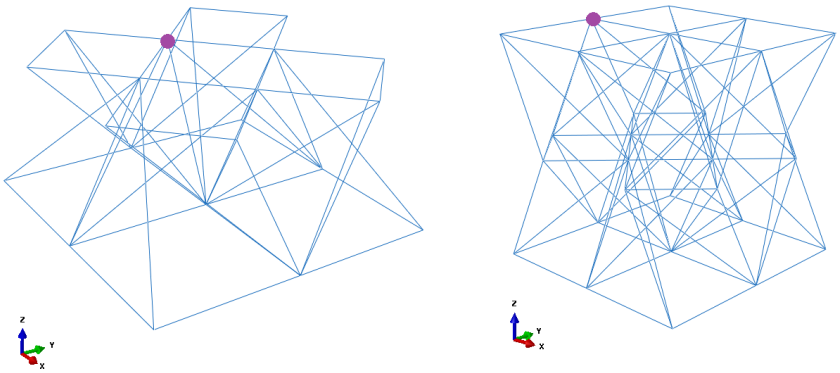
Rysunek 6.7 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu – w przypadku struktury dwuwarstwowej.

6.3.2. Wzmocnienie pojedynczych modułów – Przypadek pracownika stojącego w miejscu

Kolejnym przypadkiem związanym ze wzmacnianiem obszarowym i pracami związanymi z utrzymaniem technicznym konstrukcji jest pracownik stojący w jednym miejscu (na jednym z modułów), który dokonuje prac naprawczych. W tym przypadku założono zwiększone obciążenie o wartości $P = 150\ kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 1471{,}5\ N = 1{,}4715\ kN$, modelujące przypadek obciążenia masą pracownika oraz sprzętem. W poniższej analizie wzmocnione zostaną pojedyncze moduły znajdujące się pomiędzy dwoma rzędami słupów przedstawiony jak na Rys. 6.8. Wyniki analiz zawierają informacje o ugięciach pojedynczych punktów górnej powierzchni oznaczonych na Rys. 6.9. Informacje zebrane w analizach to przemieszczenia w kierunku pionowym (osi Z).



Rysunek 6.8 Przypadek pracownika stojącego w miejscu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory.

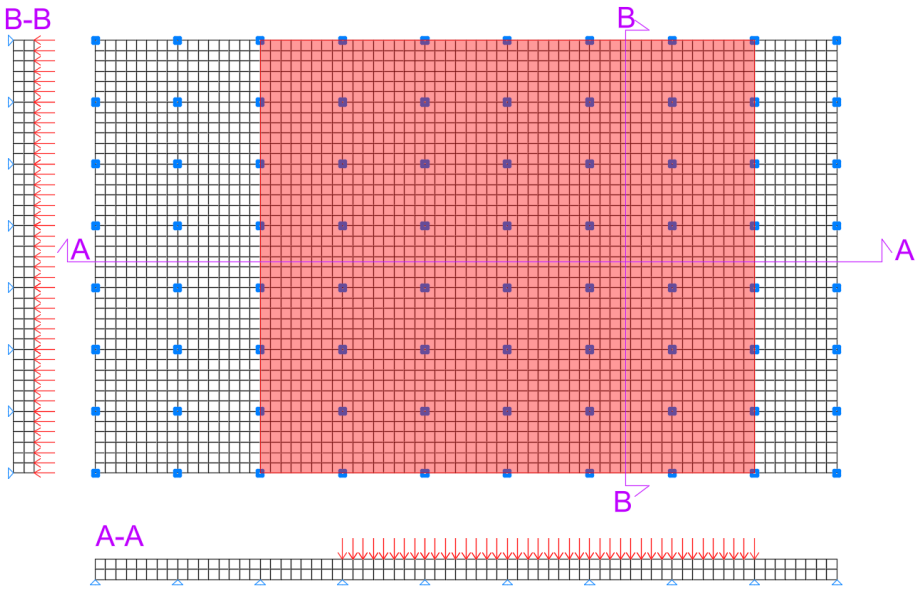


Rysunek 6.9 Widok izometryczny wzmocnionych modułów z oznaczeniem punktu odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku pracownika stojącego w miejscu – w przypadku struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej).

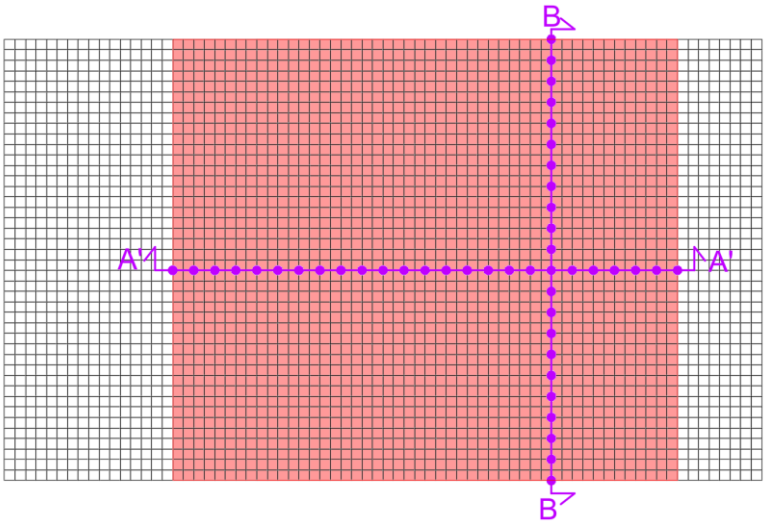
6.3.3. Wzmocnienie obszarowe – Przypadek zalegającego śniegu

Następnym przypadkiem adaptowalnego wzmocnienia jest wykorzystanie go w przypadku gwałtownych zmian atmosferycznych – takim przykładem analizowanym w niniejszej pracy jest przypadek zalegania mokrego śniegu na części konstrukcji. Takie podejście pozwoli na przedłużenie czasu oczekiwania na zrzucenie śniegu, przy jednoczesnym zachowaniu bezpieczeństwa użytkowania konstrukcji. Zgodnie z informacją znalezioną w (inzynierbudownictwa.pl 2011), średni ciężar mokrego śniegu wynosi około $4\ kN/m^3$. Założono warstwę grubości 10 cm ($q = 0{,}4\ kN/m^2$) rozłożoną na powierzchni przedstawionej na Rys. 6.10, w analizach wprowadzone zostały już przeliczone pojedyncze siły węzłowe. Wyniki analiz zawierają informacje o ugięciach punktów górnej powierzchni (oznaczonych na liniach

przekrojów jak na Rys. 6.11) w kierunku pionowym (osi Z). Linie zostały umieszczone na środku rozpiętości pomiędzy dwoma liniami podparć za pomocą słupów.



Rysunek 6.10 Przypadek zalegającego śniegu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory.

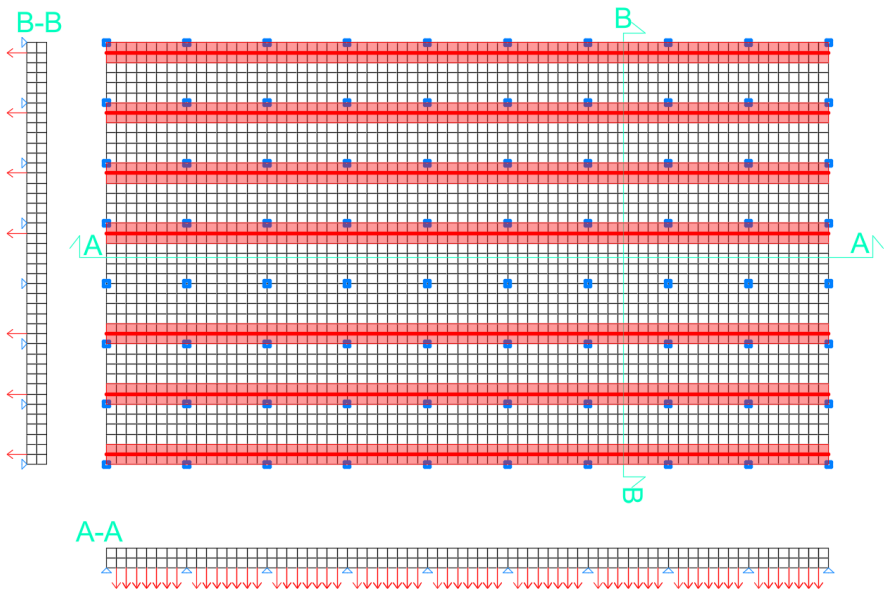


Rysunek 6.11 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku zalegającego śniegu – w przypadku struktury dwuwarstwowej.

6.3.4. Wzmocnienie krawędzi – Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych

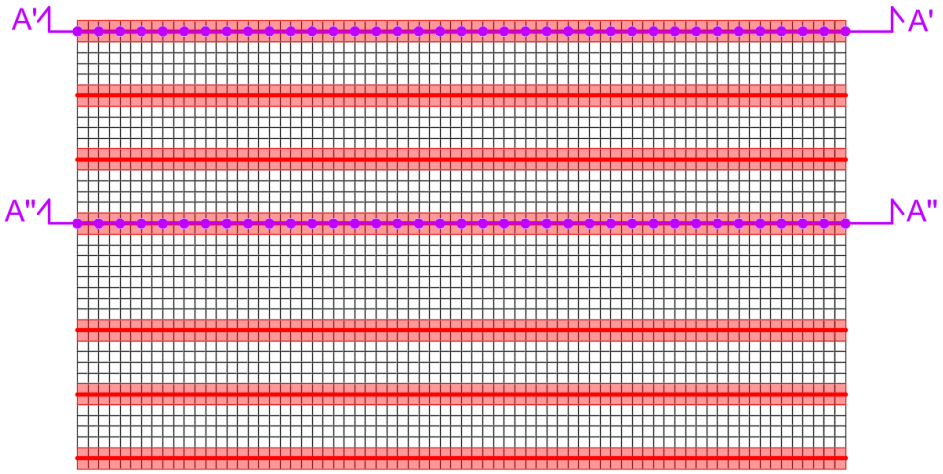
Wśród tymczasowych obciążeń znajdują się również obciążenia związane z przywieszaniem dekoracji (na przykład dekoracji bożonarodzeniowych) lub innych tymczasowych instalacji na konstrukcji przystanku. W takim przypadku obciążenie może

znajdować się w dolnej części struktury, na jej krawędziach lub nad peronami. Na podstawie analiz sklepów sprzedających dekoracje świąteczne (m.in. (my-christmasdecoration.shop 2025)) ustalono, że przeciętnie dekoracja świąteczna ma masę od 10 do 15 kg, przy większych konstrukcjach masa ta może wynosić do 20 kg, do tego należy również doliczyć masę elementów montażowych – około 3 kg. Warto również wziąć pod uwagę, że przy silnym wietrze konstrukcja taka może zwiększyć swoją masę (na co zwraca uwagę wielu producentów). W związku z tym zdecydowano, że pojedyncze obciążenie skupione na pojedynczy węzeł konstrukcji w analizach będzie wynosiło $P = (15\ kg + 3\ kg) \cdot 1{,}3 \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 229{,}5\ N = 0{,}23\ kN$. Siły te będą umiejscowione w dolnych węzłach konstrukcji, na liniach nad peronami, zgodnie z Rys. 6.12.



Rysunek 6.12 Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych - na pomarańczowo oznaczone obszary wzmocnień, pogrubioną pomarańczową linią – linia obciążenia, na niebiesko podpory.

Wyniki analiz zawierają informacje o ugięciach punktów dolnej powierzchni w kierunku pionowym (osi Z), punkty wybrano zgodnie z Rys. 6.13. Wybrano dwa główne przekroje – jeden przy krawędzi całej struktury, drugi zaś w środku jej rozpiętości.



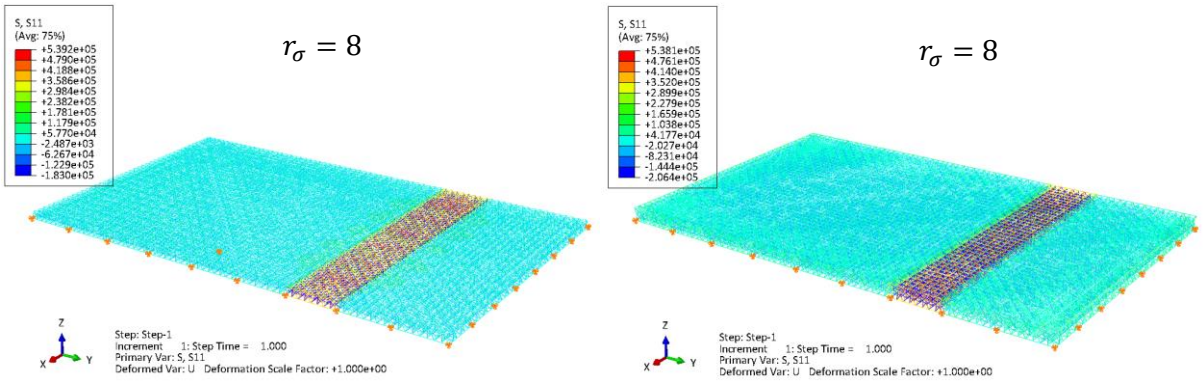
Rysunek 6.13 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku zawieszenia ozdób świątecznych – w przypadku struktury dwuwarstwowej.

6.4. Wyniki

6.4.1. Wzmocnienie pasa modułów – Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu

W celu uzyskania oddzielnych obszarów wzmocnień podzielono całą strukturę na dwa zestawy elementów – wzmocnionych i niewzmocnionych, wewnątrz nich wydzielono zestawy poszczególnych rodzajów prętów. Przy wykonywaniu analiz za pomocą polecenia *Initial Conditions* w oprogramowaniu *Abaqus* (*wer. 2018)* wymagane jest (przy wykorzystaniu elementów kratowych) wykonanie dodatkowego kroku, który pozwala na stabilizację naprężeń przed obciążeniem konstrukcji. Jest to zachowanie opowiadające zachowaniu struktury w rzeczywistości – musi być ona wstępnie sprężona, aby można było ją następnie obciążać.

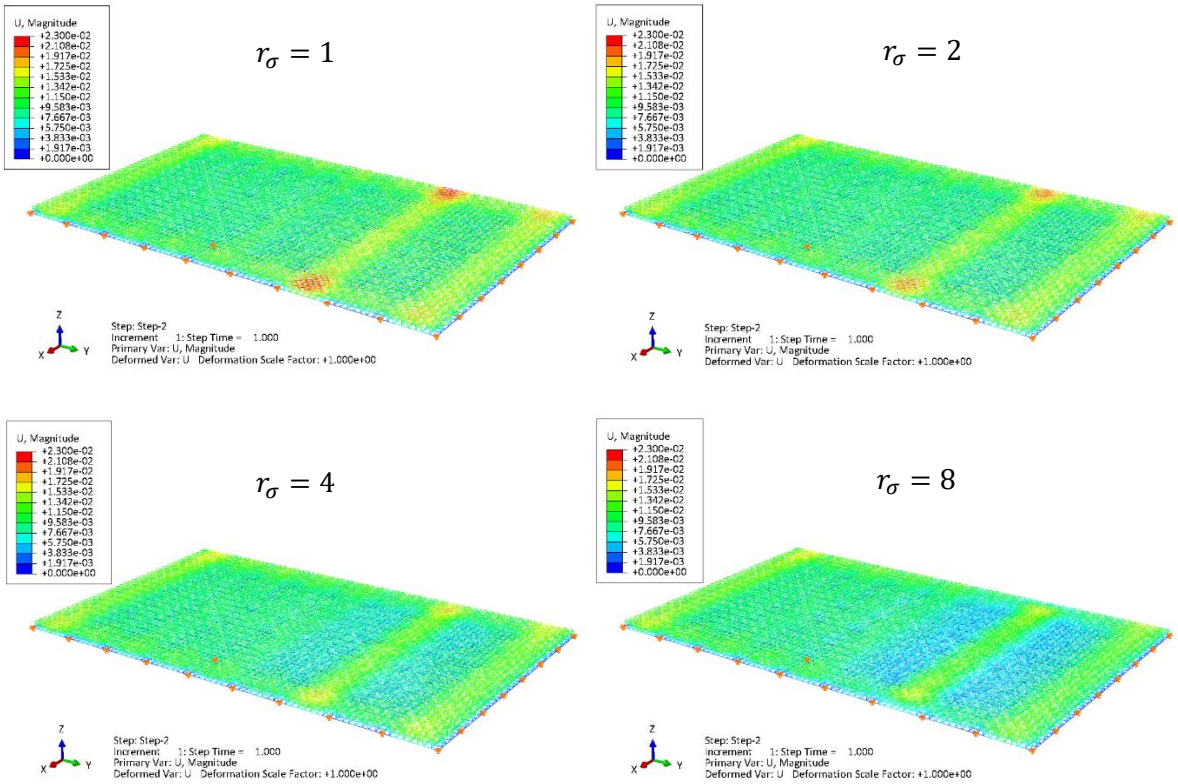
Na Rys. 6.14 przedstawiono mapy naprężeń (S11 – naprężenia wywołane siłami osiowymi) w jednostkach $\boldsymbol{kN/m^2}$, obrazujące wynik sprężenia wstępnego struktury siłami o stosunkach przedstawionych wcześniej w rozdziale. Analiza ta potwierdza, że w wyniku wstępnego sprężenia siłami o różnym współczynniku $\boldsymbol{\sigma}$, naprężenia nie rozpraszają się w całej konstrukcji, w dużej mierze pozostają w wydzielonych obszarach. Analiza ta pozwala również sprawdzić poprawność modelu przed nałożeniem na nie obciążeń.



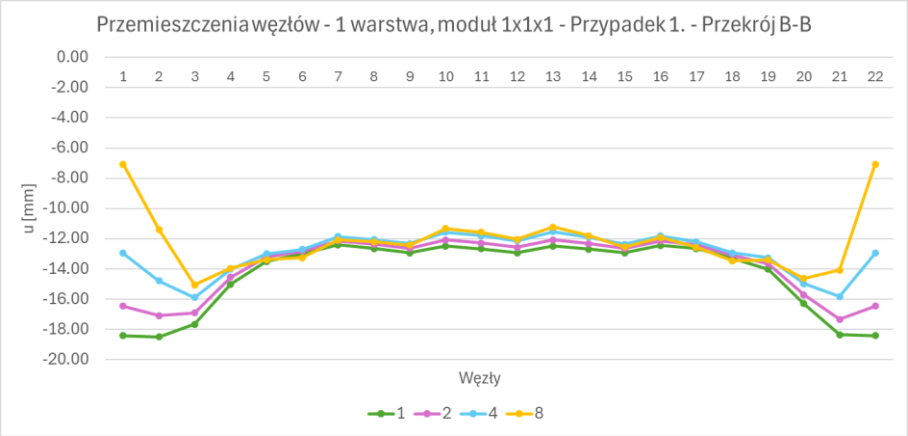
Rysunek 6.14 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu dla współczynnika $r_\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej).

Na Rys. 6.15 przedstawiono mapy wypadkowej wartości przemieszczeń węzłów i prętów struktury jednowarstwowej w jednostkach $\mathbf{m}$. Są one wynikami charakterystycznymi dla tego przypadku (zarówno dla konstrukcji jedno-, jak i dwuwarstwowej). Wyraźnie można zauważyć linię zwiększonego obciążenia, która w miarę zwiększania współczynnika r_σ zanika, co potwierdza zasadność stosowania obciążenia w poszczególnych obszarach. Największe wartości przemieszczeń są zauważalne na krawędziach struktury, wynikające z mniejszej redystrybucji sił (efekt brzegowy). Warto także zauważyć, że wraz ze wzrostem współczynnika r_σ obszary sąsiadujące z obszarem wzmocnionym wykazują zmniejszenie wartości przemieszczeń.

Wprowadzenie wzmacniania strefowego pozwala na zmniejszenie wartości przemieszczeń w wyznaczonych obszarach obciążonych większą wartością siły. W przypadku struktury jednowarstwowej wzmocnienie to jest wyraźniejsze w przypadku węzłów znajdujących się na krawędzi konstrukcji – można to zauważyć zarówno dla przekroju wzdłużnego (przekrój B-B, Rys. 6.16), jak i poprzecznego (przekrój A'-A', Rys. 6.18). Zachowanie to wynika z mniejszej sztywności początkowej struktury, początkowe przemieszczenia w przypadku konstrukcji jednowarstwowej wynoszą w tym przypadku od około 12 mm do ponad 18 mm na krawędziach, w przypadku struktury dwuwarstwowej wartość ta wynosi około 9 mm (Rys. 6.16 oraz Rys. 6.17). Warto również zauważyć, że w przypadku konstrukcji jednowarstwowej widać niewielkie spadki wartości przemieszczeń, które są związane z bliskością słupów w wyznaczonych obszarach. Obserwując Rys. 6.16 i 6.17 można zauważyć, że już sprężenie przy wartości współczynnika $r_\sigma = 4$ pozwala na uzyskanie wartości przemieszczeń analogicznych do wartości pozostałej części struktury.



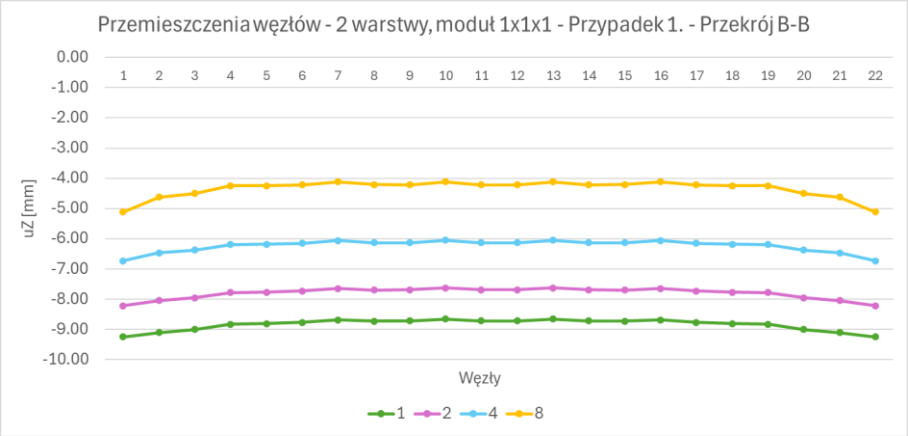
Rysunek 6.15 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe struktury jednowarstwowej w zależności od współczynnika r_σ w przypadku wzmocnienia przy obciążeniu poruszającym się pracownikiem.



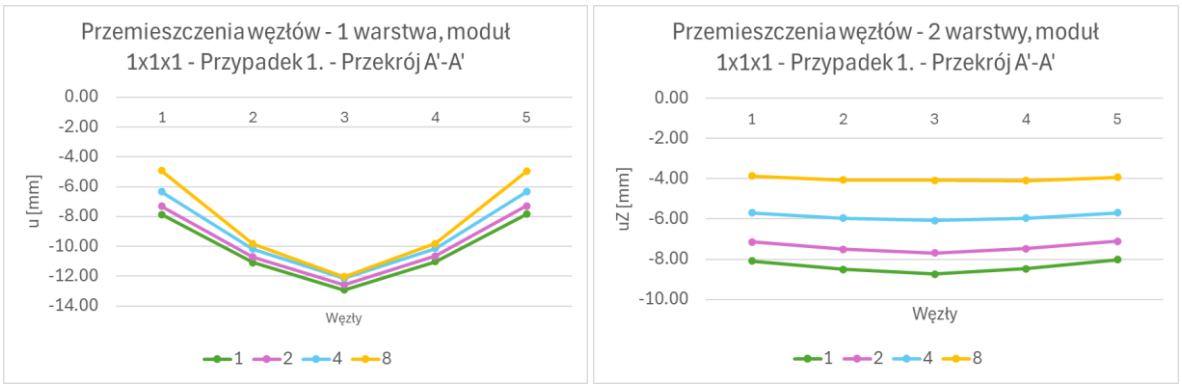
Rysunek 6.16 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu.

W przypadku konstrukcji dwuwarstwowej zauważono, że początkowa linia ugięcia jest znacznie bardziej równomierna, zarówno w kierunku wzdłużnym (przekrój B-B, Rys. 6.17) oraz poprzecznym (przekrój A'-A', Rys. 6.18) – wynika to z większej sztywności struktury. Wzmocnienie wybranej strefy pozwala na zmniejszenie wartości przemieszczeń o około 4 mm w przypadku

zwiększenia wartości współczynnika r_σ z wartości 1 do wartości 8 (ośmiokrotnie większe wzmocnienie obciążonego obszaru). Warto zauważyć, że wzmocnienie rzędu $r_\sigma = 2$ pozwala już uzyskać przemieszczenia o około 1 mm mniejsze, co często może być wystarczające w danym przypadku.



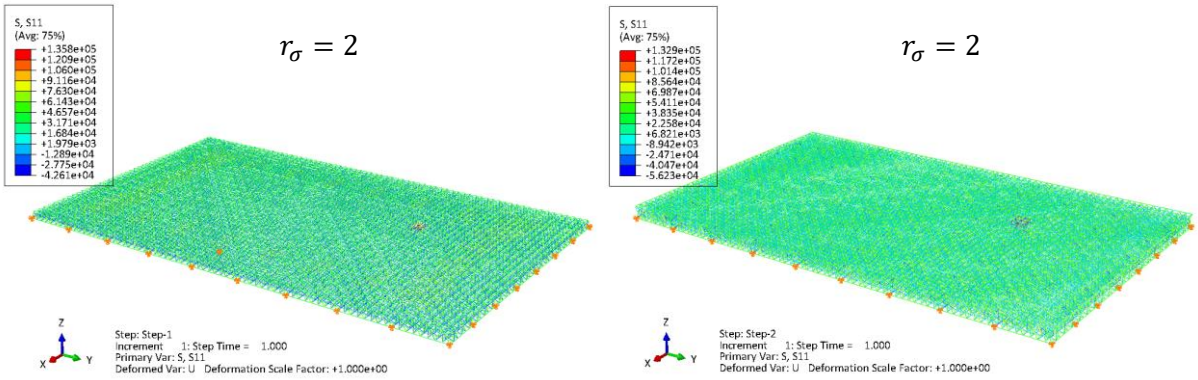
Rysunek 6.17 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu.



Rysunek 6.18 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej) składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu.

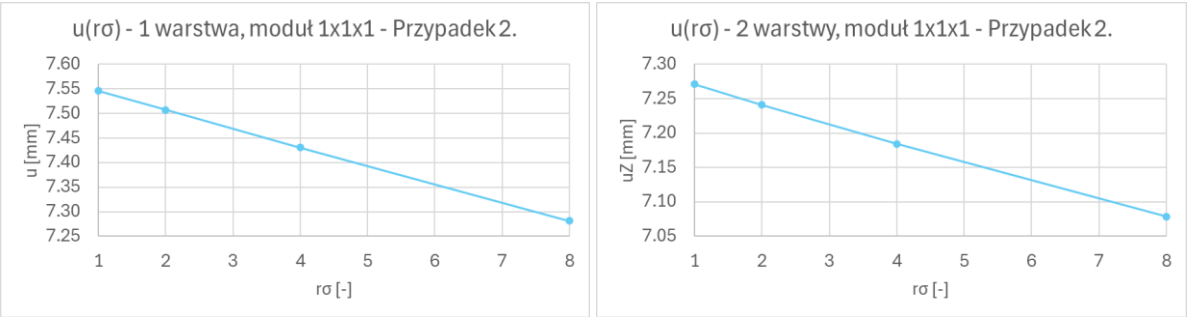
6.4.2. Wzmocnienie pojedynczych modułów – Przypadek pracownika stojącego w miejscu

W przypadku pracownika pracującego w jednym punkcie na dachu zdecydowano się na zamodelowanie wzmocnienia pojedynczego zestawu 4 modułów, znajdującego się na środku przestrzeni pomiędzy słupami podpierającymi strukturę. Na Rys. 6.19 można zobaczyć mapę naprężeń przestawiającą wstępnie sprężoną konstrukcję, z wzmocnionym obszarem, na który przyłożona zostanie dodatkowa siła.



Rysunek 6.19 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku pracownika stojącego w miejscu dla współczynnika $r_\sigma = 2$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej).

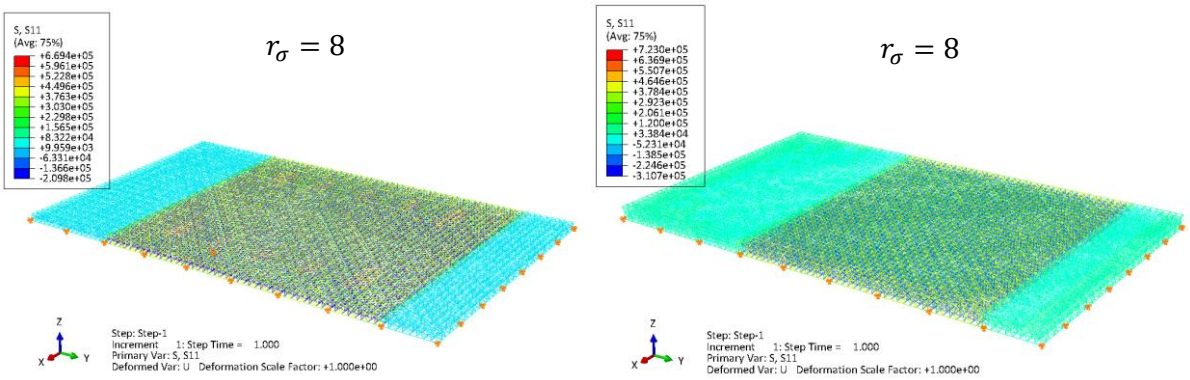
W wyniku wykorzystania wzmocnienia pojedynczych modułów również zauważamy niewielki spadek wartości przemieszczeń – w przypadku struktury jednowarstwowej wzmocnienie ośmiokrotne pozwala na uzyskanie spadku o około 0,25 mm, zaś w przypadku konstrukcji dwuwarstwowej wzmocnienie to jest jeszcze mniejsze i bliskie wartości 0,1 mm (Rys. 6.20). Są to niewielkie wartości i zastosowanie miejscowego wzmocnienia w takim przypadku może być zbyt nieznaczące dla pracy struktury.



Rysunek 6.20 Wykres przemieszczeń węzła w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej) składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika stojącego w miejscu.

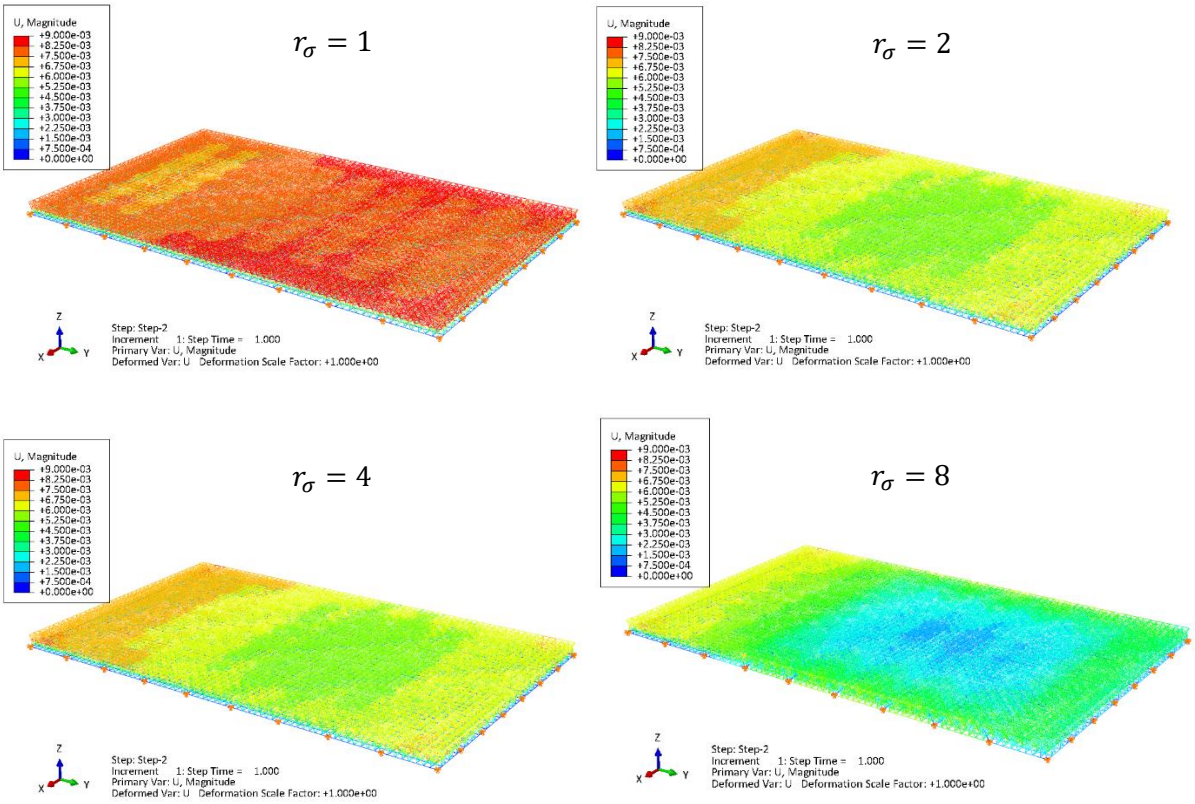
6.4.3. Wzmocnienie obszarowe – Przypadek zalegającego śniegu

Jednym z najczęściej spotykanych przypadków nagłego obciążenia struktury są gwałtowne zjawiska atmosferyczne, jak w analizowanym przypadku – intensywny opad śniegu i jego zaleganie przez dłuższy czas. Na Rys. 6.21 przedstawione są mapy naprężeń (S11) przedstawiające wstępne wzmocnienie konstrukcji na wyznaczonym do analizy obszarze – ponownie, nie zauważono redystrybucji naprężeń w całej strukturze.



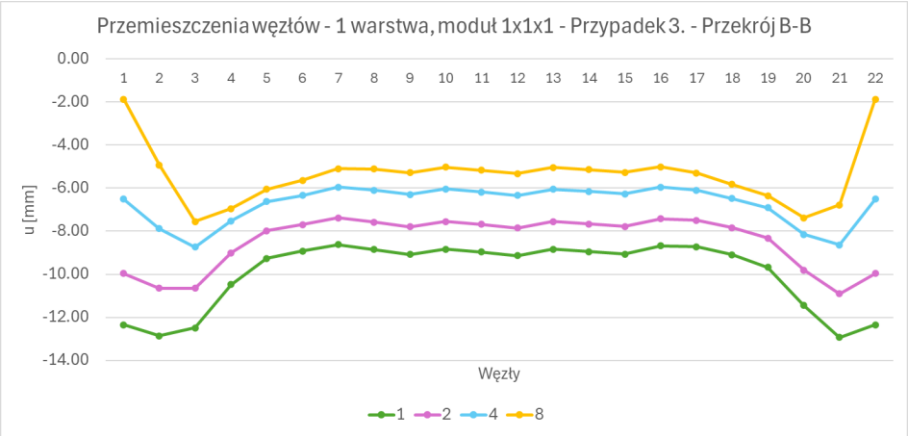
Rysunek 6.21 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku obciążenia zalegającym śniegiem dla współczynnika $r_\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej).

Na Rys. 6.22 przedstawiono mapy przemieszczeń wypadkowych struktury pod wpływem obciążenia zalegającym śniegiem. Już wprowadzenie wzmocnienia z współczynnikiem $r_\sigma = 2$ pozwala na wyrównanie wartości przemieszczeń w całej konstrukcji. Kolejne wzmocnienia pozwalają na zwiększenie sztywności struktury na tyle, aby zmniejszyć przemieszczenia również w obszarach niewzmocnionych.



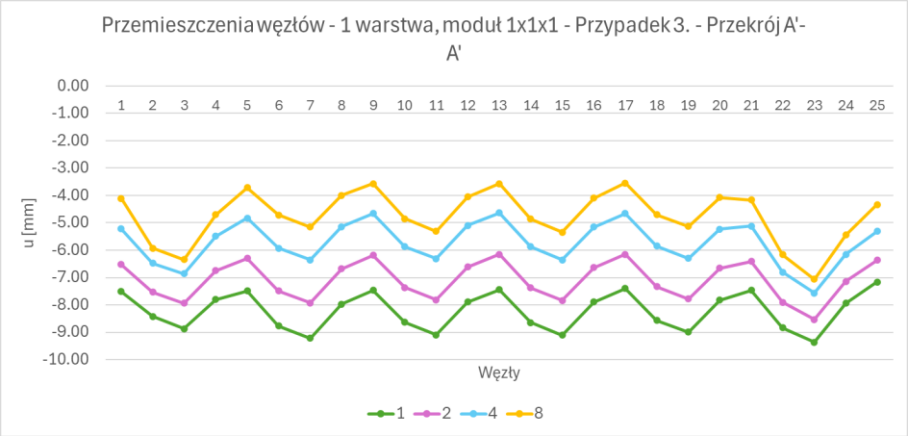
Rysunek 6.22 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe struktury dwuwarstwowej w zależności od współczynnika r_σ w przypadku wzmocnienia pod obciążeniem zalegającym śniegiem.

W przypadku struktury jednowarstwowej możemy ponownie zauważyć skok wartości przemieszczeń na krawędziach płyty pod wpływem wzmocnienia (jak w przypadku wzmacniania pojedynczego pasa) (przekrój B-B, Rys. 6.23). W przypadku wzmocnienia tak dużego obszaru różnice pomiędzy poszczególnymi wynikami dla wzmocnień są znacznie większe – w przypadku przekroju wzdłużnego (B-B) zauważalny jest spadek wartości przemieszczeń na środku rozpiętości od około 9 mm ($r_\sigma = 1$) do około 8 mm ($r_\sigma = 2$) do nawet wartości około 5 mm ($r_\sigma = 8$). Jest to spadek o około 50% wartości początkowych przemieszczeń. Należy jednak zauważyć, że większe wartości współczynnika r_σ (silniejsze wzmocnienie) powoduje również uniesienie się krawędzi struktury – w analizowanym przypadku wzmocnieniem dającym najbardziej równomierną linię ugięć jest wzmocnienie ze współczynnikiem $r_\sigma = 4$, które pozwala na zrównanie wartości przemieszczeń krawędzi ze środkiem rozpiętości.



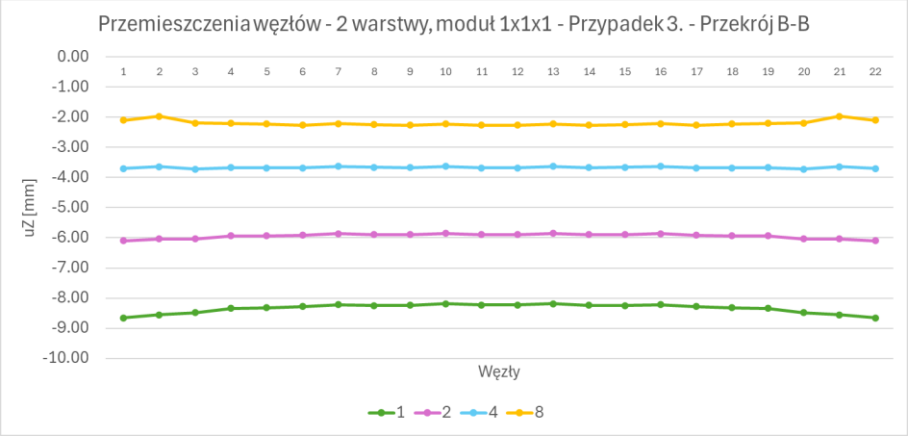
Rysunek 6.23 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu.

W przypadku przekroju A'-A' (Rys. 6.24) w konstrukcji jednowarstwowej widoczne są spadki wartości przemieszczeń w okolicach podparcia przez słupy. W wyniku wzmocnienia w przekroju tym również zauważamy spadek wartości przemieszczeń – od 9 mm ($r_\sigma = 1$) do około 4 mm ($r_\sigma = 8$). W przypadku tego przekroju nie zauważono zwiększonego wypłaszczenia linii ugięcia struktury.



Rysunek 6.24 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu.

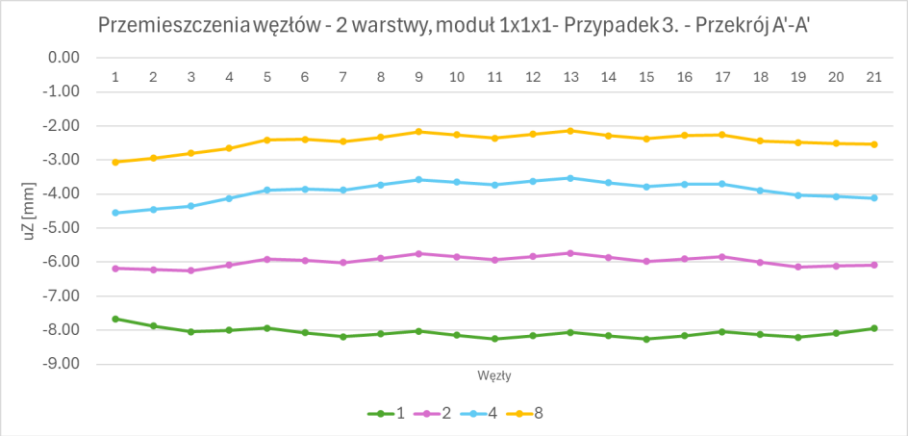
Struktura dwuwarstwowa jest zauważalnie sztywniejszą konstrukcją, co można zauważyć po płaskiej i równomiernej linii ugięcia (przekrój B-B, Rys. 6.25). Warto zauważyć jednak, że w przypadku jednolitego wzmocnienia ($r_\sigma = 1$) krawędzie konstrukcji uzyskują nieznacznie większe wartości przemieszczeń w porównaniu do środka rozpiętości. W przypadku niewielkiego wzmocnienia struktury ($r_\sigma = 2$) zachowanie to zanika i pozwala na uzyskanie równomiernego przemieszczenia wartości około 6 mm (około 66% początkowej wartości) w każdym punkcie przekroju. Zwiększanie wzmocnienia pozwala na znaczny spadek wartości przemieszczeń – od około 9 mm ($r_\sigma = 1$) do około 2 mm ($r_\sigma = 8$) – spadek wartości do około 25% początkowych wartości przemieszczeń.



Rysunek 6.25 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu.

W przekroju A'-A' (Rys. 6.26) zauważalne są skoki wartości przemieszczeń oraz niewielki brak symetrii wynikający z niesymetrycznego obciążenia i wzmocnienia całej struktury. Jednak

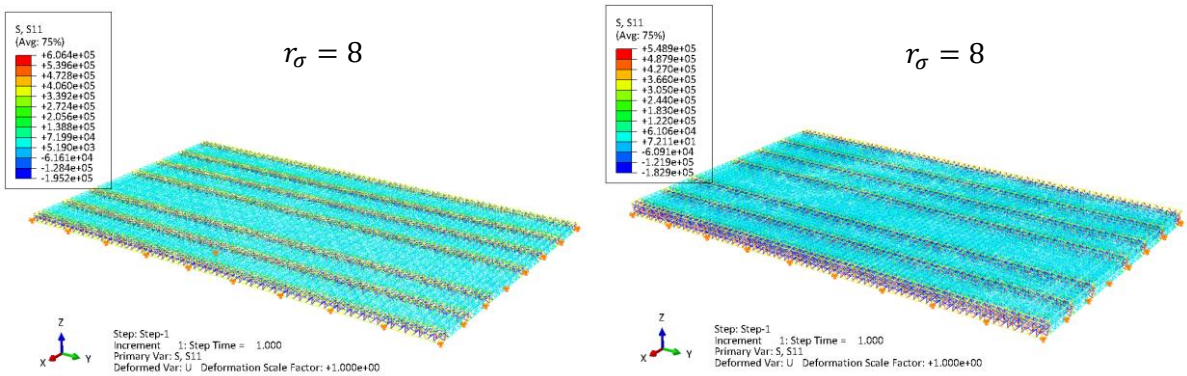
wykorzystanie wzmocnienia rzędu $r_\sigma = 2$ pozwala na wyrównanie tych różnic i uzyskanie niemal jednolitych wartości przemieszczeń. Wraz ze wzrostem wzmocnienia ponownie uzyskujemy różnice pomiędzy wartościami przemieszczeń poszczególnych węzłów, sięgające nawet około 1 mm w przypadku wzmocnienia ze współczynnikiem $r_\sigma = 8$.



Rysunek 6.26 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu.

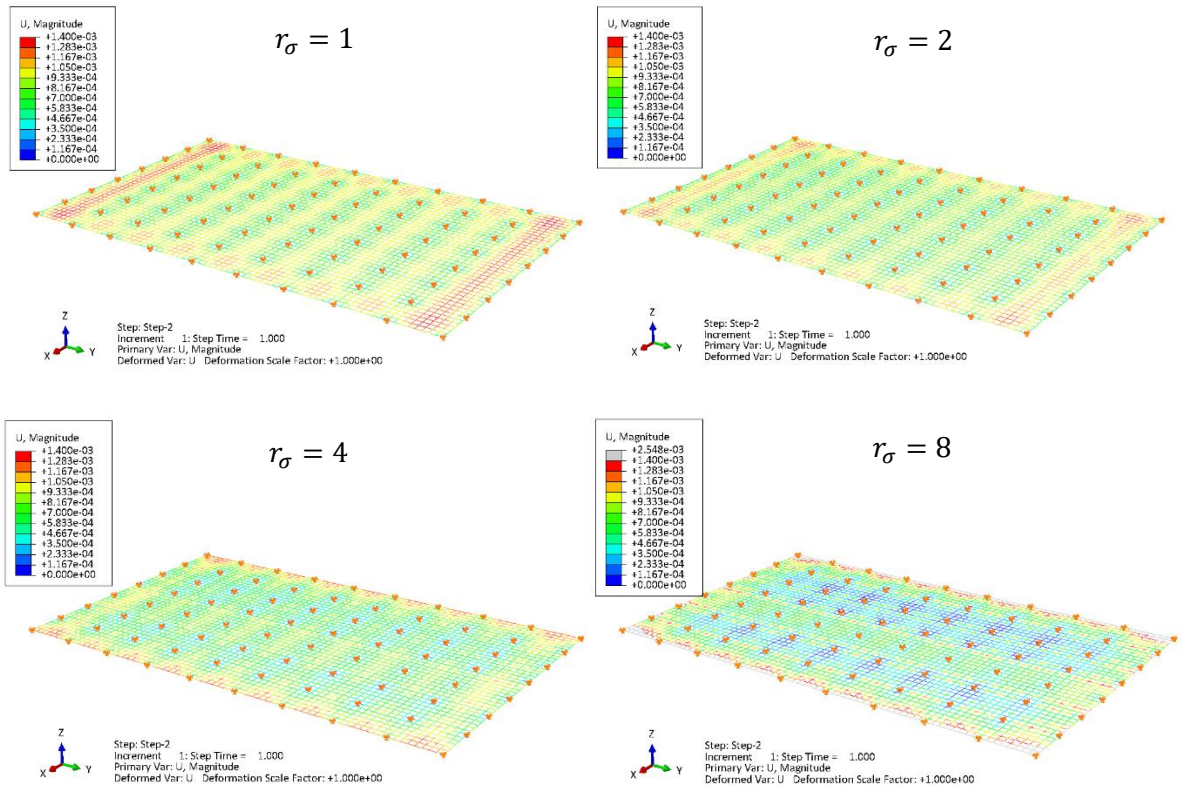
6.4.4. Wzmocnienie krawędzi – Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych

Na Rys. 6.27 przedstawiono naprężenia S11 we wstępnie sprężonej strukturze – analizowane były wzmocnienia dwóch pasów znajdujących się nad linią obciążenia zawieszonymi ozdobami świątecznymi. Również w tym przypadku nie zauważono redystrybucji naprężeń.



Rysunek 6.27 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku obciążenia ozdobami świątecznymi dla współczynnika $r_\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej).

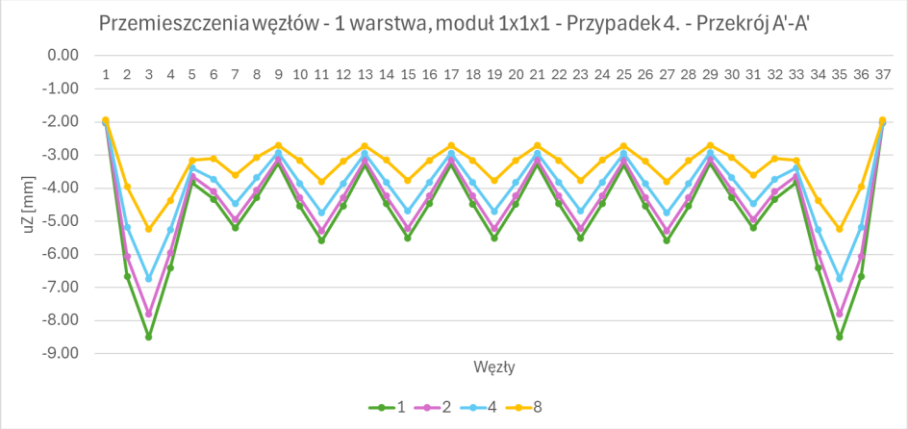
Ze względu na większe rozstawy słupów w kierunku Y (8 m) niż w kierunku X (6 m) zauważalne są większe ugięcia w kierunku poprzecznym, mimo obciążenia w kierunku podłużnym. Pod wpływem wzmocnienia konstrukcji współczynnikiem $r_\sigma = 2$ oraz $r_\sigma = 4$ zauważono już wystarczające wzmocnienie pozwalające na wyrównanie wartości przemieszczeń w dolnej powierzchni struktury. W przypadku użycia zwiększonej wartości przemieszczeń ($r_\sigma = 8$) zauważono, że krawędzie konstrukcji zaczęły się unosić w znacznym stopniu, zaś w niektórych obszarach pomiędzy słupami pojawiły się miejsc gdzie struktura osiąga przemieszczenia wypadkowe bliskie $0\ m$.



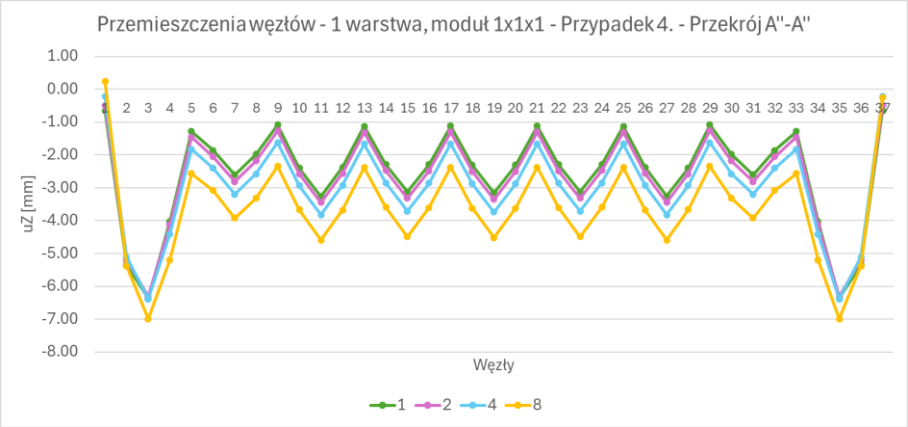
Rysunek 6.28 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe dolnej powierzchni struktury dwuwarstwowej w zależności od współczynnika r_σ w przypadku obciążenia ozdobami świątecznymi.

W przypadku analizy struktury jednowarstwowej zauważono rozbieżność zachowania konstrukcji w badanych przekrojach – w przypadku przekroju A'-A' (Rys. 6.29) zauważalne jest zwiększenie sztywności i zmniejszenie wartości przemieszczeń pionowych pod wpływem zwiększenia współczynnika r_σ, zaś w przypadku przekroju A''-A'' (Rys. 6.30) zauważalne jest zachowanie odwrotne – wzrost wzmocnienia wybranego obszaru powoduje wzrost wartości przemieszczeń. W obu przypadkach zauważono zmniejszenie wartości przemieszczeń na linii podpór struktury. W przypadku przekroju A''-A'' analizowano również przypadek poszerzenia

obszaru wzmocnienia o dodatkowy pas modułów oraz zmiany wartości współczynnika r_σ – w żadnym z przypadków nie doszło do zmiany zachowania konstrukcji. Biorąc pod uwagę umiejscowienie przekroju A'-A' (przekrój A''-A'' znajduje się w pasie znajdującym się na środku rozpiętości struktury, zaś przekrój A'-A' na jej krawędzi) założono, że na obszar ten działają dodatkowe siły krawędziowe pozwalające uzyskać spadek wartości przemieszczeń. W związku z tym, w analizowanym przypadku należy przyjąć, że konstrukcja jednowarstwowa jest niewystarczająco sztywna, aby móc być wykorzystaną w opisywanym przypadku.



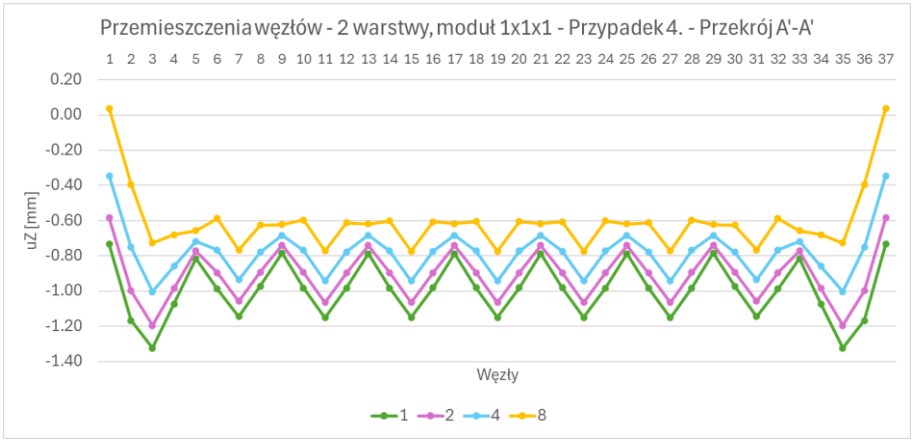
Rysunek 6.29 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych.



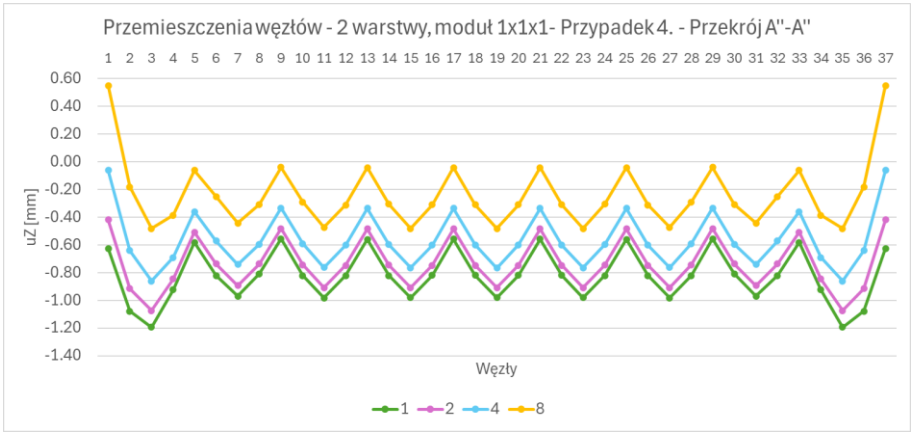
Rysunek 6.30 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A''-A'' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych.

W przypadku wykorzystania struktury dwuwarstwowej w przypadku obu przekrojów (A'-A' – Rys. 6.31 oraz A''-A'' – Rys. 6.32) zauważalny jest spadek wartości przemieszczeń pionowych pod wpływem wzmacniania obszarów znajdujących się nad węzłami obciążonymi. Analogicznie jak w przypadku konstrukcji jednowarstwowej, zauważalne są skoki wartości przemieszczeń

w liniach podpór (słupów). Wartości przemieszczeń węzłów pod obciążeniem siłami od ozdób świątecznych są znacznie mniejsze w przypadku struktury dwuwarstwowej (około 1 mm w przypadku braku wzmocnienia) w odniesieniu do konstrukcji jednowarstwowej (około 5 mm w przypadku braku wzmocnienia), również widoczna jest mniejsza amplituda wartości pomiędzy obszarami na linii podpór i poza nią. W wyniku tak małej wartości początkowej przemieszczeń, wzmocnienie ze współczynnikiem $r_\sigma = 8$ powoduje już znaczne uniesienie się krawędzi struktury, w przypadku przekroju A''-A'' ponad płaską powierzchnię konstrukcji. Podobnie jak w przypadkach związanych z obciążeniem pojedynczych modułów wzmacnianie struktury nie ma aż tak istotnego znaczenia w tym przypadku, w szczególności w przypadku obszarów krawędziowych.



Rysunek 6.31 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych.



Rysunek 6.32 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A''-A'' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem r_σ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych.

6.5. Podsumowanie

Adaptowalne struktury tensegrity mogą być wykorzystywane w licznych rozwiązaniach i konstrukcjach, w szczególności tych o znaczących walorach estetycznych i architektonicznych. Wśród najpopularniejszych znajdują się konstrukcje wolnostojące oraz tymczasowe, jak na przykład pawilony wystawowe, wiaty przystankowe, sceny koncertowe.

Wzmacnianie adaptacyjne takich konstrukcji może pozwolić na optymalne wykorzystanie materiału oraz zdolności nośnych poszczególnych elementów. Ponadto ogranicza to lokalne koncentracje naprężeń, zmniejszając nadmierne akumulowanie energii odkształcenia sprężystego, które prowadzi do zniszczeń zmęczeniowych. Takie podejście pozwala również na użytkowanie konstrukcji w warunkach nieprzewidzianych i nietypowych, a także wymagających tylko czasowego wzmocnienia. Dzięki temu uzyskujemy dostosowanie się w pełni otaczających warunków i uzyskujemy możliwość ochrony struktury w sytuacji zagrożenia, taki jak częściowe uszkodzenie elementów nośnych lub nagłe, gwałtowne opady atmosferyczne.

Wyniki analiz pozwalają zauważyć, że wzmacnianie adaptacyjne może być wykorzystane w wyżej opisanych warunkach i ma ono szczególne znaczenie w przypadku obciążania dużych powierzchni w konstrukcji, szczególnie przy obciążeniu asymetrycznym, które znacznie mocniej wpływa na odpowiedź konstrukcji. W przypadku obciążania pojedynczych węzłów lub modułów za pomocą niewielkiej siły wzmocnienie to nie ma aż tak istotnej roli. Kluczowy jest tutaj również wybór typu konstrukcji, gdyż wzmacnianie pozwala uzyskać lepsze rezultaty w przypadku struktur o mniejszej sztywności globalnej (konstrukcje jednowarstwowe), jednak nie zawsze zapewnia to korzystny efekt, czego przykładem jest omawiany przykład obciążenia poprzez ozdoby świąteczne. Zagadnienie to z pewnością wymaga jeszcze wielu analiz pozwalających na znalezienie najlepszych rozwiązań, jednak obserwując wyniki można stwierdzić, że adaptowalne struktury tensegrity mogą być wykorzystywane w rozlicznych przypadkach.

Część III – Metamateriały tensegrity o cechach auksetycznych

7. Struktury auksetyczne tensegrity

7.1. Materiały auksetyczne

Zachowanie materiału w stanie rozciągania lub ściskania określa współczynnik Poissona, który definiuje się jako:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}, \tag{7.1.}$$

gdzie:

$\varepsilon_{\perp}$ - odkształcenie prostopadłe do kierunku obciążenia (poprzeczne),

$\varepsilon_{\parallel}$ - odkształcenie w kierunku obciążenia (wzdłużne).

Ponieważ jest to powszechne, a nawet intuicyjne, że $\varepsilon_{\perp}$ i $\varepsilon_{\parallel}$ mają przeciwne znaki, tzn. proporcja $\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$ byłaby ujemny, wprowadzono znak minus w równaniu (7.1.), aby uzyskać dodatnie wartości współczynnika Poissona (Lim 2015).

Powszechnie zakłada się, że jeżeli materiał jest rozciągany w jednym z kierunków to w kierunku poprzecznym do obciążenia dojdzie do skurczenia (Rys. 7.1) – zachowanie to opisuje dodatnia wartość współczynnika Poissona. Zachowanie to zauważył i opisał już w 1807 roku Young, zaś Poisson w roku 1827 na podstawie teorii oddziaływań molekularnych wyprowadził stałą wartość $\nu = \frac{1}{4}$ dla przypadku pręta mosiężnego (Lim 2015). Inspirując się obydwoma naukowcami w kolejnych latach zmierzono współczynnik Poissona dla szkła, zaś w 1859 roku Kirchhoff otrzymał wartości współczynnika Poissona dla metali na podstawie pomiaru modułu Younga i modułu Kirchhoffa, wypowadzając zależność:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu), \tag{7.2}$$

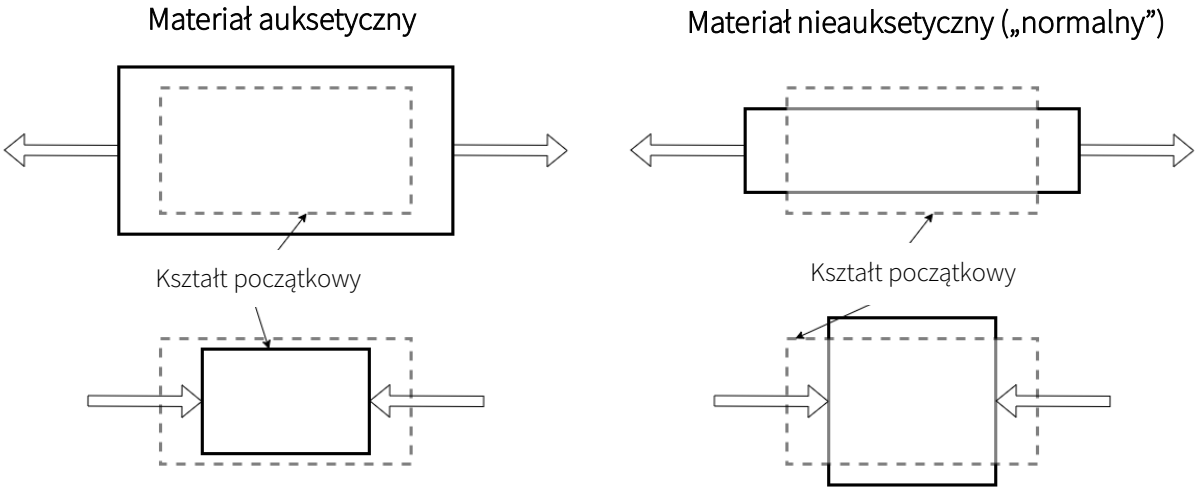
gdzie:

E – moduł Younga,

G – moduł Kirchhoffa (moduł ścinania).

Pomiary współczynnika Poissona wykonywane przez kolejne stulecia stanowią podstawę eksperymentalną potwierdzającą, że współczynnik Poissona nie jest wielkością stałą, lecz zmienia się w zależności od materiału. W roku 1848 Saint-Venant zasugerował, że współczynnik Poissona w ciałach anizotropowych może być ujemny oraz może przekraczać wartość $\frac{1}{2}$. Dopiero w drugiej połowie XX wieku Fung na podstawie matematycznej teorii sprężystości, wyznaczył przedziały współczynnika Poissona jako $-1 \leq \nu \leq 0{,}5$ dla ciał izotropowych poprzez ograniczenia termodynamiczne nałożone na konstytutywne równania ciał sprężystych. W późniejszych latach zostały przedstawione eksperymentalne dowody na istnienie ujemnego współczynnika Poissona m.in. w tkankach biologicznych, pirytach oraz monokryształach. Wraz z rozwojem sprzętu komputerowego pojawiły się również liczne symulacje obliczeniowe potwierdzające możliwość zbudowania materiału o takich cechach. Termin „auksetyczny" został wprowadzony przez Evansa w ostatniej dekadzie XX wieku dla określenia ujemnego współczynnika Poissona (Lim 2015).

Materiały auksetyczne definiuje się jako ciała stałe, które wykazują ujemny współczynnik Poissona (Lim 2015). Kiedy materiały auksetyczne są rozciągane w jednym kierunku, rozszerzają się w kierunku poprzecznym do kierunku obciążenia, co przedstawiono na Rys. 7.1.



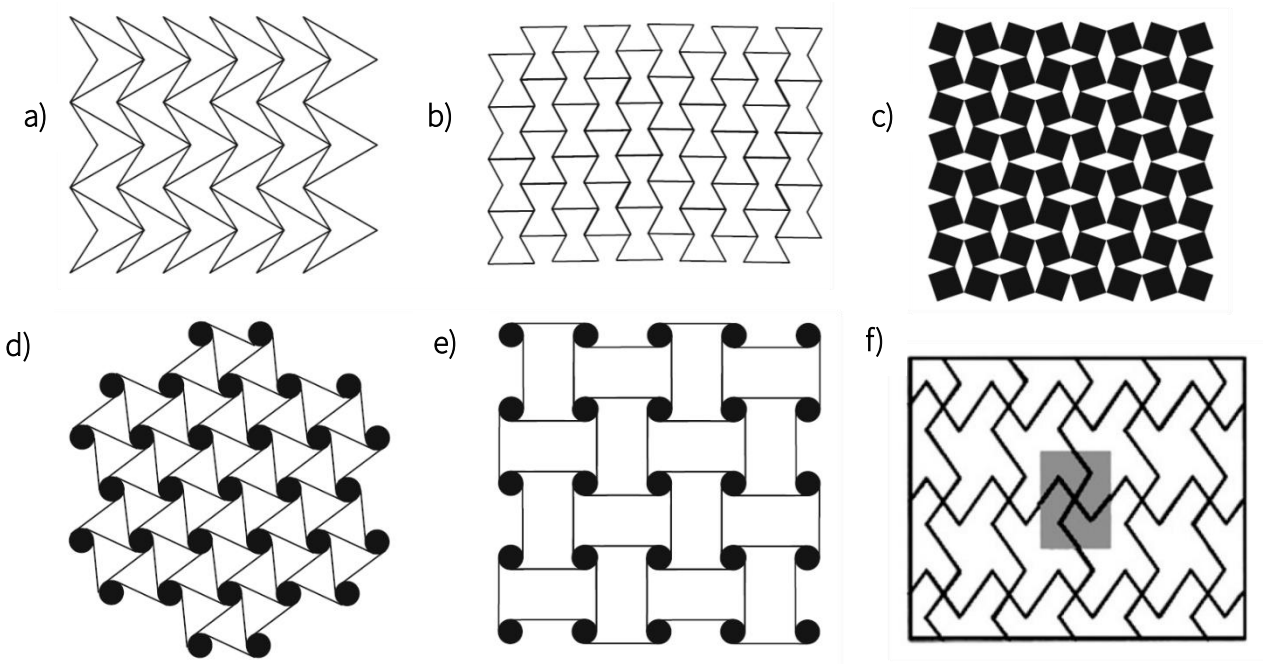
Rysunek 7.1 Zachowanie materiału auksetycznego i nieauksetycznego pod wpływem rozciągania i ściskania (rysunek na podstawie (Lim 2015), opracowanie własne).

Materiały auksetyczne wydają się nieintuicyjne z perspektywy codziennych obserwacji, mimo to jednak istnieją w naturalnym środowisku. Przykładem jest polimorf dwutlenku krzemu

(w strukturze α-krystobalitu), który został przedstawiony w 1992 roku, a jego średni współczynnik Poissona obliczono jako -0,16 (Lim 2015). W późniejszych latach odkryto, że również α-kwarc, krystaliczna forma krzemionki, również będzie wykazywać ujemny współczynnik Poissona pod dużym jednoosiowym rozciąganiem. Istnieją również badania potwierdzające, że monokryształy pirytu wykazują zachowanie auksetyczne. Badania wskazują, że auksetyczne zachowanie w naturalnym środowisku często wymaga bardzo specyficznej kierunkowości krystalicznej — to znaczy, że tylko w określonych kierunkach przez konkretny kryształ lub strukturę uzyskuje się ujemny Poissona (Ji, Li et al. 2018). Wśród naturalnych materiałów auksetycznych wymienia się również (często potencjalnie) wymienia skórę krowy (Hillerton 1991), kość gąbczastą (Williams, Lewis 1982), a także materiały jutowe i konopne (Williams, Lewis 1982). Niektóre materiały wykazują cechy auksetyczne pod wpływem odpowiedniej obróbki – takim przykładem są pianki (Lim 2015). Pianki auksetyczne mogą być wytwarzane przez ściskanie kawałka pianki we wszystkich trzech kierunkach, a następnie umieszczenie jej w formie i podgrzanie do temperatury powyżej temperatury uplastycznienia polimeru. Istnieje również auksetyczna przędza, którą wytwarza się używając dwóch rodzajów włókien: nierozciągliwego włókna o mniejszej średnicy, nawiniętego spiralnie wokół elastycznego włókna o większej średnicy, a także auksetyczny materiał polimerowy.

Jednak nadal najpopularniejszymi materiałami auksetycznymi są wytwarzane przez człowieka komórkowe materiały, najczęściej generowane za pomocą wytwarzania przyrostowego. Są to materiały, w których pojawiają się wielokrotnie te same komórki, tworząc nieskończoną strukturę. Najpopularniejszymi i pierwszymi komórkami, które były analizowane są komórki płaskie, wśród których znajdziemy rodziny komórek. Jedną z nich są komórki w kształcie grota strzały (*double arrowhead*) (Rys. 7.2a) (Dadashi, Nedjad et al. 2025), a także najpopularniejsza i wykorzystywana wielokrotnie jako bazowe rozwiązanie komórka dwuwymiarowych komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) (Rys. 7.2b). Popularne są również materiały opierające się na mechanizmach obrotu – tutaj najpopularniejsze są komórki składające się z obracających się kwadratów, trójkątów lub prostokątów, które są połączone wierzchołkami i w początkowym (nieobciążonym) układzie posiadają przestrzenie pozwalające na ruch (Rys. 7.2c), a także tzw. komórki chiralne, które „zawijają się" wokół wspólnych węzłów - pierścieni (Rys. 7.2d, 7.2e). Model z brakującym żebrem (*missing rib model*) został

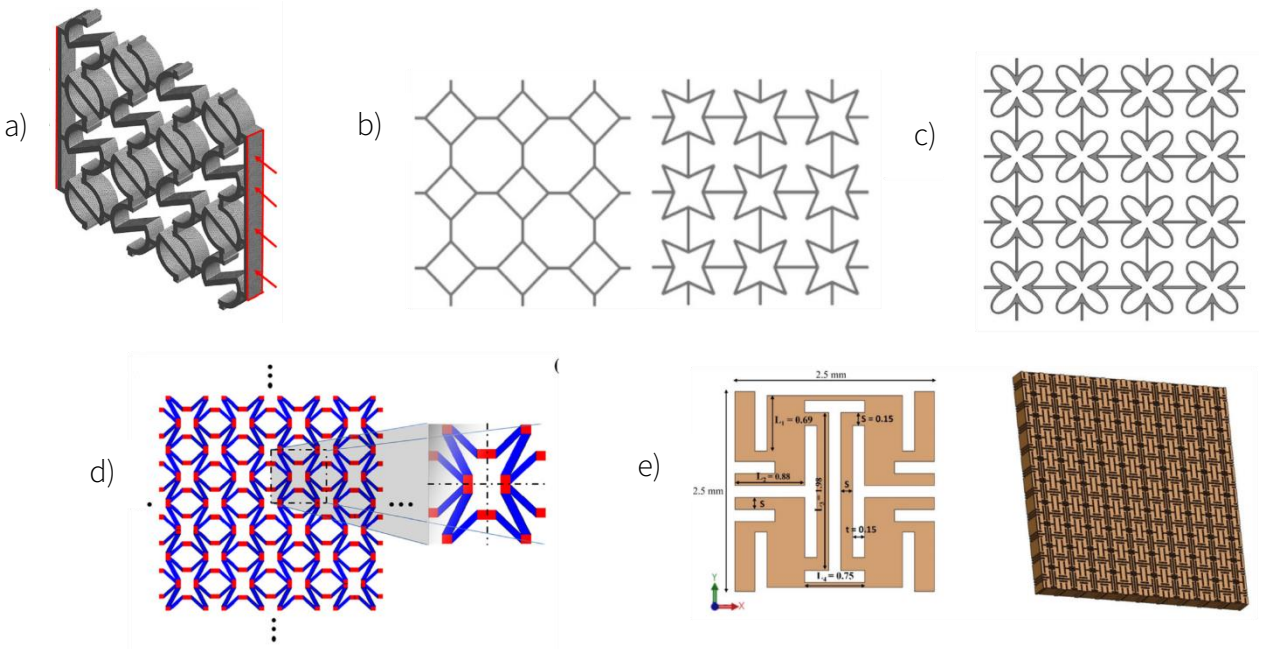
zaproponowany do modelowania właściwości sprężystych pianek auksetycznych. Nosi on taką nazwę, ponieważ jego zidealizowana mikrostruktura wynika z modelu nieuszkodzonego (który jest konwencjonalny), a usunięcie części żeber prowadzi do wersji „wyciętej", czyli modelu z brakującym żebrem, który jest auksetyczny (Rys. 7.2f)(Lim 2015).



Rysunek 7.2 Wybrane materiały auksetyczne 2D zbudowane z komórek: a) o kształcie grota strzały (double arrowhead), b) dwuwymiarowych komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), c) z obracających się kwadratów (rotating squares), d) chiralna sieć w heksagonalnym uporządkowaniu, e) antytetrachiralna struktura plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb), f) z usuniętymi żebrami (missing rib). (na podstawie (Lim 2015))

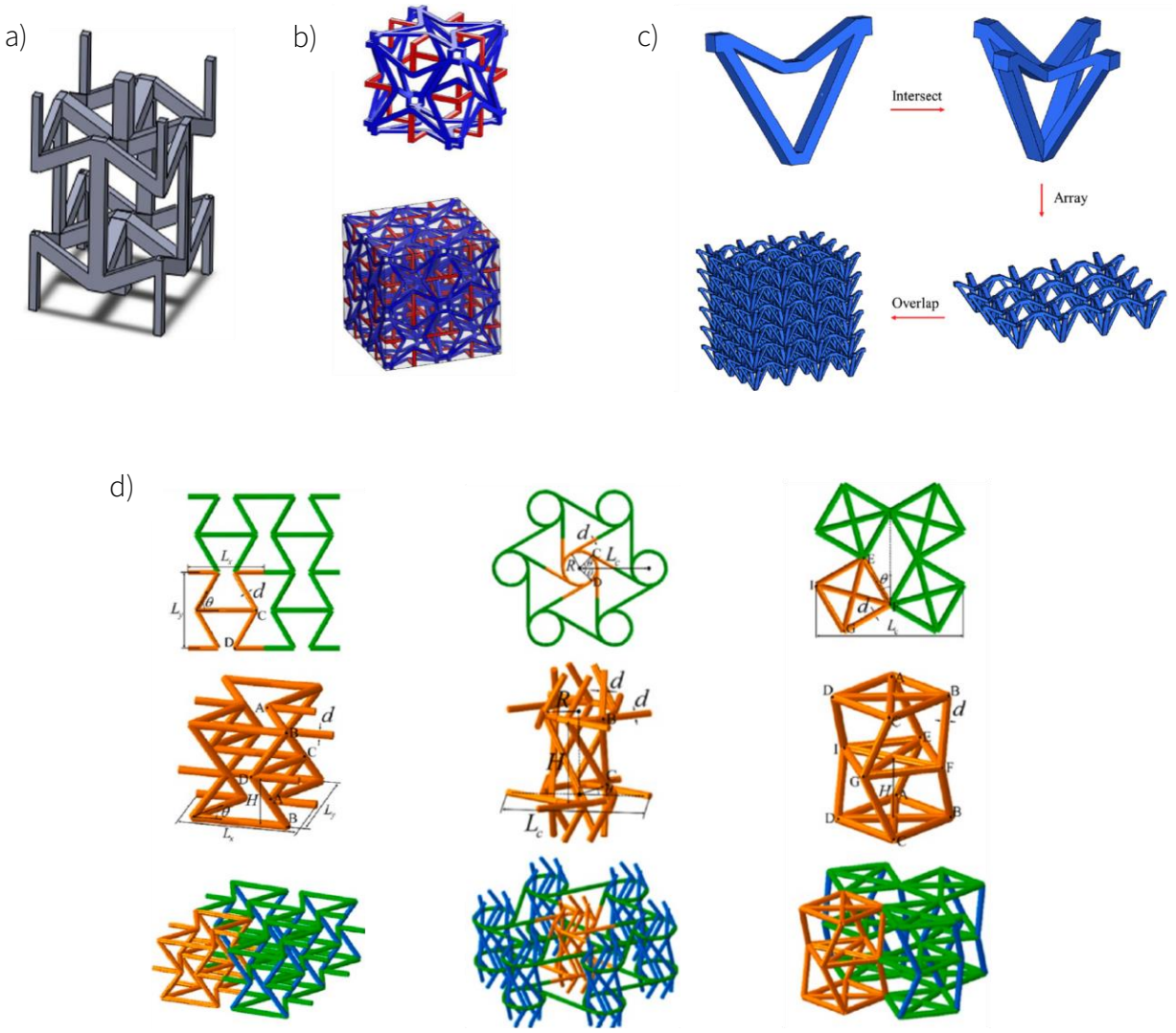
Wśród mniej klasycznych komórek znajdziemy komórki auksetyczne o kształcie litery S (*S-shaped honecomb structure*) (Rys. 7.3a), które są ulepszeniem komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu i rozkładają deformację równomiernie na całą strukturę, wykazując wyższe ujemne współczynniki Poissona (Meena, Singamneni 2019). Popularne są również komórki w kształcie gwiazdy (*star-shaped honecomb structure*) (Rys. 7.3b) (Yang, Ma 2020) oraz ich kolejne konfiguracje w postaci komórek w kształcie motyla (*butterfly-shaped honeycomb structure*) (Rys. 7.3d) (Zhang, Tian et al. 2021) oraz w kształcie ciasteczka (*cookie-shaped honeycomb structure*) (Rys. 7.3c) (Xiao, Zhang et al. 2021). Komórki te są popularne, ponieważ z łatwością zmieniając geometrię: kąt wierzchołka komórki i grubość ścianek, można regulować współczynnik Poissona od wartości ujemnych (auksetyczne), przez bliskie zeru, aż do dodatnich — co daje dużą elastyczność projektową. Popularne jest również

wykorzystywanie perforacji (*I-shaped slits, alternating slits, H-shape slits*) w odpowiednim kształcie w celu wytworzenia materiału auksetycznego (Rys. 7.3e) (Gupta, Gupta et al. 2022).



Rysunek 7.3 Wybrane materiały auksetyczne 2D zbudowane z komórek: a) o kształcie litery S (S-shaped honecomb structure) (Meena, Singamneni 2019), b) w kształcie gwiazdy (star-shaped honecomb structure) (Yang, Ma 2020), c) w kształcie ciasteczka (cookie-shaped honeycomb structure) (Xiao, Zhang et al. 2021), d) w kształcie motyla (butterfly-shaped honeycomb structure) (Zhang, Tian et al. 2021), e) perforacji (I-shaped slits) (Gupta, Gupta et al. 2022).

W przypadku układów 3D najczęściej spotykamy się z przenoszeniem struktur płaskich w przestrzenne: przykładem może być przebudowanie komórki wklęsłego plastra miodu (Rys. 7.4a) (Chen, Fu 2017), komórek w kształcie gwiazdy (Rys. 7.4b) (Ai, Gao 2018), grota strzały (Rys. 7.4c) (Gao, Ge et al. 2019) lub komórek wklęsłego plastra miodu, chiralnych i obracających się kwadratów (Rys. 7.4d) (Yuan, Chen et al. 2021). Znajdziemy również materiały składające się z zupełnie nowych komórek, stworzonych z myślą o materiałach trójwymiarowych: m.in. innowacyjna sześciokątna komórka opierająca się na unikalnym o mechanizmie przesuwnym (Rys. 7.5a) (Su, Xu et al. 2021), komórka, która składa się z pełnej (litej) sfery oraz trzech prostopadłościanów (Rys. 7.5b) (Ren, Shen et al. 2018b) lub komórek sześciennych nazywanych *simple cubic* (Rys. 7.5c) (Shen, Zhou et al. 2014).

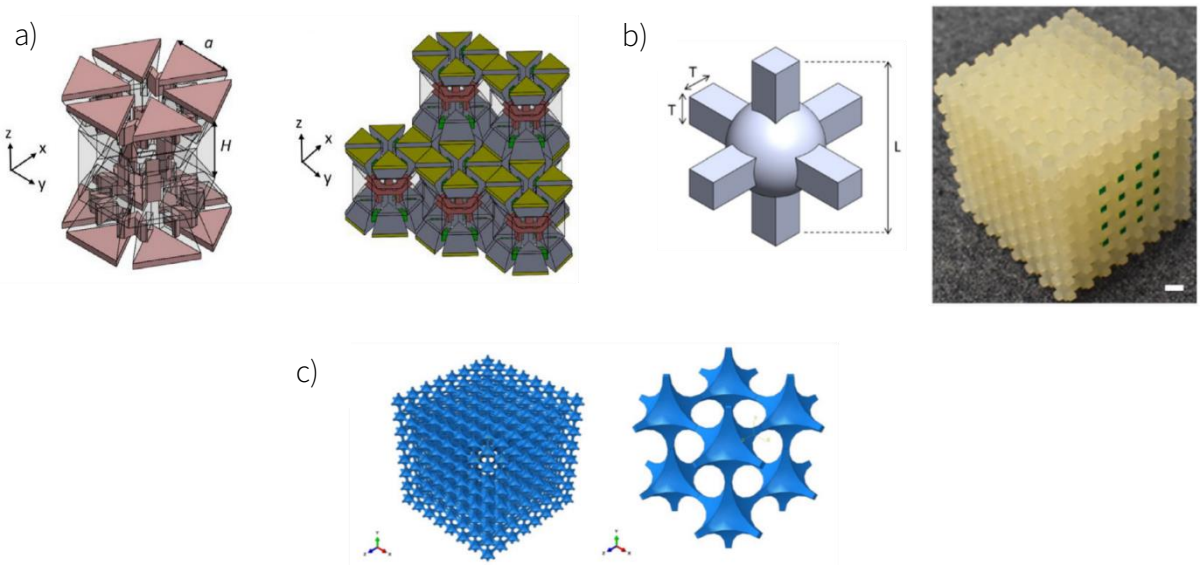


Rysunek 7.4 Wybrane materiały auksetyczne 3D zbudowane z komórek: a) komórki wklęsłego plastra miodu (Chen, Fu 2017), b) w kształcie gwiazdy (Ai, Gao 2018), c) grota strzały (Gao, Ge et al. 2019), d) komórek wklęsłego plastra miodu, chiralnych i obracających się kwadratów (Yuan, Chen et al. 2021).

W przypadku metamateriałów auksetycznych geometria podstawowych komórek materiału jest głównym czynnikiem odpowiedzialnym za jego zachowanie auksetyczne – manipulacja kątami, grubościami ścianek, a nawet rozmiarem komórki pozwala wpływać na odpowiedź materiału (Menon, Dutta et al. 2022). Geometrie auksetyczne najczęściej badane pod kątem potencjalnych zastosowań w konstrukcjach inżynierii lądowej to dwuwymiarowe i trójwymiarowe struktury *re-entrant* oraz struktury *chiralne* (Yu, Luo et al. 2020; Xu, Schlangen et al. 2021). Wynika to z ich łatwości wytwarzania oraz zdolności do utrzymywania ujemnego współczynnika Poissona nawet przy znacznych odkształceniach.

Wzrost zainteresowania metamateriałami auksetycznymi nastąpił wraz z rozwojem wytwarzania przyrostowego – możliwość „wydrukowania" struktury i przetestowania jej

w warunkach laboratoryjnych pozwoliła na znaczny rozwój tego obszaru. Pojawiły się również zagadnienia związane z materiałem, z którego wytwarzany jest metamateriał auksetyczny i jego wpływ na zachowanie struktury.



Rysunek 7.5 Wybrane materiały auksetyczne 3D zbudowane z komórek: a) sześciokątna komórka opierająca się na unikalnym o mechanizmie przesuwnym (Su, Xu et al. 2021), b) komórka, która składa się z pełnej (litej) sfery oraz trzech prostopadłościanów (Ren, Shen et al. 2018b), c) komórek sześciennych nazywanych simple cubic (Shen, Zhou et al. 2014).

Zalety materiałów auksetycznych mogą obejmować wiele obszarów, ponieważ mogą być one dostosowane do poszukiwanych potrzeb. Znajdziemy wśród nich: niższe gęstości – materiał jest zbudowany z ażurowych komórek w powtarzalnym wzorze co pozwala uzyskać znacznie niższe masy i gęstości w porównaniu z litymi materiałami ciągłymi, a w konsekwencji zmniejszenie zużycia materiału (Xu, Schlangen et al. 2021). Pojawia się również kwestia projektowania materiału jako odpornego na ścinanie (Novak, Krstulović-Opara et al. 2020), zgniatanie (Subramani, Rana et al. 2014), a co za tym idzie zdolność do pochłaniania energii i tłumienia drgań (Asad, Dhanasekar et al. 2020; Zhang, Jiang et al. 2022). Ciekawe są również możliwości projektowania materiału auksetycznego z wyższym, ujemnym, współczynnikiem Poissona (Subramani, Rana et al. 2014), a nawet w celu rozdzielenia modułu Younga od modułu Kirchhoffa (Miller, Ren et al. 2012). Należy jednak zaznaczyć, że zaprojektowany raz materiał, będzie odpowiadał tylko wybranym cechom – kształt komórki budującej jest optymalizowany w celu uzyskania konkretnego efektu ze strony materiału.

Metamateriały auksetyczne posiadają wiele zastosowań: jako bariery przeciwuderzeniowe (Lee, Jeong et al. 2019), falochrony (Nguyen-Van, Choudhry et al. 2022), izolatory drgań (Zhang, Yang

2016), osłony przeciwwybuchowe (Qi, Remennikov et al. 2017), elementy stężeń sejsmicznych (Zhang, Ren et al. 2021) i wzmocnienia konstrukcji przeciwko obciążeniom dynamicznym (Asad, Dhanasekar et al. 2019). Spotykamy je również w przypadku struktur kanapkowych (Zhong, Ren et al. 2022), zbrojenia betonu (Gu, Wang et al. 2022), a także w celu zastosowania jako łączniki (Ren, Shen et al. 2018a).

7.2. Zastosowania metamateriałów 2D

Metamateriały dwuwymiarowe (2D) stanowią jedną z najbardziej dynamicznie rozwijających się obszarów zastosowań inżynierskich, łącząc unikalne właściwości strukturalne z możliwością ich precyzyjnego projektowania. Materiały te często wykazują cechy niemożliwe do uzyskania w konwencjonalnych materiałach – dzięki odpowiedniemu zaprojektowaniu mogą wykazywać zdolności do modulowania propagacji fal elektromagnetycznych, akustycznych czy mechanicznych. W ostatnich latach szczególne zainteresowanie budzą ich potencjalne zastosowania, obejmujące zarówno technologie fotoniczne i elastyczną elektronikę, jak i nowatorskie sensory, układy tłumienia drgań czy powierzchnie o programowalnych funkcjach.

Ciekawym obszarem zastosowań metamateriałów 2D, a także projektowania materiałów auksetycznych, są materiały wykorzystywane do zastosowania w obrazowaniu metodą rezonansu magnetycznego (MRI), w szczególności mniej regularnych części ciała człowieka, jak na przykład kostki, kolana, barki (Wu, Zhao et al. 2022). Kolejnym przykładem wykorzystania metamateriałów 2D o możliwości dostrajania są metamateriały przeznaczone do kontrolowania i filtrowania fal akustycznych (He, Huang 2018). Ich zachowanie jest wprowadzane poprzez deformację, natomiast możliwości tłumienia i kontrolowania fal są sterowane poprzez rozmiar i kształt komórek struktury auksetycznej. Metamateriały 2D znajdują również swoje zastosowanie w medycynie – struktura może być zaprojektowana w skali mikro lub nano i może stworzyć niezwykle precyzyjny system mocujący implanty (Gao, Liu et al. 2024). Zastosowanie metamateriału o trójwymiarowym zmiennym („przełączającym znak") współczynniku Poissona pozwala na poprawienie jakości kontaktu między implantem a przylegającą kością. Wśród metamateriałów płaskich auksetycznych znajdują się również materiały ochronne, mogące pochłaniać energię pochodzącą na przykład z uderzeń –

na przykład jako materiał ochronny kasków, hełmów wojskowych, elementów sportowych lub w obuwiu wysokowydajnym (Pagliocca, Uddin et al. 2022).

Powstał również obszar szerokiego zastosowanie struktur auksetycznych 2D w obszarze sensorów piezorezystywnych, których czułość poprawia się dzięki występowaniu ujemnego współczynnika Poissona. W publikacji (Taherkhani, Nasri et al. 2024) płaska izotropowa struktura auksetyczna o stałym współczynniku Poissona została wykorzystana do skonstruowania rękawicy sensorycznej służącej do identyfikacji ruchów palców ludzkiej dłoni. Warto także zauważyć ogromny rozwój materiałów i materiałów 2D, takich jak grafen, czarny fosfor oraz dichalkogenki metali przejściowych, które zyskały w ostatnich latach trwałą uwagę dzięki swoim unikalnym właściwościom dla optoelektroniki i fotoniki (Cheng, Cao et al. 2021). Najnowszy rozwój w dziedzinie materiałów 2D, obejmujący grafen i inne materiały warstwowe, wykazał także ich potencjał dla szerokiego zakresu zastosowań do realizacji wysokowydajnych urządzeń, w tym urządzeń elektronicznych, sensorów, katalizatorów, urządzeń do konwersji i magazynowania energii itp., dzięki pełnemu wykorzystaniu ich wyjątkowych właściwości elektrycznych, optycznych, chemicznych i termicznych (Zhang, Hou et al. 2016). Proponowane są również wykorzystania materiałów 2D jako rozpraszaczy ciepła w urządzeniach elektronicznych (Song, Liu et al. 2018). Kolejnym ogromnym obszarem, w którym znajdują zastosowanie materiały 2D jest elektronika elastyczna (Katiyar, Hoang et al. 2024).

Znaczącym obszarem jest zastosowanie materiałów 2D w sensorach chemicznych (Anichini, Czepa et al. 2018). Przykładem takich sensorów mogą być sensory gazu, które mogłyby pracować w szerokiej rozpiętości temperatur, przenośne sensory do monitorowania metali ciężkich w środowisku, detektory molekuł chemicznych i biologicznie aktywnych, które mają zastosowanie w opiece zdrowotnej, monitorowaniu środowiska i diagnostyce chorób. Ciekawym zastosowaniem jest wykorzystanie materiałów 2D do absorbcji zanieczyszczeń ze środowiska (Kim, Lee et al. 2022), a także w celu uzdatniania wody pitnej poprzez wykorzystanie ich w urządzeniach do wykrywania jakości wody jak systemy detekcji parametrów wody (M, Bindhu 2025). Pojawiają się również badania dotyczące wykorzystania materiałów 2D jako smary stałe w miejscach, gdzie nie mogą być użyte smary płynne (Manu, Gupta et al. 2021). Metamateriały 2D wykazują zatem szeroki potencjał zastosowań, obejmujący

m.in. elastyczną elektronikę, sensory, układy optyczne oraz nowoczesne systemy kontroli właściwości mechanicznych i falowych.

7.3. Analizy – struktury auksetyczne płaskie (2D)

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie analizy możliwości wykonania adaptowalnych struktur tensegrity wykazujących cechy auksetyczne. Rozdział obejmuje szczegółowy opis modeli wykorzystywanych w analizach, zastosowanej metody, a także przedstawienie wyników opisanych analiz. Na potrzeby niniejszego rozdziału sformułowano następującą tezę badawczą: „Zastosowanie wzmocnienia inspirowanego geometrią komórek materiałów auksetycznych w płaskich układach zbudowanych z modułów tensegrity pozwala na uzyskanie cech charakterystycznych dla metamateriałów auksetycznych. Rozwiązanie to umożliwia budowanie struktur adaptowalnych, w których jednolita geometria może zmieniać swoje cechy mechaniczne pod wpływem lokalnego zróżnicowania parametrów modułów."

Weryfikacja powyższej tezy wykonana jest na przykładach czterech modularnych struktur zbudowanych z dwóch modułów tensegrity: sześciokątnych i ośmiokątnych. Przedstawione układy modularne układane są w dwojaki sposób: prosty (moduły układane są obok siebie bez przesunięcia) oraz z przesunięciem. W analizach wykorzystano znane komórki budujące materiały auksetyczne jako „wzory" wprowadzane do pełnych struktur modularnych płaskich.

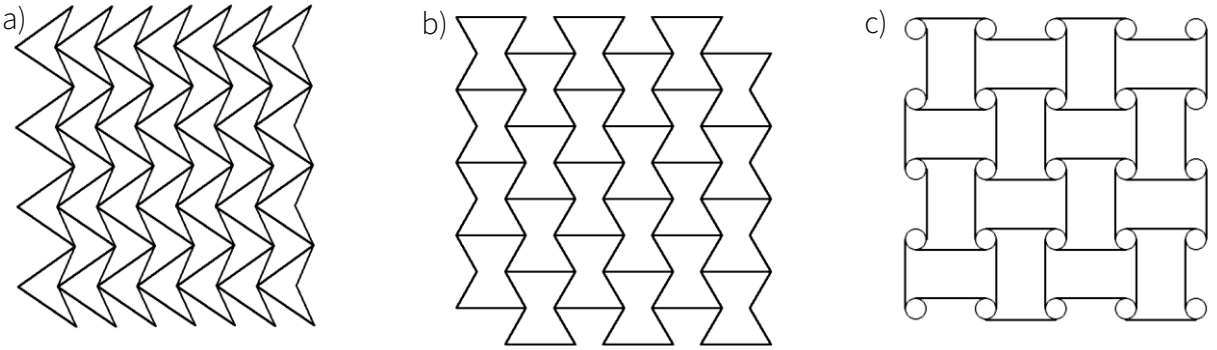
We wszystkich przypadkach rozważano wzmocnienie za pomocą zmiany mnożnika *self-stress*. Weryfikację przeprowadzono za pomocą autorskiego programu napisanego w oprogramowaniu *Mathematica (wer. 13.3)*. W celu wykonania analiz zdecydowano się na uproszczoną formę sprawdzenia własności auksetycznych wykonanych układów modularnych – zdecydowano się na ściskanie struktur w dwóch podstawowych kierunkach (pionowym i poziomym) przy jednoczesnym sprawdzeniu zachowania układu w kierunku do niej poprzecznym – odczytywano wartości przemieszczeń węzłów w kierunku poprzecznym do kierunku ściskania. W kolejnych podrozdziałach omówione zostały szczegółowo: geometria modelu, własności materiałowe, warunki brzegowe, procedura analizy, jej wyniki oraz podsumowanie wyników i odpowiedzi na tezy badawcze zawarte na końcu rozdziału.

7.3.1. Przykłady materiałów auksetycznych

Dokonano poszukiwania podstawowych geometrii układóe przedstawiających zachowania metamateriałów auksetycznych, a następnie przeanalizowano możliwość wykorzystania ich jako „wzory" nakładane na konstrukcje wykonane z modułów płaskich tensegrity (modułów sześciokątnych i ośmiokątnych). Najczęściej spotykana geometria metamateriałów auksetycznych jest powtarzalna – składa się ona z wielokrotnie powtarzanych pojedynczych komórek układanych w określone wzory pozwalające na uzyskanie pożądanych własności – ujemny współczynnik Poissona. Wśród wielu możliwych podstawowych komórek (zaproponowanych m.in. w (Lim 2015)) skupiono się na trzech geometriach, które są przedstawicielami podstawowych struktur spotykanych w analizach materiałów auksetycznych, a której jednocześnie można odtworzyć w płaskich konstrukcjach tensegrity (Rys. 7.6). Widoczne są dwie najbardziej popularne komórki: dwuwymiarowa komórka wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) (Rys. 7.6b) oraz dwuwymiarowa komórka w kształcie grota strzały (*double arrowhead auxetic cell*) (Rys. 7.6a), które są wykorzystywane jako benchmarki w przypadku badań struktur auksetycznych. Trzeci przypadek przedstawia jeden z wielu przypadków komórek chiralnych, które zawierają pierścienie, będące elementami obracającymi się, wspomagającymi uzyskanie metamateriału auksetycznego - antytetrachiralna struktura plastra miodu (*anti-tetrachiral honeycomb*) (Rys. 7.6c). Komórki zostały dokładniej opisane w Rozdziale 7.1. Materiały auksetyczne.

W przypadku wybranej metody tworzenia struktur adaptowalnych za najtrudniejsze do odtworzenia uznano kształty komórek z obracającymi się elementami (*rotating units*) – na przykład obracające się kwadraty lub trójkąty (Lim 2015). Wymagałyby one budowy dużych układów modularnych, w których część komórek byłaby bardzo sztywna, a część pozbawiona sztywności przy jednoczesnym uzyskaniu małej wartości przemieszczeń. Największą trudnością jest odtworzenie zachowania tego metamateriału – w momencie obciążenia oczekiwane jest zamknięcie struktury, co byłoby niemożliwe w przypadku połączenia modułów tensegrity. Dodatkowo prowadziłoby to do dużych odkształceń w miejscach „zawiasów" – połączeń sztywnych komórek. W przypadku chęci wykorzystania tego typu struktury z obracającymi się elementami znacznie lepszą decyzją jest zbudowanie bezpośrednio konstrukcji tensegrity,

w której pojedyncze moduły są sztywnymi elementami (na przykład kwadratami) – taka metoda jednak nie jest omawiana w niniejszej pracy.

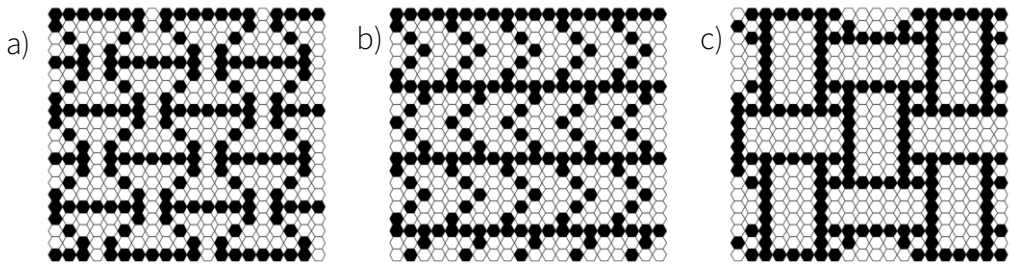


Rysunek 7.6 Wybrane geometrie struktur auksetycznych: a) zbudowane z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead), b) dwuwymiarowych komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb) oraz c) antytetrachiralna struktura plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) (opracowanie własne na podstawie (Lim 2015)).

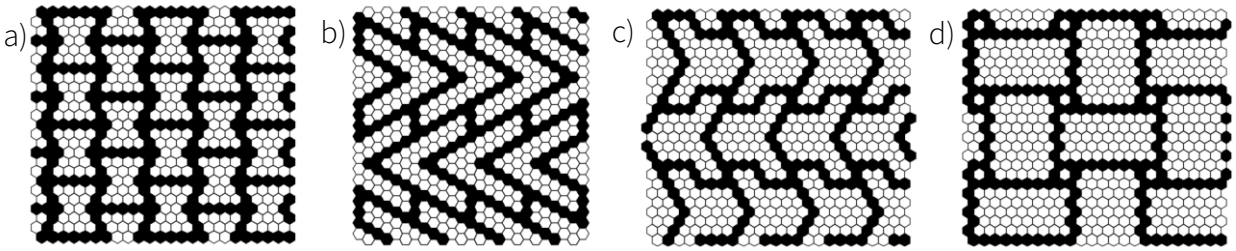
Dla poszczególnych komórek rozważono możliwość przeniesienia wzorów na układy modularne sześciokątne (Rys. 7.7 i 7.8) oraz ośmiokątne (Rys. 7.9 i 7.10). Istotnym jest, aby kształt komórki był powtarzalny i możliwy do wpisania w strukturę zgodnie z jej zasadami: w przypadku komórki o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) musi być on możliwy do ułożenia z przesunięciem, w przypadku komórek w kształcie grota strzały (*double arrowhead auxetic cell*) musi być możliwe układanie jej naprzemiennie w rzędach, zaś geometria komórki o kształcie antytetrachiralnej struktury plastra miodu (*anti-tetrachiral honeycomb*) wymaga możliwości obrotu komórki i układania ich naprzemiennie obok siebie. W przypadku komórki o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) istotnym było znalezienie układu, w którym możliwe jest ułożenie poziomych linii prostych w komórkach, co decydowało o kierunku ułożenia modułów w przypadku komórki tensegrity sześciokątnej – wymagało to wyboru komórki obróconej w przypadku struktury typu II[1] (Rys. 7.8). Komórka w kształcie grota strzały (*double arrowhead auxetic cell*) wymaga możliwości ułożenia modułów w linii skośnej, co istotne również pod dwoma różnymi kątami. W przypadku antytetrachiralnej struktury plastra miodu (*anti-tetrachiral honeycomb*) ważne, aby poza liniami prostymi, możliwe było również stworzenie pierścieni charakterystycznych dla tej komórki.

[1] W niniejszym rozdziale zrezygnowano z nazewnictwa sugerującego podział na struktury z modułami podstawowymi i obróconymi ze względu na fakt, że analizowane jest ściskanie w obu kierunkach struktury i powodowałoby to niepotrzebne zamieszanie w opisach.

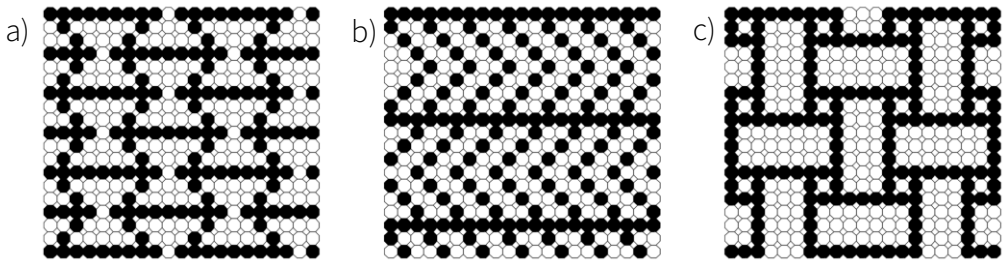
W przypadku struktur o układzie prostym (typu I – Rys. 7.7 i 7.9) szczególnie trudne jest odtworzenie linii skośnych. W obu przypadkach są to linie nie połączonych ze sobą modułów co może wpłynąć na zachowanie takiego metamateriału w dalszych analizach. W przypadku struktur ośmiokątnych (Rys. 7.9 i 7.10) trudne jest odtworzenie kształtu pierścieni komórki antytetrachiralnej struktury plastra miodu (*anti-tetrachiral honeycomb*) – w większości przypomina ona kwadrat co również może wpływać na zachowanie metamateriału. Największą trudność nastręcza natomiast odtworzenie komórki w kształcie grota strzały (*double arrowhead auxetic cell*) – w przypadku struktury sześciokątnej typu I (Rys. 7.7) oraz obu struktur ośmiokątnych (Rys. 7.9 i 7.10) prowadzi to do stworzenia kształtu podobnego do częściowego wklęsłego plastra miodu (*2D semi re-entrant honeycomb*), który również był analizowany w literaturze (m.in. w (Berinskii 2018)), jednak nie jest wykorzystywany ze względu na brak cech auksetycznych. Z perspektywy analiz bardziej przydatne okazują się struktury ośmiokątne, które w obu poprzecznych kierunkach są takie same, w związku z tym wybrany wzór może być nałożony tak samo w obu kierunkach – tym samym nie jest problemem fakt, że na przykład komórki o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) wykazują większe zachowanie auksetyczne w jednym z kierunków, wystarczy nałożyć wzór w odpowiednim kierunku w zależności od potrzeb.



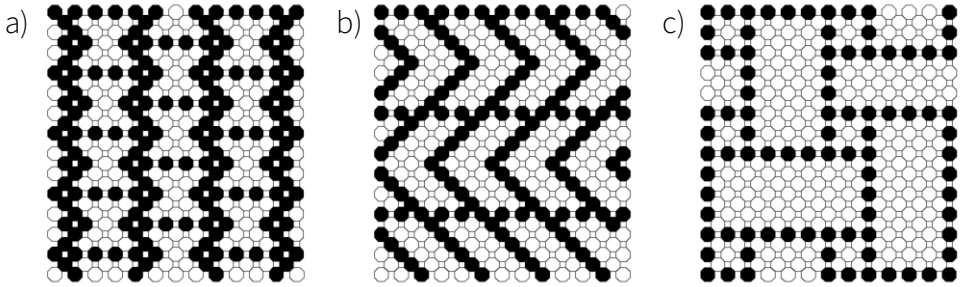
Rysunek 7.7 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury sześciokątnej typu I.



Rysunek 7.8 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) i c) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz d) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury sześciokątnej typu II.



Rysunek 7.9 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu(anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury ośmiokątnej typu I.



Rysunek 7.10 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury ośmiokątnej typu II.

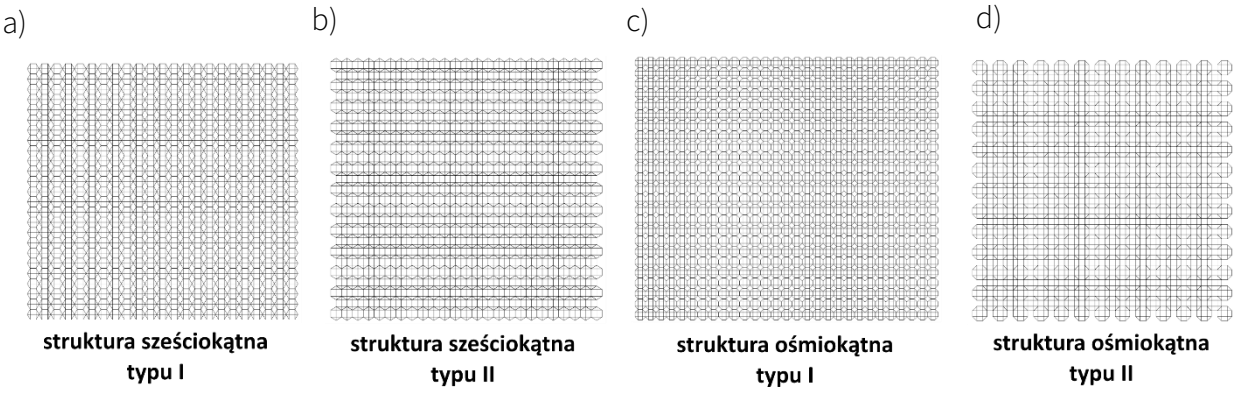
Obserwując dokładność odtworzonej geometrii w przypadku wybranych struktur tensegrity zdecydowano, że najlepszą komórką do porównań będzie jedna z najbardziej podstawowych geometrii metamateriałów auksetycznych – dwuwymiarowa struktura o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*). Wybrano ją ze względu na łatwość odtworzenia w przypadku struktur sześcio- i ośmiokątnych (możliwość zachowania odpowiednich kątów oraz połączenia wzoru w nieskończony układ), co było znacznie utrudnione w przypadku odtworzenia komórki w kształcie grota strzały (*double arrowhead*). Dodatkowo, kształt ten nie wymaga drobnych obrotów wewnątrz struktury, jak w przypadku antytetrachiralnej struktury plastra miodu (*anti-tetrachiral honeycomb*) – takie zachowanie mogłoby być utrudnione w przypadku występowania sztywnych zastrzałów w konstrukcji. Co również jest istotne, kształt ten jest zbliżony w każdym z przypadków, więc pozwala to na jak najlepsze możliwe porównanie pomiędzy poszczególnymi przykładami.

7.3.2. Struktury komórkowe tensegrity

W analizach użyto czterech struktur zbudowanych z modułów płaskich tensegrity – sześciokątnych i ośmiokątnych. Wykorzystano w nich moduły o wymiarach analogicznych jak w przypadku modeli konstrukcji typu tarczowego wzmacnianych za pomocą wyników

optymalizacji topologicznej (Rozdział 4) – struktury sześciokątne opierają się na modułach wpisanych w prostokąty o wymiarach $b\sqrt{3} \times 2b$, składających się z 6 cięgien i 3 zastrzałów (dwóch pionowych, jednego poziomego), zaś ośmiokątne na modułach wpisanych w kwadrat o wymiarach $a(1+\sqrt{2}) \times a(1+\sqrt{2})$, składających się z 8 cięgien oraz 4 zastrzałów (dwóch pionowych i dwóch poziomych). Ponownie wymiary zostały zunifikowane i przyjęto wymiary modułu sześciokątnego jako $1{,}4\ a\sqrt{3} \times 2{,}8\ a$ (Rys. 4.5, Rozdz. 4.2.).

Układy modularne zostały zbudowane w analogiczny sposób do przypadku konstrukcji typu tarczowego (Rozdz. 4) – struktury typu I zawierają moduły ułożone jedne na drugich w prostych liniach, zaś w przypadku struktur typu II moduły są zbliżone do siebie i układane tak, aby uniknąć wolnych przestrzeni pomiędzy nimi (Rys. 7.11). W przypadku struktury sześciokątnej typu I przyjęto układ składający się z 23 kolumn i 25 rzędów modułów (Rys. 7,11a), struktura sześciokątna typu II składa się z 25 kolumn i 25 rzędów modułów (Rys. 7.11b), struktura ośmiokątna typu I: 29 kolumn i 25 rzędów modułów (Rys. 7.11c), a typu II: 25 kolumn i 25 rzędów (Rys. 7.11d). Celem było stworzenie obszarów o podobnych wymiarach, w których wpisane są co najmniej 3 kolumny i 3 rzędy komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*) – tak wykonano się to w przypadku struktury sześciokątnej typu I – Rys. 7.14 oraz struktury ośmiokątnej typu II – Rys. 7.17. W przypadku struktury sześciokątnej typu II (Rys. 7.15) i struktury ośmiokątnej typu I (Rys. 7.16) jest to 5 kolumn komórek po 3 rzędy komórek.

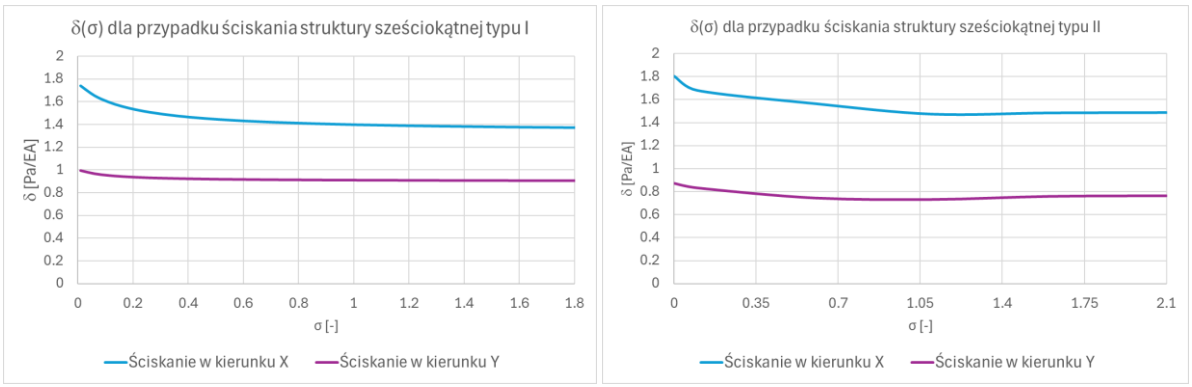


Rysunek 7.11 Wybrane struktury modularne tensegrity płaskie: a) struktura sześciokątna typu I, b) struktura sześciokątna typu II, c) struktura ośmiokątna typu I, d) struktura ośmiokątna typu II.

We wszystkich analizach przyjęto, że dane materiałowe dla modułów będą jednostkowe ($E = 1$, gdzie E – moduł Younga), jako pole przekroju zastrzału ustalono $A_z = 1$, zaś pole przekroju cięgien jest równa $A_c = k \cdot A_z$. W obliczeniach przyjęto, że parametr $k = 0{,}1$. Jako sposób

podparcia ustalono blokadę pojedynczych węzłów w kierunkach X (w przypadku ściskania wzdłuż osi X) lub Y (w przypadku ściskania wzdłuż osi Y) na krawędzi przeciwległej do obciążenia (zgodnie z Rys. 7.14-7.17). W każdym z kierunków jeden węzeł został zablokowany w obu kierunkach, aby nie ryzykować przesunięcia się układu pod wpływem obciążenia. Całkowite obciążenie jest jednostkowe i wynosi $P = 1$, pojedyncza siła wynosi P/n, gdzie n – liczba węzłów na danej krawędzi. W analizie zachowania struktury przyjęto jednolite wzmocnienie układu za pomocą mnożnika σ ($r_\sigma = 1, r_k = 1, r_m = 1$). Wartość przemieszczeń jest odczytywana w jednostkach Pa/EA. Analizy wykonano w autorskim oprogramowaniu napisanym w programie *Mathematica (wer. 13.3).*

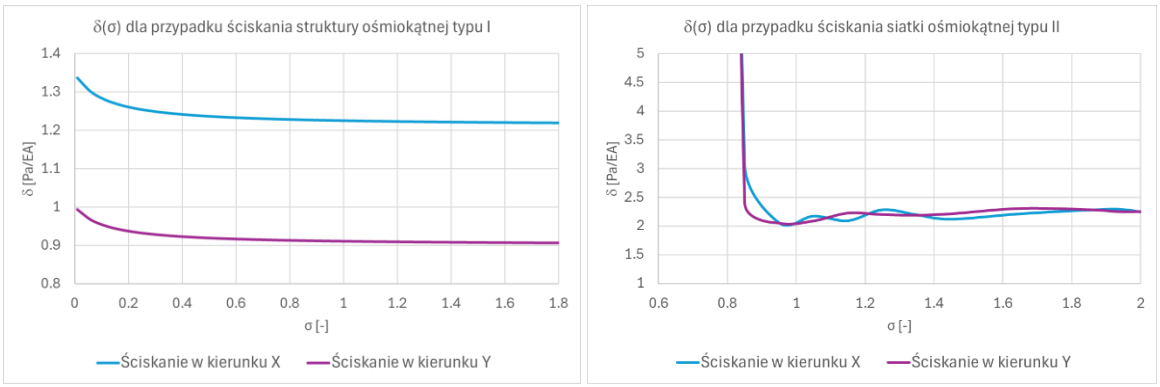
Wybrane struktury w pierwszej kolejności zostały przeanalizowane w celu sprawdzenia ich zachowania pod wpływem ściskania – odczytywano wartość przemieszczeń pod pojedynczym węzłem obciążonym siłą ściskającą. Wszystkie struktury zachowują cechy tensegrity – wraz ze wzrostem sił sprężających następuje spadek przemieszczeń. W przypadku struktur sześciokątnych (Rys. 7.12) można zauważyć, że w wyniku ściskania w obu kierunkach wykresy zachowują analogiczny kształt, z przesunięciem wykresu o stałą wartość. W obu przypadkach wartości przemieszczeń w przypadku ściskania w kierunku X są większe niż w przypadku ściskania w kierunku Y dla wartości σ w zakresie od 0 do 1,8.



Rysunek 7.12 Wykres zależności przemieszczeń δ od współczynnika σ w przypadku ściskania dla struktury sześciokątnej typu I (po lewej) oraz struktury sześciokątnej typu II (po prawej).

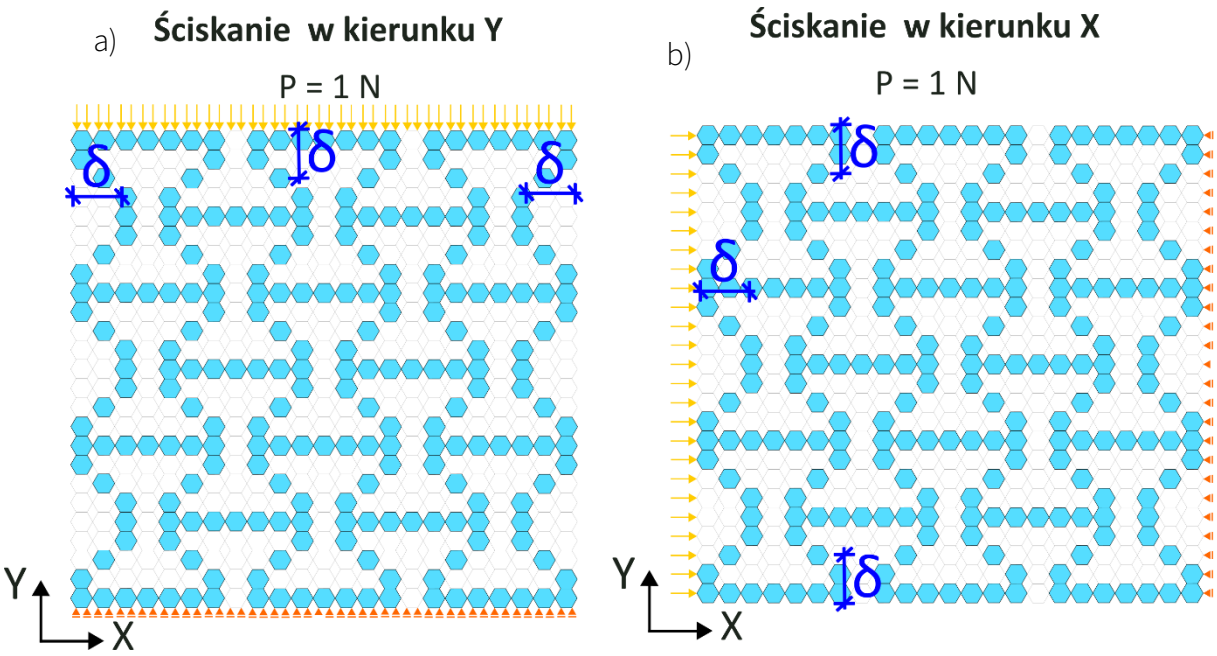
W przypadku struktur ośmiokątnych (Rys. 7.13) struktura ośmiokątna typu I zachowuje się analogicznie do przypadku układów sześciokątnych – wykres przemieszczeń w zależności od mnożnika σ wskazuje na spadek wartości przemieszczeń dla wartości $\sigma \in (0, 1{,}8)$. W przypadku struktury ośmiokątnej typu II wartości przemieszczeń są zbliżone do siebie – wykresy nakładają się na siebie. Struktura ta wykazuje najsilniejsze zachowanie zgodne

z zachowaniem tensegrity – duży spadek na początku wzmocnienia za pomocą *self-stressu*. W przypadku ściskania w kierunku Y wykres jest znacznie bardziej stabilny, jednak układ również szybko zaczyna zwiększać ponownie wartości przemieszczeń (dla wartości σ około 1,2) – traci zatem swoją stosowalność. W przypadku ściskania w kierunku X struktura nie zachowuje stabilnej ścieżki spadku przemieszczeń pod wpływem zwiększających się wzmocnień – dla wartości $\sigma = 1{,}0$ wartości przemieszczeń zaczynają rosnąć.

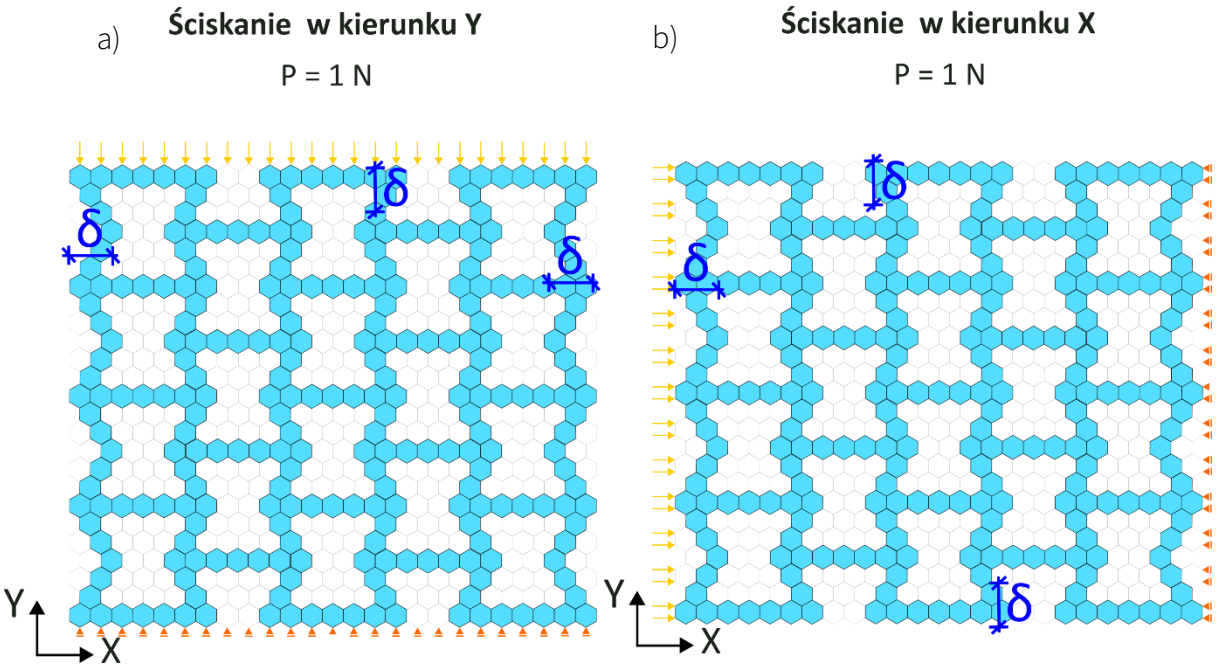


Rysunek 7.13 Wykres zależności przemieszczeń δ od współczynnika σ w przypadku ściskania dla struktury ośmiokątnej typu I (po lewej) oraz struktury ośmiokątnej typu II (po prawej).

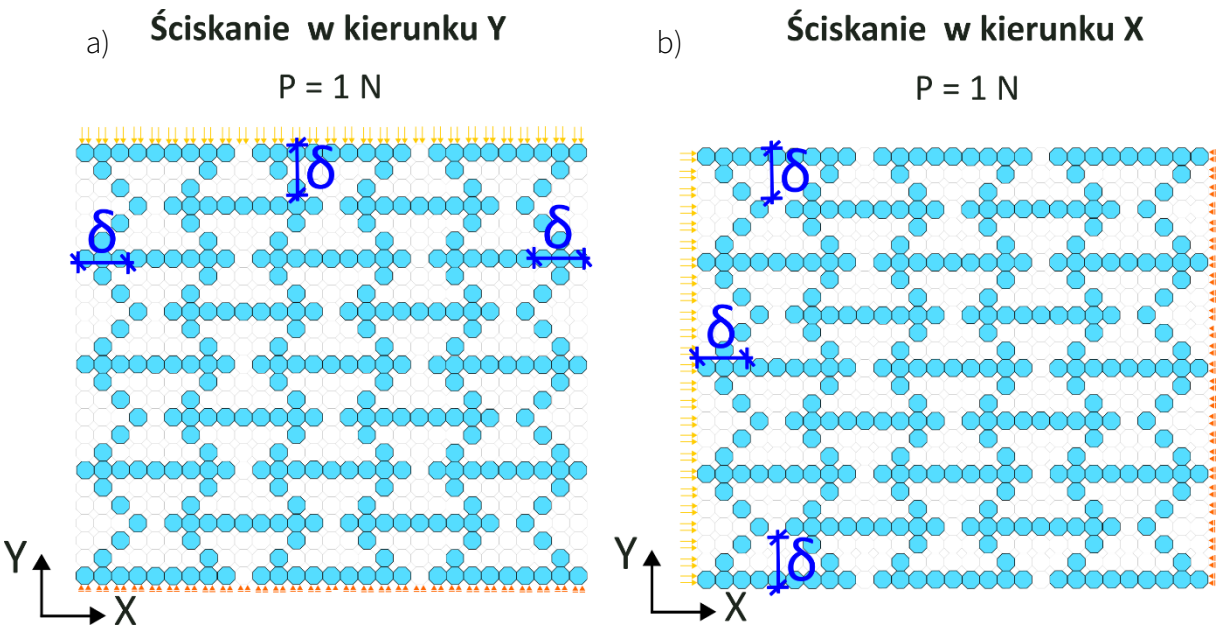
W celu wykonania analiz zdecydowano się na uproszczoną formę sprawdzenia własności auksetycznych wykonanych metamateriałów – zdecydowano się na ściskanie struktur w dwóch podstawowych kierunkach (pionowym i poziomym) przy jednoczesnym sprawdzeniu zachowania metamateriału w kierunku do niej poprzecznym – odczytywano wartości przemieszczeń węzłów w kierunku poprzecznym do kierunku ściskania (zgodnie z oznaczeniem na Rys. 7.14-7.17). Następnie na podstawie danych o wartościach przemieszczeń struktury obliczano współczynnik Poissona. Na Rys. 7.14-7.17 przedstawiono w jaki sposób przeniesiono wzory metamateriałów auksetycznych na wybrane struktury sześciokątne i ośmiokątne tensegrity.



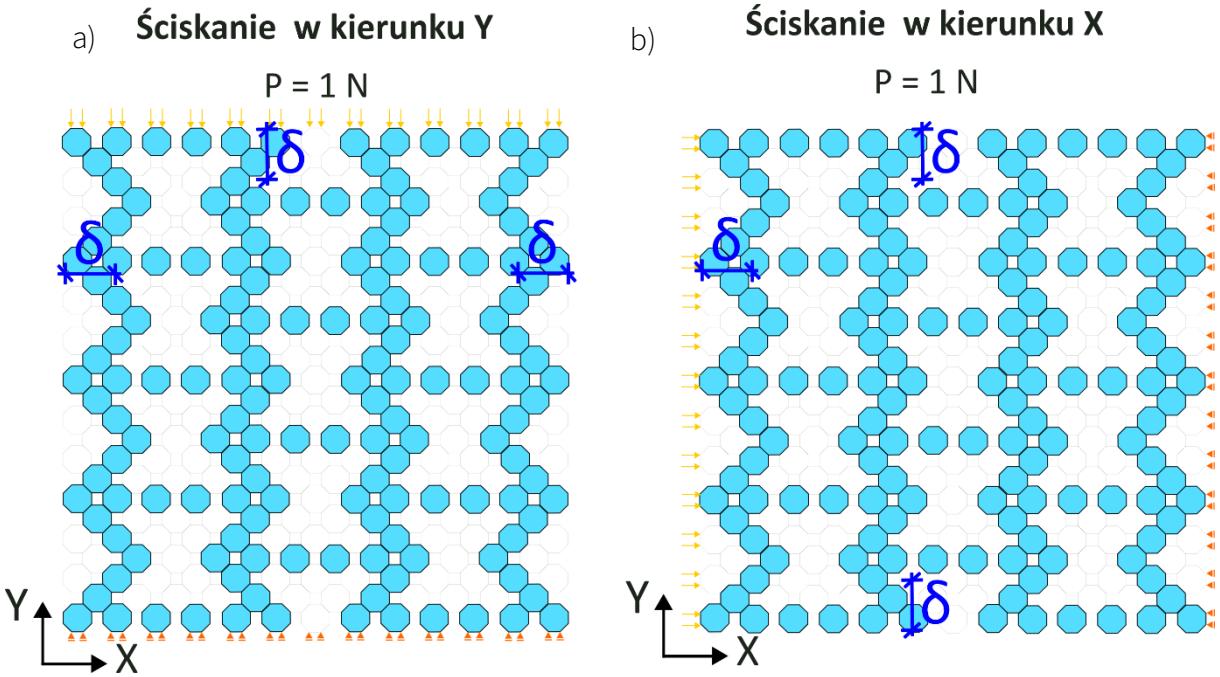
Rysunek 7.14 Analizowany model struktury sześciokątnej typu I z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym).



Rysunek 7.15 Analizowany model struktury sześciokątnej typu II z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym).



Rysunek 7.16 Analizowany model struktury ośmiokątnej typu I z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym).



Rysunek 7.17 Analizowany model struktury ośmiokątnej typu II z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym).

7.3.3. Wyniki

Każdy z przykładów był analizowany dla dwóch przypadków:

- stała wartość współczynnika $r_\sigma = 3{,}0$ oraz zakres mnożnika $\sigma \in [0{,}01; 2{,}5]$ z krokiem co $0{,}05$,

- stałej wartości $\sigma = 0{,}0001$ i zmiennej wartości $r_\sigma = [3; 110000]$ z krokiem co 100.

W przypadku poszukiwania rozwiązań w zakresie stałej wartości współczynnika r_σ dokonywano następnie zawężenia obszaru, aby odkryć granice wartości pozwalających na uzyskanie zachowania materiału auksetycznego.

Struktury zbudowane z modułów sześciokątnych

Typ I

W przypadku struktury sześciokątnej typu I w założonym zakresie znaleziono tylko kilka przypadków, w których metamateriał zachowywał cechy auksetyczne pod wpływem ściskania w kierunku osi Y. Wszystkie znalezione przypadki odnoszą się do sytuacji stałej wartości współczynnika $r_\sigma = 3{,}0$: w zakresie mnożnika $\sigma = (0{,}7; 0{,}94)$ oraz dla pojedynczej wartości mnożnika $\sigma = 0{,}09$. Przykładowe wyniki zostały przedstawione na Rys. 7.18 i 7.19. Odpowiedź struktury jest niewielka – przemieszczenia w kierunku osi X (poprzeczne) są znacznie mniejsze od przemieszczeń w kierunku osi Y, zaś wartości odkształceń różnią się o cały rząd wielkości.

Dla przypadku $\sigma = 0{,}9,\ r_\sigma = 3{,}0$ przedstawiono sposób obliczenia współczynnika Poissona na podstawie średniej wartości odkształcenia obliczonej w kierunku Y oraz kierunku X, gdzie wartości l_y oraz l_x to wymiary zewnętrzne układu w kierunkach kolejno Y i X.

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{-1{,}15163}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = -0{,}018997$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{-0{,}143948}{23 \cdot 2 \cdot a} = -0{,}00223521$$

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{-0{,}00223521}{-0{,}018997} = -0{,}117661$$

Zdecydowano się również na obliczenie wartości współczynnika Poissona na podstawie punktów położonych najdalej od siebie (na bokach próbki), co odpowiada sytuacji, w której na krawędzi próbki poprowadzić linie przechodzące przez punkty w maksymalnej odległości (węzły o minimalnym przemieszczeniu). Metoda ta pozwala uchwycić maksymalny zakres odkształcenia poprzecznego.

$$\varepsilon_{y,max} = \frac{\Delta l_{y,max}}{l_y} = \frac{-1{,}09087}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = -0{,}0179947$$

$$\varepsilon_{x,max} = \frac{\Delta l_{x,max}}{l_x} = \frac{-0{,}0924054}{23 \cdot 2 \cdot a} = -0{,}00143487$$

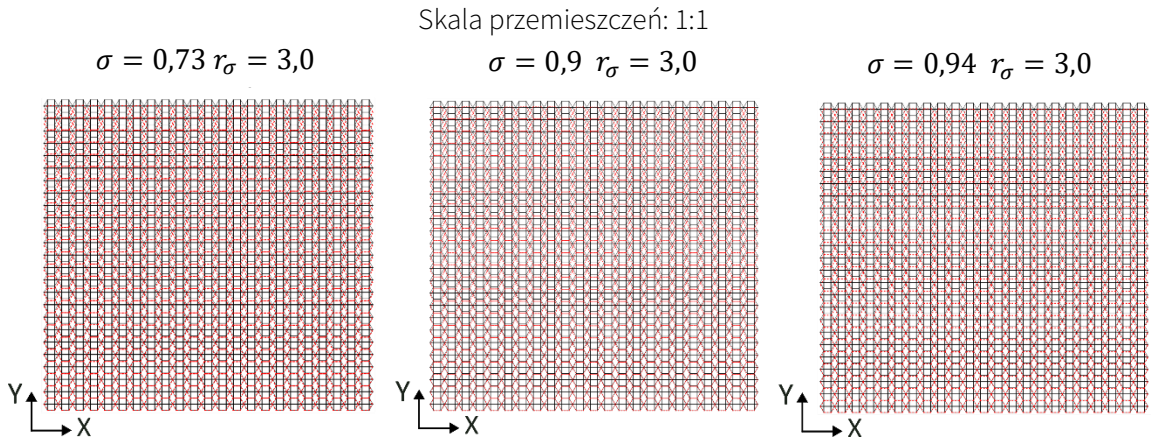
$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}} = -\frac{\varepsilon_{x,max}}{\varepsilon_{y,max}} = -\frac{-0{,}00143487}{-0{,}0179947} = -0{,}0797381$$

W Tab. 7.1 zapisano wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} obliczonych metodami przedstawionymi powyżej dla kilku wybranych przypadków par współczynników σ, r_σ wykazujących cechy auksetyczne. Jak można zauważyć w przypadku obliczania współczynnika Poissona ν_{max} dla pary $= 0{,}09;\ r_\sigma = 3{,}0$ uzyskujemy wartość dodatnią – wynika to z faktu, że w punktach znajdujących się przy podstawie struktury następuje rozszerzenie, zaś dopiero w kolejnych punktach pojawia się zachowanie auksetyczne. W pozostałych analizowanych przypadkach uzyskujemy bardzo zbliżoną wartość ν_{mean}, która waha się pomiędzy wartościami -0,11 a -0,12. Kiedy jednak obliczenia uwzględniają wartości współczynnika ν_{max} wartość ta spada o ponad połowę do wartości od -0,05 do -0,07.

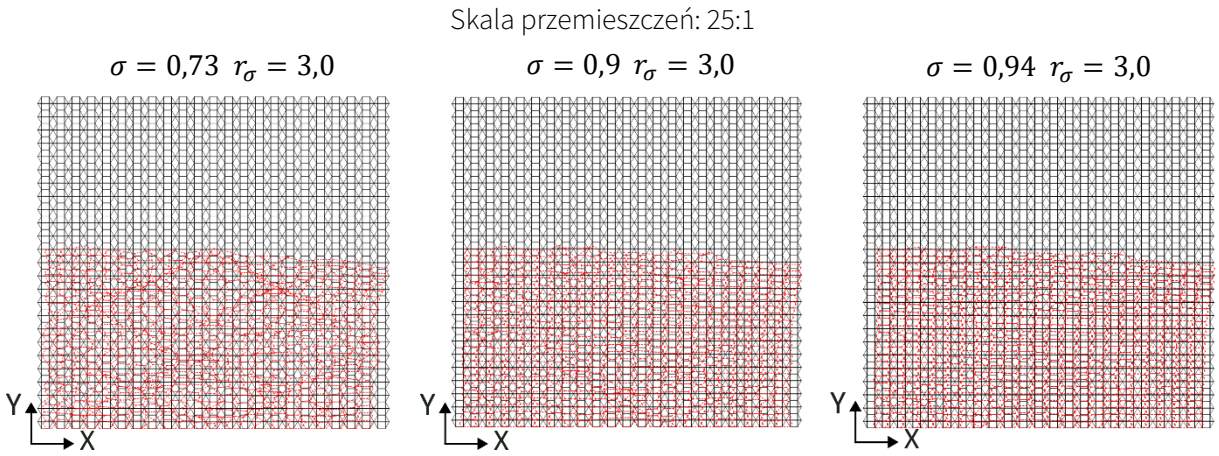
Tabela 7.1 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura sześciokątna typu I).

Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
Y	$\sigma = 0{,}09;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0264222$	$0{,}524831$
	$\sigma = 0{,}73;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}114307$	$-0{,}0543852$
	$\sigma = 0{,}8;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}110496$	$-0{,}0456953$
	$\sigma = 0{,}9; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}117661$	$-0{,}0797381$
	$\sigma = 0{,}94; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}117656$	$-0{,}079826$

Obserwując Rys. 7.18 który przedstawia przykładowe zachowanie struktury ściskanej w osi Y nie jesteśmy w stanie zauważyć efektu auksetycznego, dopiero przeskalowanie przemieszczeń 25-krotnie (Rys. 7.19) pozwala na zauważenie znacznego przemieszczenia węzłów do środka układu, co potwierdza ich auksetyczne zachowanie.



Rysunek 7.18 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).



Rysunek 7.19 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).

W przypadku ściskania względem osi X znaleziono znacznie większy zakres wartości, dla których uzyskano odpowiedź zgodną z zachowaniem metamateriału auksetycznego. Ponownie, wszystkie przypadki istniały dla stałej wartości współczynnika $r_\sigma = 3{,}0$. Przy ściskaniu względem osi X znaleziono rozwiązania w zakresach wartości σ: $[0{,}07;\ 0{,}09], [0{,}37; 0{,}59], [0{,}89; 1]$. Należy zauważyć, że dla wartości $\sigma = 0{,}09$ struktura zachowuje cechy auksetyczne w obu kierunkach, tak samo będzie w przypadku zakresu wartości $\sigma = [0{,}89; 0{,}94]$. Ponownie, odpowiedź układu jest niewielka w porównaniu do przemieszczeń zgodnych z kierunkiem siły. Przykładowe odpowiedzi struktury są przedstawione na Rys. 7.20 i 7.21.

Dla przypadku $\sigma = 0{,}9,\ r_\sigma = 3{,}0$ obliczono współczynnik Poissona na podstawie średniej wartości odkształcenia oraz minimalnych wartości przemieszczeń:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{-4{,}72336}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = -0{,}00237134$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{-34{,}5501}{23 \cdot 2 \cdot a} = -0{,}0300436$$

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{-0{,}00223521}{-0{,}018997} = -0{,}0789299$$

$$\varepsilon_{y,max} = \frac{\Delta l_{y,max}}{l_y} = \frac{-0{,}0804094}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = -0{,}00185698$$

$$\varepsilon_{x,max} = \frac{\Delta l_{x,max}}{l_x} = \frac{-1{,}37568}{23 \cdot 2 \cdot a} = -0{,}0299061$$

$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{y,max}}{\varepsilon_{x,max}} = -\frac{-0{,}00185698}{-0{,}0299061} = -0{,}0620936$$

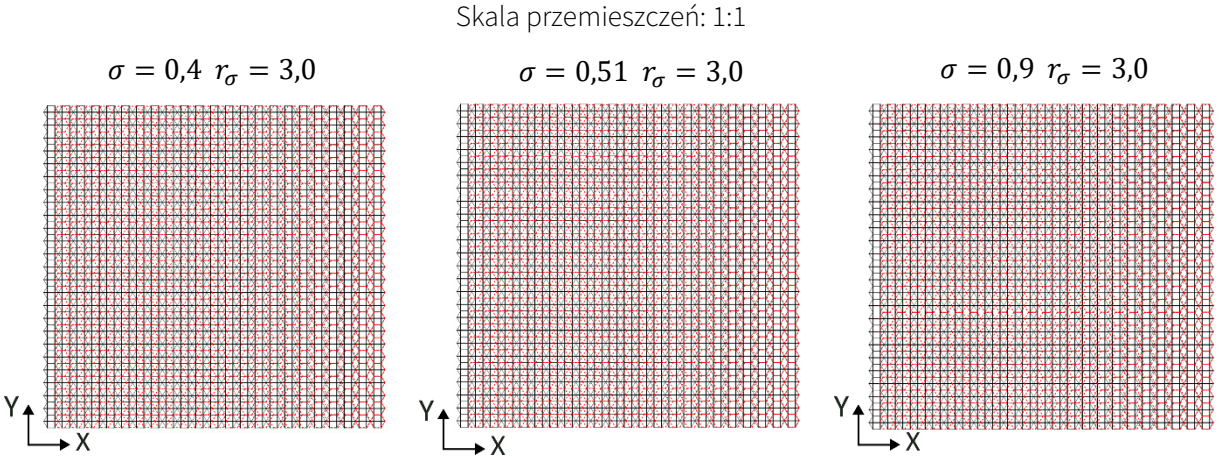
Obserwując wyniki zawarte w Tab. 7.2 możemy zauważyć, że przypadek $\sigma = 0{,}09;\ r_\sigma = 3{,}0$ ponownie odbiega od pozostałych przypadków, jednak zachowane są wartości ujemne współczynnika Poissona również w przypadku ν_{max}, mimo, że wartość jest o rząd mniejsza niż w przypadku obliczeń w wartości średnich przemieszczeń. Ciekawym przypadkiem jest zestaw współczynników $\sigma = 0{,}5; r_\sigma = 3{,}0$ – znajduje się on w środku przedziału współczynnika pozwalającego na uzyskanie struktur auksetycznych, jednak w przypadku obliczeń współczynnika ν_{max} uzyskujemy wartość dodatnią. W pozostałych przypadkach wartości współczynnika Poissona są do siebie zbliżone i niezależnie od sposobu obliczeń wahają się pomiędzy wartościami od -0,05 do -0,06. Uzyskane wartości wskazują na niewielki stopień zachowania auksetycznego.

Tabela 7.2 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi X (struktura sześciokątna typu I).

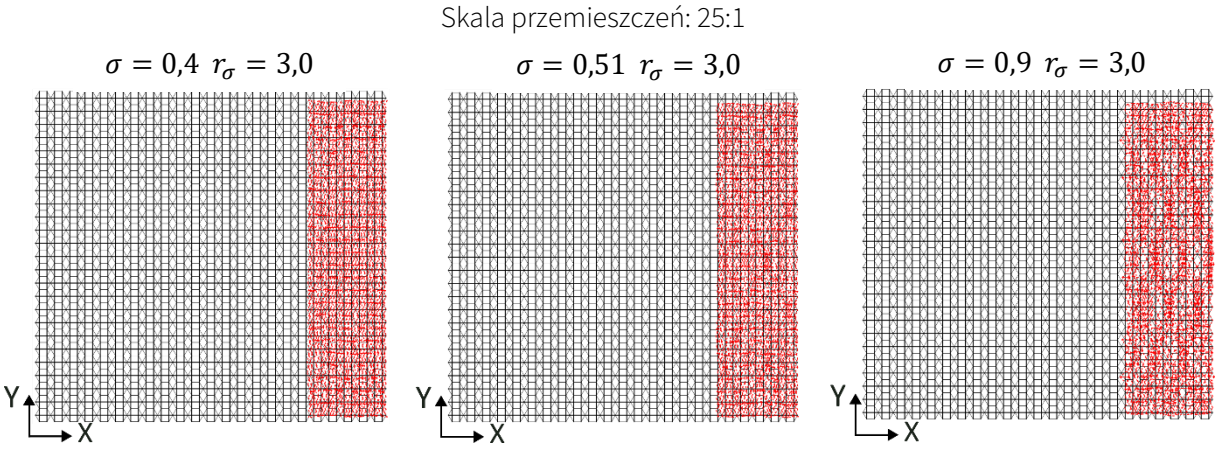
Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
X	$\sigma = 0{,}09;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0163047$	$-0{,}0018618$
	$\sigma = 0{,}4; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0609625$	$-0{,}0528166$
	$\sigma = 0{,}49; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0654143$	$-0{,}0567024$
	$\sigma = 0{,}5; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0674621$	$0{,}200849$

	$\sigma = 0{,}51; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0662846$	$-0{,}0569063$
	$\sigma = 0{,}9; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0789299$	$-0{,}0620936$

Wyniki obliczeń znajdują swoje potwierdzenie w Rys. 7.20 oraz 7.21, gdzie wymagane jest 25-krotne przeskalowanie przemieszczeń struktury, aby pokazać w znaczny sposób jej cechy auksetyczne. Przemieszczenia te są znacznie wyraźniejsze w przypadku ściskania w kierunku X, niż w kierunku Y, mimo, że za podstawowy kierunek wykazujący zachowania auksetyczne użytego wzoru uznaje się kierunek ściskania Y.



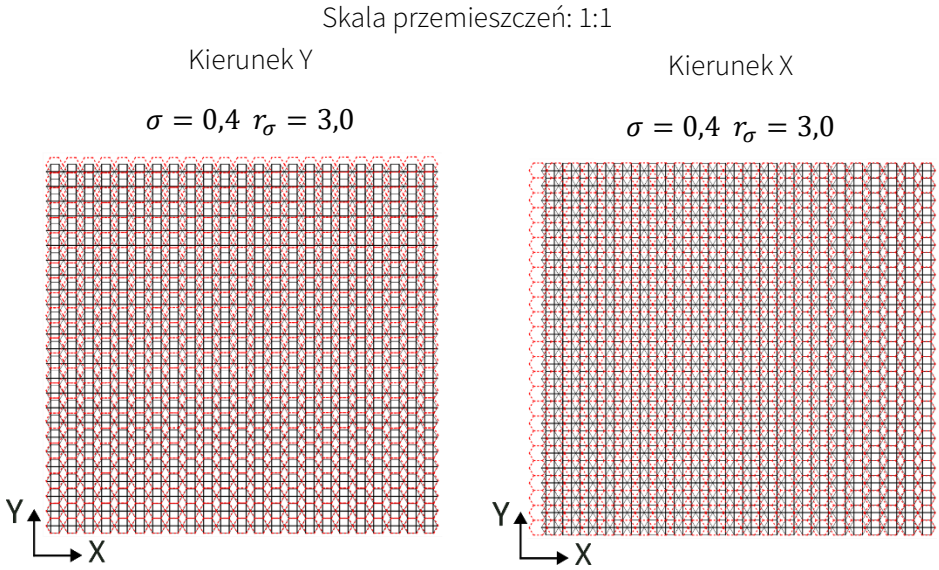
Rysunek 7.20 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).



Rysunek 7.21 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).

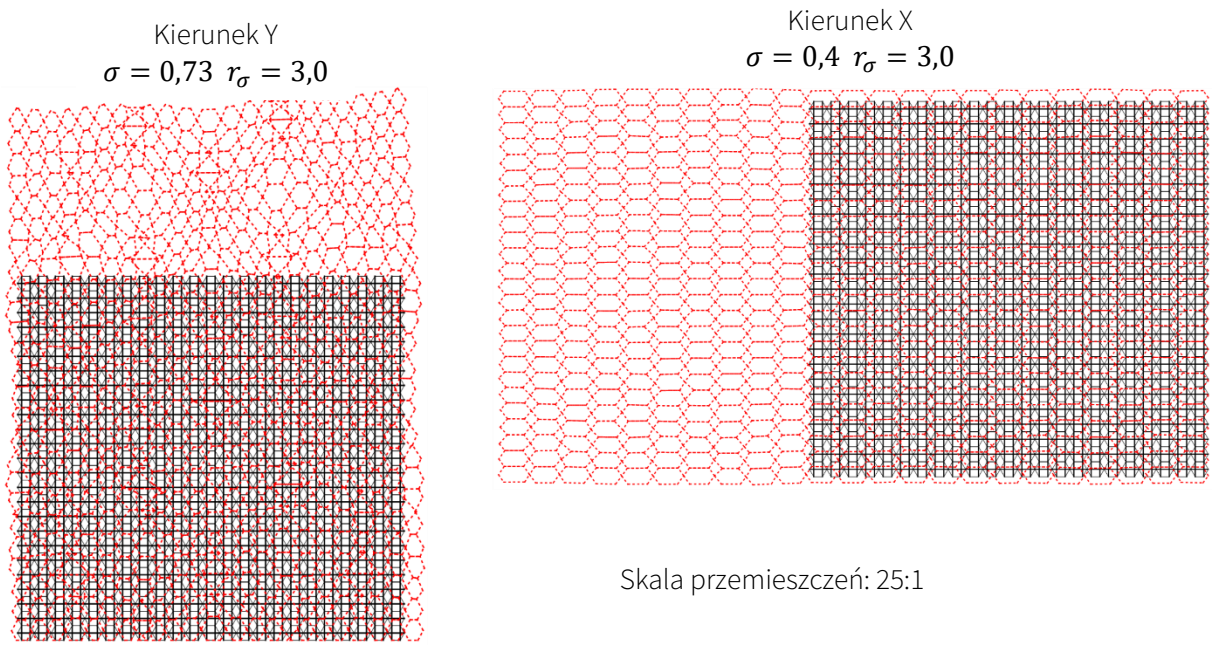
Dokonano również sprawdzenia zachowania struktur pod wpływem rozciągania dla wyżej wymienionych parametrów – w każdym z przypadków wykazywały one również zachowanie auksetyczne i pod wpływem siły rozciągającej rozszerzały się w kierunku poprzecznym (Rys. 7.22

– po jednym przykładzie dla każdego z kierunków bez przeskalowanych przemieszczeń oraz Rys. 7.23 z 25-krotnym przeskalowaniem przemieszczeń).



Rysunek 7.22 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).

Wykonano również obliczenia wartości współczynnika Poissona dla wybranych struktur w przypadku rozciągania. Przy rozciąganiu w obu kierunkach wartości te są ujemne – w przypadku rozciągania w kierunku Y wartości są zbliżone do przypadku rozciągania, zaś w przypadku rozciągania w kierunku Y wartość ν_{max} jest znacznie większa niż w przypadku ściskania układu.



Rysunek 7.23 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).

W przypadku rozciągania w kierunku X:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{3{,}77602}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = 0{,}0820875$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1{,}43045}{23 \cdot 2 \cdot a} = 0{,}0310966$$

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{0{,}0820875}{0{,}0310966} = -0{,}0609625$$

$$\varepsilon_{y,max} = \frac{\Delta l_{y,max}}{l_y} = \frac{0{,}0966839}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = 0{,}00223282$$

$$\varepsilon_{x,max} = \frac{\Delta l_{x,max}}{l_x} = \frac{1{,}43422}{23 \cdot 2 \cdot a} = 0{,}0311787$$

$$\nu_{miax} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{y,max}}{\varepsilon_{x,max}} = -\frac{0{,}00223282}{0{,}0311787} = -0{,}0716136$$

W przypadku rozciągania w kierunku Y:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{0{,}82378}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = 0{,}0190244$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{0{,}100032}{23 \cdot 2 \cdot a} = 0{,}00217462$$

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{0{,}00217462}{0{,}0190244} = -0{,}114307$$

$$\varepsilon_{y,max} = \frac{\Delta l_{y,max}}{l_y} = \frac{0{,}893822}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}} = 0{,}0206419$$

$$\varepsilon_{x,max} = \frac{\Delta l_{x,max}}{l_x} = \frac{0{,}145437}{23 \cdot 2 \cdot a} = 0{,}00316167$$

$$\nu_{min} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{x,max}}{\varepsilon_{y,max}} = -\frac{0{,}00316167}{0{,}0206419} = -0{,}153167$$

Typ II

W przypadku struktury sześciokątnej typu II znalezienie parametrów, dla których metamateriał przedstawiał zachowanie auksetyczne było znacznie trudniejsze. Względem osi X nie zaobserwowano takiego zachowania w żadnym z przypadków, za każdym razem struktura

pod wpływem ściskania doznawała rozszerzenia w kierunku poprzecznym (co wskazuje na dodatnią wartość współczynnika Poissona). W przypadku ściskania względem osi Y znaleziono kilka przypadków, w których struktura prezentowała zachowanie metamateriałów auksetycznych – były to tylko przypadki przedstawione na Rys. 7.24 i 7.25 oraz w Tab. 7.3.

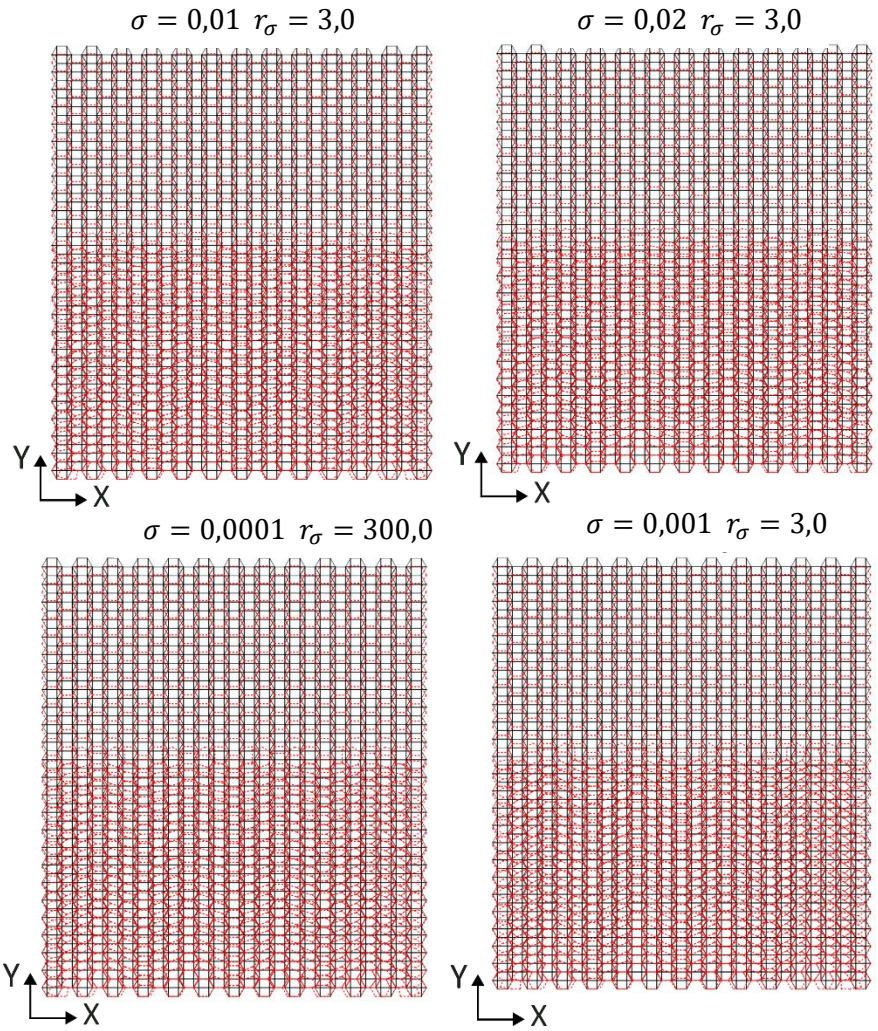
Obserwując wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} można zauważyć, że są one do siebie zbliżone analogicznie do przypadku struktury sześciokątnej typu I – wartości różnią się w niewielkim stopniu, często przy przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej uzyskano podobną wartość. Wyniki w przypadku tego układu są znacznie bardziej stabilne, jednak pozwala ona na uzyskanie zaledwie kilku przypadków. Wartość współczynnika Poissona waha się od -0,03 do -0,06, co ponownie wskazuje na niewielkie cechy auksetyczne.

Tabela 7.3 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura sześciokątna typu II).

Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
Y	$\sigma = 0{,}001;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}058098$	$-0{,}0544961$
	$\sigma = 0{,}01;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0437172$	$-0{,}0403686$
	$\sigma = 0{,}02;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0300142$	$-0{,}0270646$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 300{,}0$	$-0{,}0489897$	$-0{,}0443152$

W przypadku struktury sześciokątnej typu II obserwując Rys. 7.24 i 7.25 (bez przeskalowania przemieszczeń oraz z 25-krotnym przeskalowaniem przemieszczeń) można zauważyć jak niewielkie są przemieszczenia w kierunku poprzecznym – zachowanie auksetyczne pojawia się, lecz w niewielkim stopniu.

Dokonano również sprawdzenia zachowania metamateriału pod wpływem rozciągania w wybranych przypadkach – tutaj, analogicznie do poprzedniego układu, struktura również przy rozciąganiu zachowywała się jak metamateriał auksetyczny i doznawała rozszerzenia w kierunku poprzecznym (przykład na Rys. 7.26).

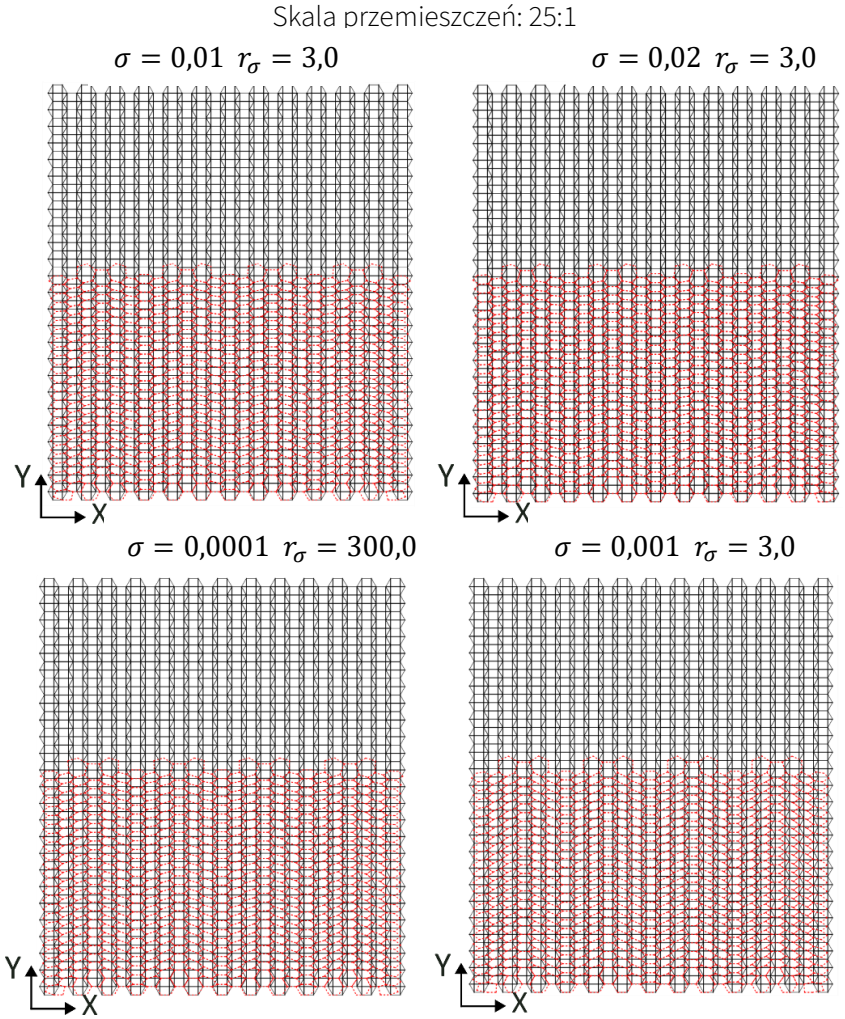


Rysunek 7.24 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).

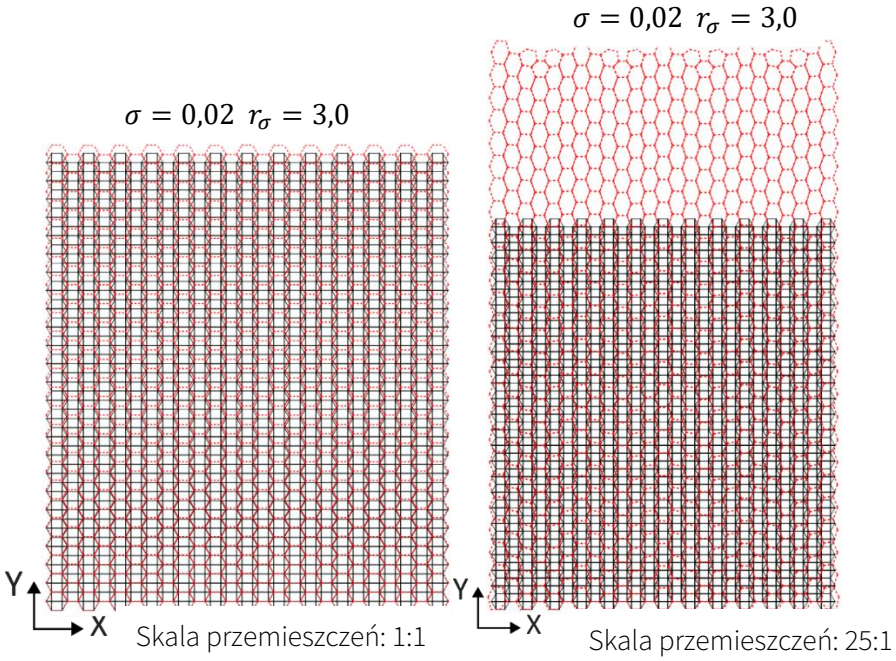
W kierunku Y zaobserwowano następujące wartości współczynnika Poissona (zbliżone do przypadku ściskania):

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{\Delta l_x}{l_x}}{\frac{\Delta l_y}{l_y}} = -\frac{\frac{0{,}0199966}{23 \cdot 2 \cdot a}}{\frac{0{,}759182}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}}} = -\frac{0{,}000526226}{0{,}0175326} = -0{,}0300142$$

$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{x,max}}{\varepsilon_{y,max}} = -\frac{\frac{\Delta l_{x,max}}{l_x}}{\frac{\Delta l_{y,max}}{l_y}} = -\frac{\frac{0{,}0227728}{23 \cdot 2 \cdot a}}{\frac{0{,}790601}{25 \cdot a \cdot \sqrt{3}}} = -\frac{0{,}000599284}{0{,}0182581} = -0{,}0328228$$



Rysunek 7.25 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).



Rysunek 7.26 Przykładowe wyniki rozciągania w Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (po lewej: przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1, po prawej: przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).

Struktury zbudowane z modułów ośmiokątnych

Typ I

Struktura ośmiokątna typu I przy ściskaniu w kierunku X nie wykazywała zachowania charakterystycznego dla metamateriałów auksetycznych. Przy ściskaniu w kierunku Y jednak można zauważyć szeroki zakres parametrów, dla których struktura wykazywała takie zachowania. W przypadku analizy dla stałej wartości współczynnika $r_\sigma = 3{,}0$ metamateriał wykazywał te cechy dla następujących wartości σ: $0{,}09;\ 0{,}1;\ 0{,}25$ oraz dla zakresu $[0{,}45;\ 1{,}0]$. Ponadto struktura wykazała również te cechy w przypadku analizy zmiennej wartości r_σ – przy stałej wartości $\sigma = 0{,}0001$ struktura wykazała takie zachowanie dla przypadków r_σ od 20000 do 150000. Przykładowe wyniki zachowania metamateriału pod wpływem ściskania zostały przedstawione na Rys. 7.27 i 7.28 – w tym przypadku przemieszczenia w kierunku poprzecznym do kierunku obciążania są znacznie mniejsze i wymagały 25-krtonego powiększenia, aby były widoczne na rysunkach.

Wartości współczynników Poissona są analogiczne jak w dwóch wcześniejszych przypadkach – rzędu setnych części (Tab. 7.4). Jak we wcześniejszych przypadkach, tutaj również zauważamy, że wartości ν_{max} jest mniejsza od wartości ν_{mean}, różnice te jednak nie mają żadnego stałego wzorca, są bardzo zmienne. Wartość współczynnika waha się od -0,02 do -0,06 w zależności od przypadku.

Tabela 7.4 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{max} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura ośmiokątna typu I).

Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
Y	$\sigma = 0{,}1;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0219846$	$-0{,}00150843$
	$\sigma = 0{,}25;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0422763$	$-0{,}0166836$
	$\sigma = 0{,}45; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0526913$	$-0{,}0242779$
	$\sigma = 0{,}6; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0556008$	$-0{,}0468007$
	$\sigma = 0{,}9; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0596481$	$-0{,}0377128$

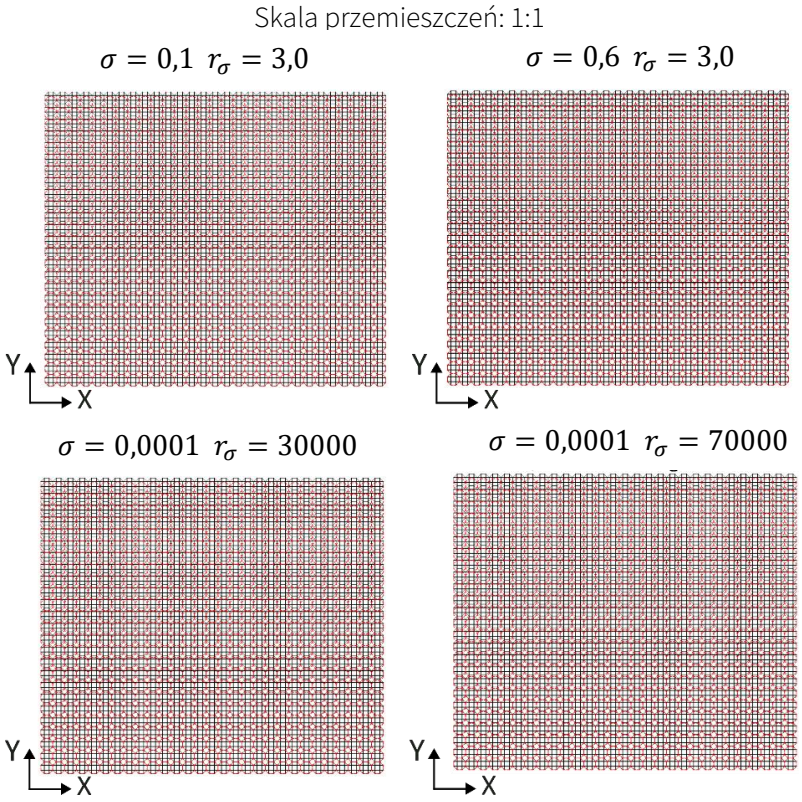
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 30000{,}0$	$-0{,}0222468$	$-0{,}0151797$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 70000{,}0$	$-0{,}0252684$	$-0{,}0169048$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 120000{,}0$	$-0{,}0245717$	$-0{,}0172031$

Struktura, jak we wcześniejszych analizach, została również sprawdzona w przypadku rozciągania i zachowała swoje cechy auksetyczne – przykład został przedstawiony na Rys. 7.29. Tutaj również, aby zauważyć wpływ zachowania auksetycznego wymagane było znaczne przeskalowanie przemieszczeń. Wartości współczynnika Poissona również w przypadku rozciągania są niewielkie, obliczono wartości dla przykładu przedstawionego na Rys. 7.29, w kierunku Y uzyskano następujące wartości :

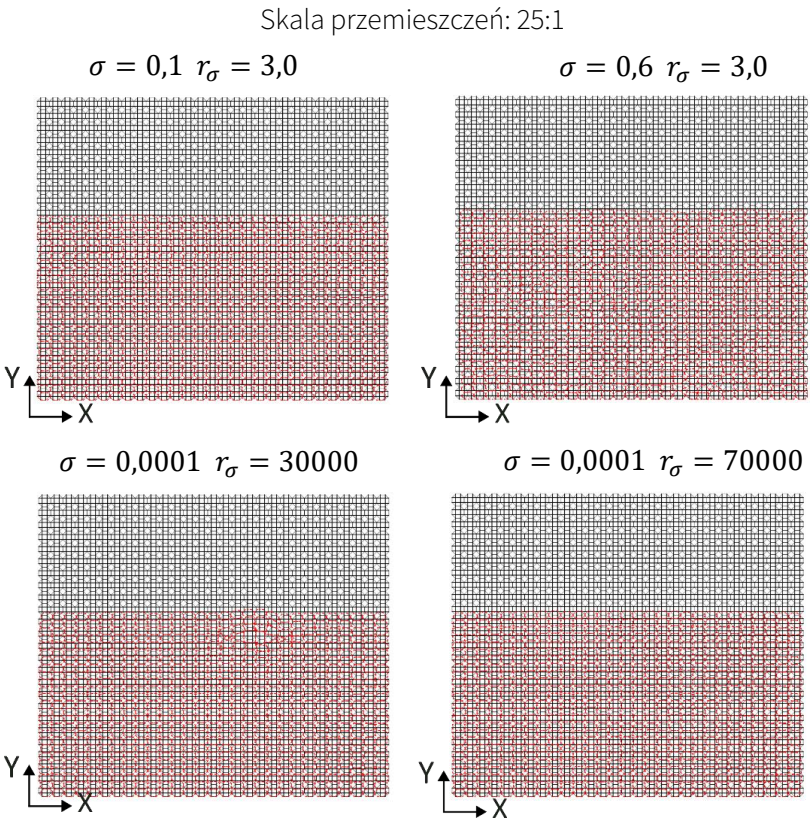
$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{\Delta l_x}{l_x}}{\frac{\Delta l_y}{l_y}} = -\frac{\frac{0{,}0240329}{23 \cdot 2 \cdot a}}{\frac{0{,}942387}{25 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}} = -\frac{0{,}000343267}{0{,}015614} = -0{,}0219846$$

$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{x,max}}{\varepsilon_{y,max}} = -\frac{\frac{\Delta l_{x,max}}{l_x}}{\frac{\Delta l_{y,max}}{l_y}} = -\frac{\frac{0{,}0429286}{23 \cdot 2 \cdot a}}{\frac{0{,}949893}{29 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}} = -\frac{0{,}000613159}{0{,}0157383}$$

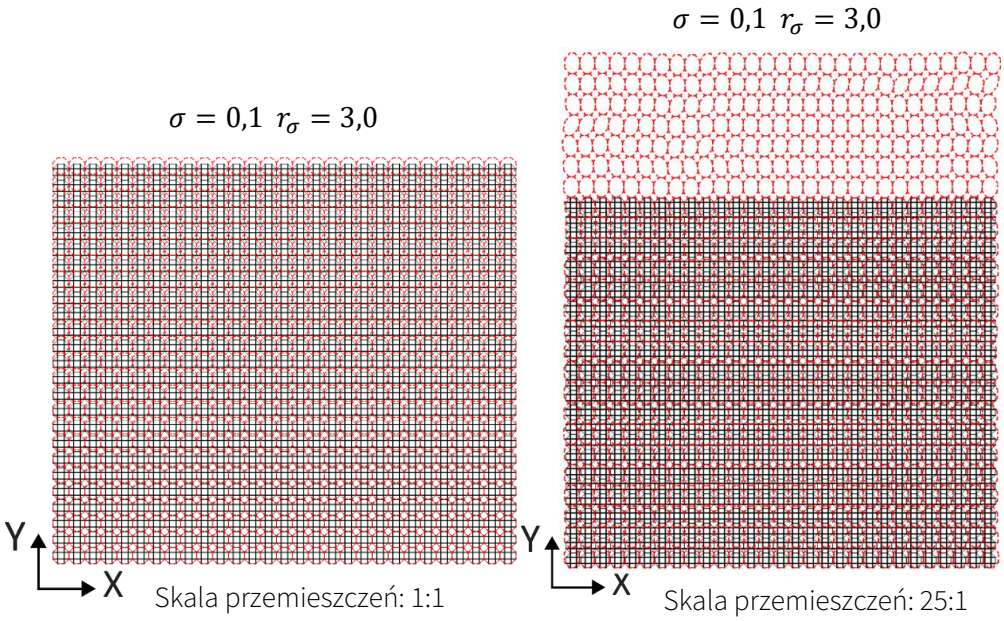
$$= -0{,}0389596$$



Rysunek 7.27 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).



Rysunek 7.28 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).



Rysunek 7.29 Przykładowe wyniki rozciągania w Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury struktury ośmiokątnej typu I (po lewej: przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1, po prawej: przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu).

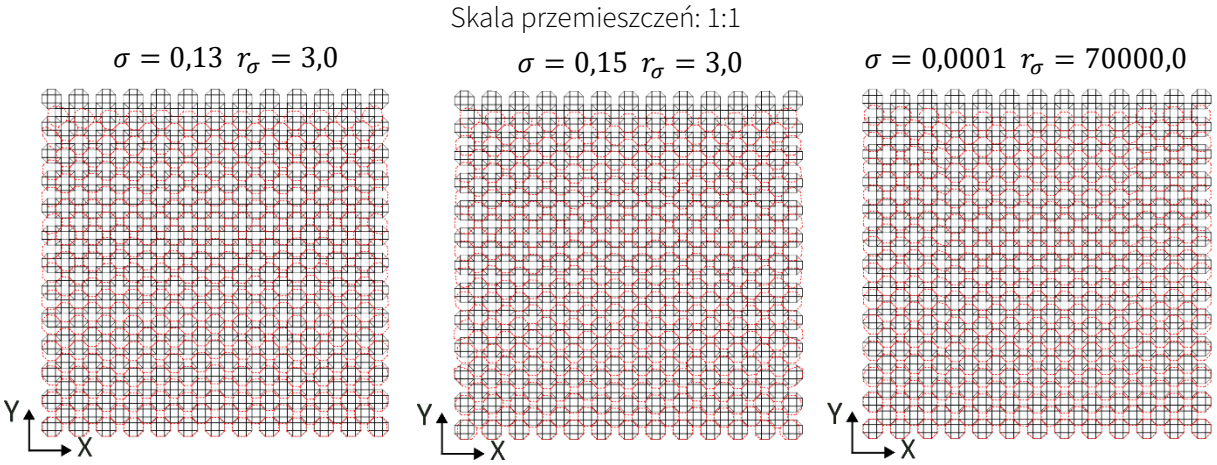
Typ II

Struktura ośmiokatna typu II wykazywała zachowanie auksetyczne w przypadku ściskania w obu kierunkach, jednak było to zaledwie kilka przypadków przedstawionych na przykładach na Rys. 7.30. W przypadku ściskania względem osi Y takie zachowanie metamateriał wykazał dla przypadku stałej wartości $r_\sigma = 3{,}0$ dla zakresu $\sigma = [0{,}11; 0{,}15]$ oraz dla zestawu parametrów $\sigma = 0{,}0001,\ r_\sigma = [70000; 90000]$. Wartości dla wybranych par współczynników σ, r_σ z podanych zakresów przedstawiono w Tab. 7.5. Tutaj zaskoczeniem jest fakt, że w przypadku zakresu $\sigma = [0{,}11; 0{,}15]$ uzyskano wartość ν_{mean} większą o cały rząd wartości, w przypadku zestawu parametrów $\sigma = 0{,}0001,\ r_\sigma = [70000; 90000]$ wartości jednak były ponownie zgodne z wcześniejszymi przypadkami. Wartości ν_{max} są jednak rzędu wartości zgodnego z poprzednimi przypadkami. Warto zauważyć, że dla pary współczynników $\sigma = 0{,}11;\ r_\sigma = 3{,}0$ wartość współczynnika Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń jest dodatnia.

Tabela 7.5 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{min} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura ośmiokątna typu II).

Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
Y	$\sigma = 0{,}11;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}119572$	$0{,}00920903$
	$\sigma = 0{,}13;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}157973$	$-0{,}055425$
	$\sigma = 0{,}15;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}183756$	$-0{,}0492833$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 70000$	$-0{,}0275538$	$-0{,}0670993$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 90000$	$-0,0699966$	$-0{,}0219703$

Struktura ośmiokątna typu II jako jedyna uzyskuje na tyle duże wartości przemieszczeń w kierunku równoległym do obciążenia, które nie pozwalają ich przedstawiać w skali większej niż 1:1. Zachowanie to jest niezależne od przypadku i uzyskanych wartości współczynnika Poissona (Rys. 7.30).



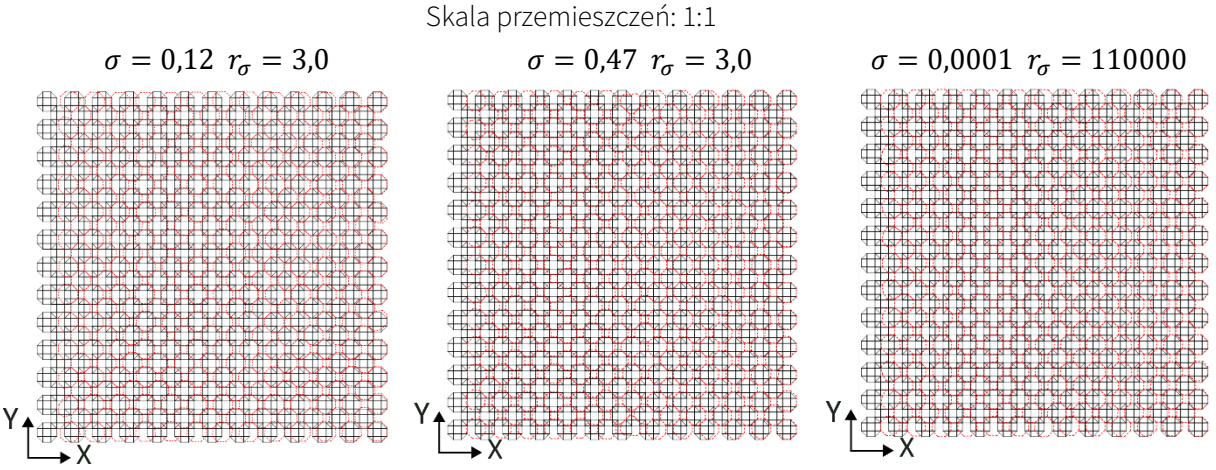
Rysunek 7.30 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).

W przypadku ściskania względem osi X struktura również wykazuje cechy auksetyczne, ale również dla pojedynczych zestawów parametrów – są to cztery zestawy, które wykryto

w poszukiwanych zakresach: $\sigma = 0{,}12, r_\sigma = 3{,}0$; $\sigma = 0{,}47, r_\sigma = 3{,}0$; $\sigma = 0{,}59, r_\sigma = 3{,}0$; $\sigma = 0{,}0001, r_\sigma = 110000$. Metamateriały, w których wykryto zachowanie auksetyczne pod wpływem ściskania zostały również sprawdzone w przypadku rozciągania – każda ze struktur przy takim obciążeniu doznała również rozciągania w kierunku poprzecznym (przykłady na Rys. 7.31). W przypadku ściskania w kierunku X metamateriały na bazie struktury ośmiokątnej typu II uzyskujemy wartości współczynnika Poissona rzędu zgodnego z przypadkami metamateriałów na bazie innych układów modularnych – wartości wahają się od -0,1 do -0,8 w zależności od sposobu obliczania współczynnika Poissona (Tab. 7.6). Ponownie wartości $\nu_{mean} > \nu_{max}$, w przypadku zestawu współczynników $\sigma = 0{,}59; r_\sigma = 3{,}0$ wartość ν_{max} jest dodatnia, nie można uznać zatem w tym przypadku metamateriału za auksetyczny.

Tabela 7.6 Wartości współczynników ν_{mean}, ν_{min} dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi X (struktura ośmiokątna typu II).

Ściskanie w kierunku	Para współczynników σ, r_σ	Współczynnik Poissona z wartości średnich przemieszczeń ν_{mean}	Współczynnik Poissona z wartości minimalnych przemieszczeń ν_{max}
X	$\sigma = 0{,}12;\ r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0534281$	$-0{,}0126097$
	$\sigma = 0{,}47; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0783913$	$-0{,}0328586$
	$\sigma = 0{,}59; r_\sigma = 3{,}0$	$-0{,}0898481$	$0{,}14647$
	$\sigma = 0{,}0001; r_\sigma = 110000$	$-0{,}0359083$	$0{,}00399282$



Rysunek 7.31 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).

Sprawdzono również strukturę w przypadku rozciągania dla dwóch przypadków: w kierunku X pary współczynników $\sigma = 0{,}47, r_\sigma = 3{,}0$ oraz w kierunku Y pary współczynników $\sigma = 0{,}13, r_\sigma = 3{,}0$ (Rys. 7.32). Zachowanie metamateriałów odpowiadało zachowaniu w przypadku ściskania, należy jednak zauważyć, że rozciąganie w kierunku Y pozwala uzyskać wartość $\nu_{max} = -0{,}5$. W przypadku rozciągania w kierunku X uzyskano następujące wartości:

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\frac{\Delta l_y}{l_y}}{\frac{\Delta l_x}{l_x}} = -\frac{\frac{0{,}259724}{25 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}}{\frac{2{,}38158}{13 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2}) + 12 \cdot a}} = -\frac{0{,}0043032}{0{,}0548938}$$

$$= -0{,}0783913$$

$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{y,min}}{\varepsilon_{x,min}} = -\frac{\frac{\Delta l_{y,min}}{l_y}}{\frac{\Delta l_{x,min}}{l_x}} = -\frac{\frac{1{,}12062}{25 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}}{\frac{2{,}48234}{13 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2}) + 12 \cdot a}} = -\frac{0{,}0185669}{0{,}0572162}$$

$$= -0{,}24503$$

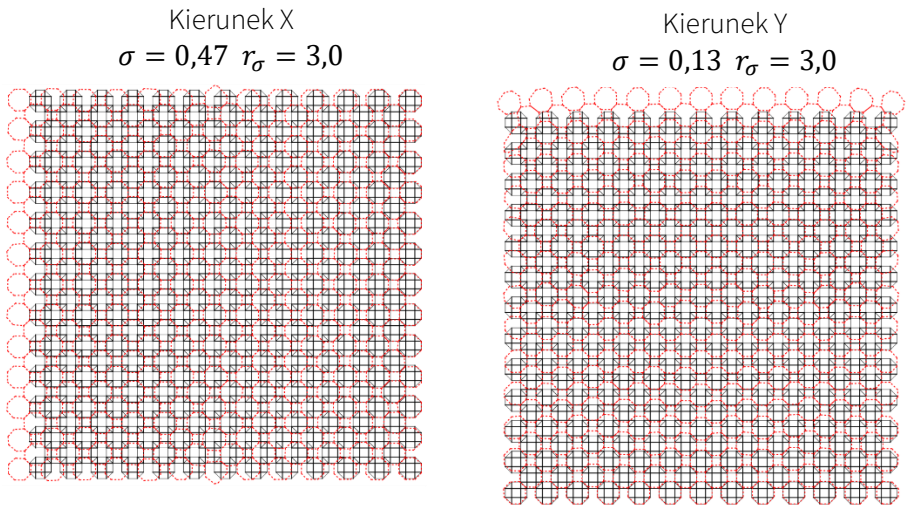
W przypadku rozciągania w kierunku Y uzyskano zaś wartości:

$$\nu_{mean} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = -\frac{\frac{\Delta l_x}{l_x}}{\frac{\Delta l_y}{l_y}} = -\frac{\frac{0{,}296228}{13 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2}) + 12 \cdot a}}{\frac{2{,}60868}{25 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}} = -\frac{0{,}00682785}{0{,}0432217}$$

$$= -0{,}157973$$

$$\nu_{max} = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} = -\frac{\varepsilon_{x,min}}{\varepsilon_{y,min}} = -\frac{\frac{\Delta l_{x,min}}{l_x}}{\frac{\Delta l_{y,min}}{l_y}} = -\frac{\frac{1{,}0319}{13 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2}) + 12 \cdot a}}{\frac{2{,}80325}{25 \cdot a \cdot (1+\sqrt{2})}} = -\frac{0{,}0237845}{0{,}0464453}$$

$$= -0{,}512098$$



Rysunek 7.32 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1).

7.3.4. Podsumowanie

W powyższych analizach wykazano, że możliwe jest wykonanie adaptowalnego metamateriału auksetycznego z wykorzystaniem modułów tensegrity, jednak proces poszukiwania rozwiązania jest obarczony trudnością związaną z niestabilnością wyników w przypadku większości zaproponowanych struktur, co znacząco ogranicza możliwość praktycznego zastosowania tych rozwiązań. Przeszukiwanie obszaru rozwiązań jest czasochłonne, wykazane wartości par współczynników nie zawsze pozwalają na uzyskanie metamateriału auksetycznego – wartość ν_{max} jest trudniejsza do uzyskania. Ponadto, wartość współczynnika Poissona w analizowanych przypadkach rzadko przekraczała wartość -0,08, pozostawała w zakresie rzędu części setnych.

Należy zauważyć, że w przypadku struktury sześciokątnej typu II oraz ośmiokątnej typu II znaleziono zaledwie kilka przypadków, w których metamateriały zachowały cechy auksetyczne. W przypadku struktury ośmiokątnej typu I cechy auksetyczne były zauważalne jedynie w przypadku obciążania w jednym z kierunków - uznawanym za główny kierunek obciążania komórki o kształcie wklęsłego plastra miodu (*2D re-entrant honeycomb*). W przypadku struktury sześciokątnej typu I zakres parametrów, w którym układ wykazywał cechy auksetyczne był mniejszy niż w przypadku struktury ośmiokątnej, ale metamateriał ten wykazywał te cechy w obu kierunkach obciążenia. Ponadto, zauważono, że w celu uzyskania struktur auksetycznych znacznie lepszym podejściem jest wykorzystanie niewielkiej różnicy sił sprężających pomiędzy modułami modelującymi materiał a modułami modelującymi pustkę – pozwalają na uzyskanie

bardziej stabilnych zakresów wartości parametrów. Jednak w takim przypadku uzyskujemy strukturę, która jest nieznacznie wzmocniona w danych obszarach, nie podzielona na obszary materiału i pustki. Należy zauważyć, że w przypadku projektowania metamateriałów o cechach adaptowalnych należy wybierać układy modularne tensegrity o większej podatności (typ I), ponieważ pozwalają one na większe zmiany wewnątrz struktury oraz w naturalny sposób są mniej sztywne.

Obserwując wyniki powyższych analiz zauważono, że potrzebne jest szersze opracowanie badań dotyczących zakresu oraz możliwości wykonania adaptowalnych metamateriałów auksetycznych, szczególnie istotne może być badanie znacznie większych struktur z gęstszym wzorem co pozwoli na lepsze odwzorowanie continuum materiału.

8. Podsumowanie pracy

8.1. Wnioski

Celem niniejszej pracy było zbadanie możliwości wykorzystania inteligentnego szkieletu opartego na wynikach optymalizacji topologicznej w celu wzmocnienia struktury tensegrity tak, aby odpowiadała w sposób lepszy niż konstrukcja jednolicie wzmocniona (dla każdego przypadku obciążeń). Drugim głównym celem było zbadanie możliwości wykorzystania inteligentnego szkieletu opartego na wzorach metamateriałów auksetycznych w celu uzyskania struktury odpowiadającej auksetycznie w przypadku ściskania/rozciągania. Zrealizowano założone zadania związane z zbudowaniem bazy modułów oraz struktur tensegrity do kreowania konstrukcji i metamateriałów z inteligentnym szkieletem wewnętrznym, a także opracowaniem algorytmu służącego do budowy struktur, wprowadzenia do nich inteligentnego szkieletu oraz ich późniejszej analizy. W trakcie analiz dokonano porównania odpowiedzi konstrukcji wzmocnionej równomiernie z odpowiedzią konstrukcji wzmocnionej za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego w przypadku różnych obciążeń w celu oceny możliwości zastosowania takiego rozwiązania oraz zbadano wpływ rozmiaru konstrukcji na możliwość zastosowania inteligentnego szkieletu wewnętrznego w konstrukcjach tensegrity w przypadku zastosowania szkieletu opartego o wyniki optymalizacji topologicznej. Wykonano również analizę możliwych zastosowań konstrukcji z inteligentnym szkieletem wewnętrznym na podstawie wybranych przykładów konstrukcji. Oceniono też odpowiedź struktury wzmocnionej za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego opartego na wzorze metamateriału auksetycznego w przypadku ściskania i rozciągania w celu oceny możliwości zastosowania powyższego rozwiązania.

Wykonane analizy potwierdziły prawdziwość tezy: **obszarowe wzmacnianie konstrukcji tensegrity inteligentnym szkieletem opartym na wynikach optymalizacji topologicznej umożliwia uzyskanie rozwiązania lepszego niż w przypadku wzmocnienia jednorodnego dostosowanego do występujących zmiennych sytuacji obliczeniowych.** Możliwe jest zatem odtworzenie wyników uzyskanych za pomocą optymalizacji topologicznej w pełnych strukturach (bez usuniętych modułów) poprzez wprowadzanie wysokich wartości sił samonaprężających do poszczególnych modułów (imitując obszary materiału) przy

jednoczesnym pozostawieniu reszty modułów z wprowadzoną bardzo małą lub zerową wartością *self-stressu* (modelowanie obszarów pustek). Wzmocnienie można również wprowadzić poprzez zmianę geometrii w pojedynczych modułach zmieniając przekroje poszczególnych prętów. Pierwsza metoda pozwala na aktywną odpowiedź struktury w trakcie użytkowania, druga zaś pozwala na wykorzystanie inteligentnego szkieletu na etapie budowy konstrukcji. W przypadku drugiej części tezy została ona częściowo potwierdzona: Obszarowe wzmacnianie metamateriałów tensegrity inteligentnym szkieletem opartym na wzorach struktur auksetycznych pozwala uzyskać odpowiedź auksetyczną na działające siły ściskające i rozciągające. Udało się uzyskać odwzorowanie metamateriały auksetycznej za pomocą zmiennej wartości *self-stressu*, jednak otrzymane wyniki były niestabilne. Właściwości auksetyczne wystąpiły jedynie w kilku przypadkach i miały ograniczony charakter, na co wskazują niewielkie wartości współczynnika Poissona. Sugeruje to, że zastosowana metoda posiada pewien potencjał w zakresie projektowania struktur auksetycznych, jednak wymaga dalszego dopracowania w celu poprawy stabilności i powtarzalności otrzymywanych rezultatów.

Otrzymane wyniki sugerują zatem, że możliwe jest projektowanie konstrukcji zdolnych do aktywnej adaptacji do warunków obciążenia. Sugeruje to potencjał opracowania struktur tensegrity o aktywnym, adaptacyjnym charakterze, w których rozmieszczenie wzmocnień jest odpowiedzią na aktualne warunki obciążenia, a nie kompromisem wynikającym z konieczności spełnienia wielu przewidywanych scenariuszy pracy. Adaptowalne konstrukcje tensegrity mogą być wykorzystywane w licznych rozwiązaniach i konstrukcjach, w szczególności tych o znaczących walorach estetycznych i architektonicznych. Wśród najpopularniejszych znajdują się konstrukcje wolnostojące oraz tymczasowe, jak na przykład pawilony wystawowe, wiaty przystankowe, sceny koncertowe. Warto także wspomnieć, że powyższe rozwiązanie pozwala na zwiększenie bezpieczeństwa użytkowania konstrukcji ze względu na jej adaptowalność do często nieprzewidzianych warunków, od prostych przypadków gwałtownych śnieżyc po wymaganie wykorzystania w warunkach ekstremalnych, na przykład konstrukcje podwodne. Możliwe jest także wykorzystanie ich w bardziej futurystycznych rozwiązaniach, na przykład w budownictwie kosmicznym.

W przypadku projektowania metamateriałów o zmiennych cechach mechanicznych (cechach auksetycznych) uzyskane rezultaty potwierdzają możliwość generowania takich struktur, lecz jednocześnie wskazują na potrzebę dalszej analizy powyższej metody. Potencjał takich układów modularnych może być szczególnie istotny ze względu na ich zdolność do adaptacji do zmiennych, a niekiedy ekstremalnych warunków pracy. Płaskie metamateriały o takich właściwościach mogłyby nie tylko wykazywać cechy auksetyczne, lecz również pełnić funkcję inteligentnych warstw ochronnych, zdolnych do dostosowywania swojej odpowiedzi mechanicznej do rodzaju i intensywności oddziaływań zewnętrznych. W praktyce mogłyby znaleźć zastosowanie jako bariery ochronne, osłony energochłonne lub adaptacyjne pokrycia elementów narażonych na uderzenia, drgania oraz obciążenia dynamiczne. Przykładem mogą być osłony infrastruktury technicznej, powłoki zabezpieczające elementy pojazdów, warstwy ochronne w konstrukcjach lotniczych i kosmicznych, a także systemy tłumienia drgań i pochłaniania energii w obiektach budowlanych. Dzięki możliwości lokalnej reorganizacji pracy struktury materiały tego typu mogłyby skuteczniej rozpraszać energię, ograniczać propagację uszkodzeń oraz zwiększać odporność chronionych elementów na obciążenia udarowe i cykliczne.

Analizy pozwoliły również odpowiedzieć na postawione na początku pracy pytania badawcze:

Czy możliwe jest odwzorowanie kształtu konstrukcji optymalnych topologicznie lub struktur auksetycznych w ciągłych i jednolitych konstrukcjach modularnych tensegrity?

Tak jak wspomniano powyżej, możliwe jest odwzorowanie zarówno kształtu konstrukcji optymalnych topologicznie, jak i metamateriałów auksetycznych w ciągłych konstrukcjach modularnych tensegrity. Badania potwierdziły, że można wykonać to na dwa sposoby: poprzez wprowadzenie niewielkich różnic pomiędzy obszarami imitującymi materiał i pustkę, jak również poprzez wprowadzenie znacznych różnic, gdzie moduły imitujące pustkę uznawane są za niesprężone wstępnie ze względu na bardzo niską wartość *self-stressu*. Ponadto, analizy udowodniły, że możliwe jest wprowadzenie szkieletu również poprzez manipulację geometrią struktury zmieniając przekroje prętów (współczynnik r_k, r_m). Obie te metody pozwalają na uzyskanie konstrukcji odpowiadającej w sposób lepszy niż w przypadku konstrukcji wzmocnionej równomiernie. W przypadku wzmocnienia wzorem znanym z metamateriałów auksetycznych struktura w niektórych przypadkach uzyskuje cechy auksetyczne.

W jaki sposób inteligentny szkielet wewnętrzny wpłynie na zachowanie struktury tensegrity?

W przypadku wykonania adaptowalnej struktury auksetycznej proces poszukiwania rozwiązania jest obarczony trudnością związaną z niestabilnością wyników w przypadku większości zaproponowanych układów, pojawiały się natomiast przypadki, w których uzyskiwano metamateriały o niewielkich cechach auksetycznych. Inteligentny szkielet wewnętrzny w przypadku odwzorowywania kształtu konstrukcji optymalnych topologicznie pozwalał na uzyskanie przemieszczeń o niższej wartości niż w przypadku jednolitej konstrukcji. Wprowadzenie takich obszarów wzmocnionych i osłabionych pozwala na zmniejszenie przemieszczeń struktury poprzez zwiększenie jej sztywności zarówno w przypadku konstrukcji zbudowanych z modułów płaskich (struktury typu tarczowego), jak i modułów przestrzennych (struktury typu płytowego). Jest to możliwe do wykonania zarówno poprzez zwiększenie sprężenia wstępnego konstrukcji, jak i również pod wpływem zmiany oryginalnej geometrii struktury – zwiększenie przekrojów wybranych prętów. Ważnym jest jednak zauważenie, że przemieszczenia w przypadku modelowania obszarów wypełnionych materiałem i obszarów pustki są znacznie większe niż w przypadku lekkiego wzmacniania konstrukcji (niewielkich wartości współczynnika r_σ). Sam wpływ poszczególnych współczynników r_σ, r_k, r_m jest zależny od rozmiarów struktury oraz jej schematu statycznego i sposobu obciążenia. Obserwując wyniki uzyskane dla wspornika o różnej długości, ale tym samym obciążeniu, zauważono, że wraz ze wzrostem rozmiarów konstrukcji znaczenie współczynników r_k, r_m rośnie, zaś r_σ maleje. Tym samym budując dużą strukturę ciągle bardziej efektywne może być usztywnienie jej w pewnych obszarach od początku jej pracy, co jednocześnie zawęża możliwość adaptacji konstrukcji. Warto również zauważyć, że w miarę jak zwiększamy rozmiar konstrukcji, wyniki procentowych spadków przemieszczeń dla poszczególnych parametrów w różnych strukturach stają się do siebie zbliżone. Istotnym jest również fakt, że zmiana przekrojów zastrzałów (r_m), niezależnie od rozmiarów konstrukcji, przynosi najmniejsze zyski w porównaniu do pozostałych współczynników. Ponadto, warto zauważyć, ze poszczególne schematy mogą działać zamiennie wobec siebie w przypadku poszczególnych obciążeń – można zastosować stałe wzmocnienie lokalne o mniejszej wartości sił sprężających lub wzmocnienie zmienne o większej wartości sił sprężających bezpośrednio pod obszarem obciążonym, co potwierdzono w analizach struktur przestrzennych. Wyniki analiz pozwalają także zauważyć,

że wzmacnianie adaptacyjne ma szczególne znaczenie w przypadku obciążania dużych powierzchni w konstrukcji, szczególnie przy obciążeniu asymetrycznym, które znacznie mocniej wpływa na odpowiedź konstrukcji. W przypadku obciążania pojedynczych węzłów lub modułów za pomocą niewielkiej siły wzmocnienie to nie ma aż tak istotnej roli.

W jakim stopniu możliwe jest sterowanie zachowaniem struktury tensegrity poprzez inteligentny szkielet wewnętrzny?

Na podstawie przeprowadzonych analiz można stwierdzić, że sterowanie zachowaniem struktury tensegrity za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego jest możliwe w dużym stopniu. Potwierdza to możliwość uzyskania istotnego zmniejszenia wartości przemieszczeń poprzez odpowiedni dobór układu wzmocnień. Uzyskiwane wartości są silnie zależne od typu modułu budującego układ oraz sposobu jego ułożenia, a także od wymiarów konstrukcji i sposobu jej podparcia. Przykładem może być różnica w zachowaniu konstrukcji zbudowanych z modułów płaskich i modułów przestrzennych pod wpływem wzmocnienia za pomocą geometrii – w przypadku struktur komórkowych zbudowanych z modułów 2D zmiana przekrojów prętów w module miała analogiczny wpływ jak zmiana wartości *self-stressu* (zmniejszenie wartości przemieszczeń o około 10%-15% względem przemieszczeń konstrukcji wzmocnionej równomiernie), jednak w przypadku struktur komórkowych 3D różnica ta jest kolosalna i spadki wartości przemieszczeń potrafią w niektórych przypadkach sięgać nawet 30%-40%. W przypadku niewielkich wartości r_σ spadek wartości przemieszczeń był bliski 10%-15% wartości przemieszczeń konstrukcji równomiernie wzmocnionej (typu tarczowego i typu płytowego), zaś w przypadku dużych różnic pomiędzy obszarami wzmocnionymi i niewzmocnionymi wartość ta rosła do nawet 40% początkowej wartości przemieszczeń. Należy tutaj jednak uwzględnić, że taka początkowa struktura jest wzmocniona w niewielkim stopniu. Jednocześnie wykazano, że dla jednego schematu statycznego możliwe jest zastosowanie wielu różnych konfiguracji wzmacniających, prowadzących do poprawy odpowiedzi konstrukcji. Oznacza to, że stopień sterowalności badanej konstrukcji należy oceniać nie tylko przez pryzmat skali możliwej redukcji przemieszczeń, lecz również przez różnorodność dostępnych rozwiązań projektowych. Dodatkowo obserwowany efekt występował niezależnie od rozmiaru analizowanej struktury, co wskazuje na uniwersalność i skalowalność przyjętego podejścia. W przypadku sterowania konstrukcjami ukierunkowanymi

na uzyskanie właściwości auksetycznych skuteczność analizowanego rozwiązania okazała się jednak wyraźnie bardziej ograniczona. Wyniki wskazują, że inteligentny szkielet wewnętrzny nie jest w tym zakresie tak efektywnym narzędziem sterowania, jak w przypadku kształtowania odpowiedzi związanej z redukcją przemieszczeń. Choć w pojedynczych przypadkach możliwe było uzyskanie metamateriałów wykazujących słabe cechy auksetyczne, efekt ten był niewielki i trudny do osiągnięcia w sposób stabilny oraz powtarzalny.

Jakie ograniczenia ma zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego? Które parametry mają kluczowe znaczenie w analizach?

Przeprowadzone analizy wykazały, że zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego w strukturach tensegrity ma istotny potencjał adaptacyjny, jednak jest obarczone szeregiem ograniczeń. Jednym z najważniejszych jest konieczność bardzo precyzyjnego doboru zakresu parametrów sterujących, w szczególności wartości sprężenia (za którą odpowiedzialny jest parametr σ, zaś za stosunek pomiędzy poszczególnymi obszarami odpowiedzialny jest parametr r_σ). W przypadku przyjęcia zbyt wysokiej bazowej wartości siły sprężającej możliwe jest przekroczenie zakresu stosowalności struktury, przez co dalsze wzmacnianie nie prowadzi już do spadku przemieszczeń, lecz może powodować ich wzrost. Dodatkowo zbyt wysokie wartości sił mogą prowadzić do niekorzystnych zjawisk mechanicznych, takich jak na przykład wyboczenie prętów ściskanych. Oznacza to, że skuteczność inteligentnego szkieletu wewnętrznego zależy nie tylko od samej idei lokalnego wzmacniania, lecz również od zachowania odpowiedniego zakresu pracy konstrukcji.

Istotnym ograniczeniem jest także silna zależność wyników od typu analizowanej struktury (typu modułu budującego oraz układu modułów wewnątrz konstrukcji), jej schematu statycznego, sposobu podparcia oraz stopnia zagęszczenia modułów. Struktury bardziej sztywne, w szczególności dwuwarstwowe lub podparte w sposób zwiększający ich sztywność globalną, wykazują mniejszą podatność na lokalne wzmocnienia, przez co trudniej uzyskać wyraźne różnice pomiędzy konstrukcją wzmacnianą lokalnie a wzmacnianą jednorodnie. Z kolei struktury bardziej podatne lepiej ujawniają potencjał adaptacyjny, lecz często wymagają dodatkowych zabiegów wzmacniających, aby mogły być wykorzystane praktycznie. Ograniczeniem pozostaje również dokładność wykonania rzeczywistej konstrukcji tensegrity,

ponieważ nawet niewielkie odchylenia geometryczne i montażowe mogą istotnie wpływać na jej odpowiedź mechaniczną.

Dodatkowo należy zaznaczyć, że możliwości inteligentnego szkieletu wewnętrznego są wyraźnie mniejsze w przypadku struktur projektowanych pod kątem uzyskania właściwości auksetycznych. Choć w teorii możliwe jest opracowanie adaptowalnego metamateriału tensegrity o cechach auksetycznych, w praktyce proces ten jest znacznie bardziej złożony i wrażliwy na dobór wielu czynników, takich jak geometria modułów, kierunek obciążenia, wartości parametrów sterujących czy sposób odwzorowania wzoru struktury. W analizach uzyskanie efektu auksetycznego było ograniczone, mało stabilne i występowało jedynie w wybranych przypadkach, co wskazuje, że inteligentny szkielet wewnętrzny nie jest w tym zakresie równie efektywny jak przy sterowaniu przemieszczeniami.

Wśród parametrów mających kluczowe znaczenie w analizach szczególnie istotne okazały się parametry σ oraz k. Manipulowanie parametrem σ jest korzystniejsze z punktu widzenia adaptacyjności struktury, ponieważ umożliwia modyfikację zachowania konstrukcji także w trakcie jej użytkowania. Parametr k często prowadzi jednak do uzyskania lepszych wyników bezpośrednio pod względem osiąganej odpowiedzi mechanicznej. Parametr m nie wykazał natomiast istotnego wpływu na wyniki analiz, efekty jego użycia widoczne były tylko w przypadku dużych konstrukcji. Oprócz samych parametrów sterujących duże znaczenie miał również dobór bazowej wartości sprężenia, liczby i rozmieszczenia wzmocnionych modułów oraz sposób wprowadzenia wzoru lokalnych wzmocnień wynikającego z optymalizacji topologicznej. W wielu przypadkach większa liczba wzmocnionych modułów prowadziła do większego spadku przemieszczeń, choć efekt ten zależał od rodzaju konstrukcji i schematu statycznego.

Na podstawie uzyskanych wyników można zatem stwierdzić, że kluczowe dla skuteczności inteligentnego szkieletu wewnętrznego są: odpowiedni dobór parametrów sterujących, właściwe określenie bazowego poziomu sprężenia, dopasowanie typu struktury do schematu statycznego oraz prawidłowe rozmieszczenie lokalnych wzmocnień. Główne ograniczenia tej metody wynikają natomiast z wrażliwości na zakres parametrów, zależności od geometrii i sztywności konstrukcji, dokładności wykonania oraz ograniczonej efektywności w przypadku projektowania metamateriałów o cechach auksetycznych.

Jakie korzyści może za sobą nieść zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego w konstrukcjach tensegrity?

Zastosowanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego w konstrukcjach tensegrity może przynieść szereg istotnych korzyści, związanych zarówno z efektywnością pracy konstrukcji, jak i z jej bezpieczeństwem oraz adaptowalnością. Przede wszystkim adaptacyjne wzmacnianie umożliwia bardziej optymalne wykorzystanie materiału i zdolności nośnych poszczególnych elementów, ponieważ wzmocnienia mogą być wprowadzane lokalnie, tam gdzie są rzeczywiście potrzebne i w chwili, gdy jest potrzbne. Pozwala to ograniczać lokalne koncentracje naprężeń oraz zmniejszać nadmierną akumulację energii odkształcenia sprężystego, która w dłuższym czasie może prowadzić do uszkodzeń zmęczeniowych lub degradacji wybranych elementów.

Istotną zaletą takiego podejścia jest również możliwość dostosowania pracy struktury do warunków nietypowych, zmiennych lub wcześniej nieprzewidzianych. Inteligentny szkielet wewnętrzny może umożliwiać czasowe, celowe wzmocnienie wybranych obszarów konstrukcji, dzięki czemu struktura nie musi być projektowana wyłącznie jako kompromis dla z góry założonego zestawu obciążeń. Otwiera to możliwość bezpieczniejszego użytkowania konstrukcji w sytuacjach wyjątkowych, takich jak częściowe uszkodzenie elementów nośnych, nagłe obciążenia środowiskowe, gwałtowne opady atmosferyczne, lokalne przeciążenia czy inne stany awaryjne wymagające szybkiej redystrybucji sił wewnętrznych.

Uzyskane wyniki wskazują, że adaptacyjne wzmacnianie może być szczególnie korzystne w przypadkach obciążania większych powierzchni konstrukcji, zwłaszcza przy obciążeniach asymetrycznych, które w większym stopniu wpływają na odpowiedź struktury. W takich sytuacjach inteligentny szkielet wewnętrzny może skutecznie ograniczać wartości przemieszczeń oraz poprawiać ogólną pracę konstrukcji. Mniejsze znaczenie obserwuje się natomiast przy lokalnym obciążaniu pojedynczych węzłów lub modułów niewielkimi siłami, gdzie wpływ dodatkowego wzmocnienia może być mniej wyraźny.

Ważnym aspektem jest również bezpieczeństwo konstrukcji. Możliwość adaptacyjnego sterowania zachowaniem struktury zwiększa jej odporność na sytuacje awaryjne i pozwala ograniczać ryzyko lokalnych uszkodzeń, które mogłyby prowadzić do dalszej utraty nośności.

Dzięki temu inteligentny szkielet wewnętrzny może pełnić nie tylko funkcję poprawy parametrów mechanicznych, ale również funkcję zabezpieczającą, zwiększając niezawodność i trwałość całego układu.

Należy jednak zaznaczyć, że skuteczność takiego rozwiązania zależy od typu struktury. Lepsze rezultaty obserwowano w przypadku konstrukcji o mniejszej sztywności globalnej. Oznacza to, że wykorzystanie inteligentnego szkieletu wewnętrznego wymaga dalszych analiz i odpowiedniego dopasowania rozwiązania do konkretnego przypadku konstrukcyjnego. Mimo to uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że adaptowalne struktury tensegrity mają szeroki potencjał zastosowań i mogą w przyszłości stanowić podstawę bezpieczniejszych, bardziej efektywnych i lepiej dostosowujących się do warunków pracy układów konstrukcyjnych.

Otrzymane rezultaty potwierdzają możliwość kształtowania zachowania struktur tensegrity z wykorzystaniem inteligentnego szkieletu wewnętrznego, co wskazuje na potencjał przyszłych zastosowań tego podejścia. Jednocześnie należy zaznaczyć, że są to badania wstępne, które przede wszystkim potwierdzają wykonalność samej koncepcji, natomiast jej rozwinięcie wymaga dalszych analiz numerycznych, doświadczalnych i projektowych.

8.2. Dalsze badania

Przedstawione w pracy rozważania, choć potwierdzają tezę o możliwości zastosowania inteligentnego szkieletu wewnętrznego w strukturach tensegrity, nie wyczerpują złożonej i szerokiej problematyki konstrukcji adaptujących się do zmiennych warunków otoczenia. Uzyskane wyniki należy traktować jako etap wstępny, wskazujący na realność rozważanej koncepcji, lecz jednocześnie otwierający liczne kierunki dalszych badań. W kolejnych etapach zasadne byłoby rozszerzenie zakresu analiz o zagadnienia, które mogłyby stanowić naturalne rozwinięcie niniejszej pracy zarówno w wymiarze numerycznym, projektowym, jak i eksperymentalnym.

Jednym z podstawowych kierunków dalszych badań mogłoby być rozpatrzenie innych typów konstrukcji niż analizowane w pracy tarcze i płyty. Przykładem takich rozwiązań mogłyby być belki budowane z przestrzennych modułów lub struktury typu powłokowego. Tego rodzaju podejście mogłoby ujawnić nowe możliwości sterowania zachowaniem struktury, a także lepiej oddać rzeczywiste warunki pracy przyszłych zastosowań inżynierskich. Istotnym rozwinięciem

badań byłoby również opracowanie i przeanalizowanie innych rodzajów metamateriałów auksetycznych. W przypadku struktur wykazujących właściwości auksetyczne szczególnie ważne jest poszukiwanie różnych konfiguracji geometrycznych i różnych sposobów odwzorowania ich mechanizmu pracy w strukturach tensegrity. Pozwoliłoby to lepiej określić, które układy mają rzeczywisty potencjał do uzyskiwania stabilnych i wyraźnych efektów auksetycznych, a które wykazują jedynie ograniczone cechy tego typu. W tym kontekście szczególnie pomocne byłoby porównanie wielu wariantów metamateriałów auksetycznych oraz zbadanie ich wrażliwości na parametry geometryczne, wartości wstępnego sprężenia i kierunki obciążenia.

Z tym zagadnieniem ściśle wiąże się potrzeba przeanalizowania możliwości wykorzystania innych modułów tensegrity, także zestawianych w różnych układach przestrzennych i o różnym stopniu zagęszczenia. Kwestia ta może mieć szczególne znaczenie zarówno w przypadku struktur auksetycznych, ale również konstrukcji, ponieważ geometria pojedynczego modułu, sposób jego powielania oraz relacje pomiędzy sąsiednimi komórkami mogą decydować o uzyskaniu pożądanej odpowiedzi ze strony układu modularnego. Analiza wpływu rodzaju modułu, konfiguracji komórek oraz zagęszczenia struktury mogłaby pozwolić na wskazanie układów najlepiej przystosowanych zarówno do sterowania przemieszczeniami, jak i do ewentualnego uzyskiwania właściwości auksetycznych.

Bardzo ważnym krokiem w dalszym rozwoju tej tematyki byłoby również wykonanie fizycznego prototypu konstrukcji wzmacnianej za pomocą inteligentnego szkieletu wewnętrznego. Badania istniejącej, rzeczywistej struktury mogłyby posłużyć do potwierdzenia wyników uzyskanych w analizach numerycznych oraz do weryfikacji przyjętych założeń modelowych. Na początkowym etapie taki prototyp mógłby mieć skalę laboratoryjną, co ułatwiłoby przeprowadzenie serii kontrolowanych badań i ocenę podstawowych mechanizmów pracy konstrukcji. W dalszej kolejności zasadne byłoby jednak rozważenie prototypów większych, bliższych rzeczywistym zastosowaniom inżynierskim. Do budowy takich modeli można byłoby wykorzystać materiały powszechnie stosowane w budownictwie, przy czym szczególnie obiecującym materiałem wydaje się stal, ze względu na jej właściwości mechaniczne, trwałość oraz możliwość stosowania w układach wymagających wprowadzania sprężenia.

Samo opracowanie prototypu konstrukcji wzmacnianej przez inteligentny szkielet wewnętrzny wiązałoby się jednak z szeregiem dodatkowych wyzwań projektowych i wykonawczych. Dotyczyłyby one przede wszystkim doboru rozmiarów modułów, projektowania połączeń pomiędzy elementami, kształtowania węzłów konstrukcyjnych oraz wypracowania skutecznego i powtarzalnego sposobu wprowadzania sprężenia. Szczególnego znaczenia nabierałoby tutaj zagadnienie technologicznej realizowalności konstrukcji, ponieważ to właśnie na etapie przejścia od modelu teoretycznego do rzeczywistego obiektu ujawniają się ograniczenia związane z tolerancjami wykonawczymi, montażem, kontrolą sił sprężających oraz trwałością poszczególnych połączeń.

Kolejnym naturalnym kierunkiem badań byłoby rozszerzenie analiz o obciążenia dynamiczne, a nie tylko statyczne. W praktyce wiele konstrukcji narażonych jest nie wyłącznie na obciążenia stałe lub quasi-statyczne, lecz również na drgania, obciążenia cykliczne, udary, impulsy oraz inne oddziaływania zmienne w czasie. Uwzględnienie tego rodzaju przypadków mogłoby dostarczyć cennych informacji na temat zdolności inteligentnego szkieletu wewnętrznego do aktywnego reagowania na szybko zmieniające się warunki pracy. Byłoby to szczególnie istotne z punktu widzenia potencjalnych zastosowań w konstrukcjach narażonych na obciążenia wyjątkowe, sytuacje awaryjne lub długotrwałe oddziaływania zmęczeniowe.

Szczególnie perspektywicznym obszarem dalszych badań wydaje się opracowanie algorytmu umożliwiającego czynne sterowanie konstrukcją. Taki system mógłby polegać na bieżącym wyznaczaniu obszarów wymagających wzmocnienia oraz na wprowadzaniu odpowiednich „wzorów” optymalizacji topologicznej zależnie od aktualnego stanu obciążenia. W praktyce oznaczałoby to konieczność stworzenia pełnego systemu sterującego inteligentną konstrukcją: od identyfikacji obciążenia i obliczania obszarów wymagających modyfikacji, przez wyznaczenie odpowiedniego schematu wzmacniania, aż po rzeczywiste wprowadzenie wzmocnienia za pomocą self-stressu. W przyszłości możliwe byłoby rozważenie algorytmów opartych na metodach uczenia maszynowego, które mogłyby pozwolić na szybsze rozpoznawanie stanów obciążenia, przewidywanie odpowiedzi konstrukcji i dobór optymalnego wariantu sterowania.

Osobnym, lecz bardzo ważnym kierunkiem rozwoju byłyby laboratoryjne badania metamateriałów tensegrity, w szczególności takich, które miałyby wykazywać właściwości

auksetyczne przy jednoczesnym wykorzystaniu wzmacniania poprzez sprężenie. W tym obszarze należałoby rozważyć nie tylko sam model mechaniczny, lecz również technologię wytwarzania tego rodzaju materiałów. Wytwarzanie przyrostowe umożliwia bowiem tworzenie struktur wzmacnianych głównie przez zmianę geometrii poszczególnych prętów, jednak może okazać się niewystarczające w przypadku układów, w których kluczową rolę miałoby odgrywać dodatkowe wzmacnianie za pomocą *self-stressu*. Z drugiej strony, projektowanie metamateriałów zdolnych do rzeczywistego wprowadzania sprężenia może utrudniać uzyskanie odpowiednio małych komórek materiałowych, które są często konieczne dla zachowania cech metamateriałowych. Wymaga to zatem opracowania nowych metod produkcji oraz nowych sposobów wzmacniania materiału za pomocą sprężenia.

W przypadku struktur auksetycznych szczególnie duże znaczenie miałyby także badania eksperymentalne. W tej grupie rozwiązań sama analiza numeryczna, nie jest zwykle wystarczająca do pełnego potwierdzenia działania przyjętych mechanizmów. Ze względu na dużą wrażliwość efektu auksetycznego na geometrię, niedokładności wykonawcze, warunki brzegowe oraz sposób obciążania, to właśnie badania laboratoryjne stanowią podstawowe narzędzie wiarygodnej weryfikacji.

Podsumowując, dalszy rozwój zagadnienia inteligentnego szkieletu wewnętrznego w strukturach tensegrity powinien obejmować jednocześnie poszerzenie zakresu analizowanych typów konstrukcji, badanie nowych modułów i konfiguracji geometrycznych, budowę i testowanie prototypów, a także opracowanie algorytmów czynnego sterowania oraz technologii wytwarzania metamateriałów o cechach auksetycznych.

Bibliografia

Aelenei, L., Aelenei, D., Romano, R., Mazzucchelli, E. S., Brzezicki, M., Rico-Martinez, J. M. (2018): *Case Studies – Adaptive Facade Network*. TU Delft Open for the COST Action 1403 adaptive facade network.

Ai, L., Gao, X.-L. (2018): *Three-dimensional metamaterials with a negative Poisson's ratio and a non-positive coefficient of thermal expansion*. International Journal of Mechanical Sciences, 135, pp. 101–113. doi:10.1016/j.ijmecsci.2017.10.042

Akritas, A. G., Malaschonok, G. I. (2004): *Applications of singular-value decomposition (SVD)*. Mathematics and Computers in Simulation, Applications of Computer Algebra in Science, Engineering, Simulation and Special Software, 67(1), pp. 15–31. doi:10.1016/j.matcom.2004.05.005

Al Sabouni-Zawadzka, A. (2014): *Active control of smart tensegrity structures*. Archives of Civil Engineering, 60.4, pp. 517–534.

Al Sabouni-Zawadzka, A. (2016): *Studium możliwości zastosowania konstrukcji inteligentnych w budownictwie mostowym*. Doctoral Thesis. The Institute of Civil Engineering.

Al Sabouni-Zawadzka, A. (2020): *Extreme Mechanical Properties of Regular Tensegrity Unit Cells in 3D Lattice Metamaterials*. Materials, 13(21). doi:10.3390/ma13214845

Al Sabouni-Zawadzka, A. (2022): *High Performance Tensegrity-Inspired Metamaterials and Structures*. CRC Press, Boca Raton. doi:10.1201/9781003343202

Al Sabouni-Zawadzka, A. (2025): *Tensegrity Lattices with Extremal Mechanical Properties*. W: Fraternali F, Rimoli JJ, red. *Tensegrity Systems: Basic Concepts, Mechanical Metamaterials, Biotensegrity*. Springer Nature Switzerland, Cham. pp. 129–150. doi:10.1007/978-3-031-82283-4_6

Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (2018a): *Smart Metamaterial Based on the Simplex Tensegrity Pattern*. Materials, 11(5). doi:10.3390/ma11050673

Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (2018b): *Inherent Properties of Smart Tensegrity Structures*. Applied Sciences, 8(5). doi:10.3390/app8050787

Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. (2019): *Soft and Stiff Simplex Tensegrity Lattices as Extreme Smart Metamaterials*. Materials, 12(1). doi:10.3390/ma12010187

Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W. J., Zawadzki, A. (2024a): *Experimental investigations on mechanical propertiesof 3D-printed tensegrity-inspired metamaterialsbased on 4-strut simplex module*. Archives of Civil Engineering, 70(3). doi:10.24425/ace.2024.150987

Al Sabouni-Zawadzka, A., Gilewski, W., Zawadzki, A. (2024b): *Stiff and soft deformation of a 3D-printable tensegrity-inspired metamaterial based on expanded octahedron*.

Al Sabouni-Zawadzka, A., Martyniuk-Sienkiewicz, K., Gilewski, W. (2023): *Variable stiffness plate tensegrity structures inspired with topology optimization*. Mechanics Research Communications, 129, pp. 104102. doi:10.1016/j.mechrescom.2023.104102

Al Sabouni-Zawadzka, A., Micheletti, A., Kołodziejczak, M., Zawadzki, A. (2025): *Design and fabrication of modular tensegrity-like lattices with auxetic properties*. Materials & Design, 258, pp. 114513. doi:10.1016/j.matdes.2025.114513

Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.-M. (2002): *A level-set method for shape optimization*. Comptes Rendus. Mathématique, 334(12), pp. 1125–1130. doi:10.1016/S1631-073X(02)02412-3

Amendola, A., Hernández-Nava, E., Goodall, R., Todd, I., Skelton, R. E., Fraternali, F. (2015a): *On the additive manufacturing, post-tensioning and testing of bi-material tensegrity structures*. Composite Structures, 131, pp. 66–71. doi:10.1016/j.compstruct.2015.04.038

Amendola, A., Hernández-Nava, E., Goodall, R., Todd, I., Skelton, R. E., Fraternali, F. (2015b): *On the additive manufacturing, post-tensioning and testing of bi-material tensegrity structures*. Composite Structures, 131, pp. 66–71. doi:10.1016/j.compstruct.2015.04.038

Amendola, A., Krushynska, A., Daraio, C., Pugno, N. M., Fraternali, F. (2018): *Tuning frequency band gaps of tensegrity mass-spring chains with local and global prestress*. International Journal of Solids and Structures, 155, pp. 47–56. doi:10.1016/j.ijsolstr.2018.07.002

Anichini, C., Czepa, W., Pakulski, D., Aliprandi, A., Ciesielski, A., Samorì, P. (2018): *Chemical sensing with 2D materials*. Chemical Society Reviews, 47(13), pp. 4860–4908. doi:10.1039/C8CS00417J

Ansola, R., Canales, J., Tárrago, J. A., Rasmussen, J. (2002): *An integrated approach for shape and topology optimization of shell structures*. Computers & Structures, 80(5), pp. 449–458. doi:10.1016/S0045-7949(02)00019-6

Asad, M., Dhanasekar, M., Zahra, T., Thambiratnam, D. (2019): *Characterisation of polymer cement mortar composites containing carbon fibre or auxetic fabric overlays and inserts under flexure*. Construction and Building Materials, 224, pp. 863–879. doi:10.1016/j.conbuildmat.2019.07.120

Asad, M., Dhanasekar, M., Zahra, T., Thambiratnam, D. (2020): *Impact mitigation of masonry walls with carbon fibre and Auxetic fibre composite renders – A numerical study*. Structures, 28, pp. 2733–2751. doi:10.1016/j.istruc.2020.09.047

Askar, R., Bragança, L., Gervásio, H. (2021): *Adaptability of Buildings: A Critical Review on the Concept Evolution*. Applied Sciences, 11(10). doi:10.3390/app11104483

Babilio, E., Miranda, R., Fraternali, F. (2019): *On the Kinematics and Actuation of Dynamic Sunscreens With Tensegrity Architecture*. Frontiers in Materials, 6. doi:10.3389/fmats.2019.00007

Bathe, K.-J. (2006): *Finite Element Procedures*. Klaus-Jurgen Bathe, USA.

Bauer, J., Kraus, J. A., Crook, C., Rimoli, J. J., Valdevit, L. (2021): *Tensegrity Metamaterials: Toward Failure-Resistant Engineering Systems through Delocalized Deformation*. Advanced Materials, 33(10), pp. 2005647. doi:10.1002/adma.202005647

Belblidia, F., Lee, J. E. B., Rechak, S., Hinton✠, E. (2001): *Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model*. Advances in Engineering Software, 32(2), pp. 159–168. doi:10.1016/S0045-7949(00)00141-3

Bendsøe, M. P. (1989): *Optimal shape design as a material distribution problem*. Structural optimization, 1(4), pp. 193–202. doi:10.1007/BF01650949

Bendsoe, M. P., Sigmund, O. (2013): *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer Science & Business Media.

Berinskii, I. E. (2018): *In-plane elastic properties of auxetic multilattices*. Smart Materials and Structures, 27(7), pp. 075012. doi:10.1088/1361-665X/aac292

Bieniek, Z. (2017): *The self-equilibrium problem of the Class-Theta tetrahedral tensegrity module*. Composites Part B: Engineering, 115, pp. 21–29. doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.054

Bitaraf, M., Hurlebaus, S., Barroso, L. R. (2012): *Active and Semi-active Adaptive Control for Undamaged and Damaged Building Structures Under Seismic Load*. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, 27(1), pp. 48–64. doi:10.1111/j.1467-8667.2011.00719.x

Cai, J., Feng, J. (2015): *Form-finding of tensegrity structures using an optimization method*. Engineering Structures, 104, pp. 126–132. doi:10.1016/j.engstruct.2015.09.028

Cao, Z., Luo, A., Feng, Y., Liu, H. (2024): *Form-finding for tensegrity structures based on the equilibrium equation*. Mechanics Research Communications, 136, pp. 104256. doi:10.1016/j.mechrescom.2024.104256

Carpentieri, G., Skelton, R. E., Fraternali, F. (2017): *A minimal mass deployable structure for solar energy harvesting on water canals*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 55(2), pp. 449–458. doi:10.1007/s00158-016-1503-5

Chen, J., Hu, S., Zhu, S., Li, T. (2023): *Metamaterials: From fundamental physics to intelligent design*. Interdisciplinary Materials, 2(1), pp. 5–29. doi:10.1002/idm2.12049

Chen, Y., Fu, M.-H. (2017): *A novel three-dimensional auxetic lattice meta-material with enhanced stiffness*. Smart Materials and Structures, 26(10), pp. 105029. doi:10.1088/1361-665X/aa819e

Cheng, Z., Cao, R., Wei, K., et al. (2021): *2D Materials Enabled Next-Generation Integrated Optoelectronics: from Fabrication to Applications*. Advanced Science, 8(11), pp. 2003834. doi:10.1002/advs.202003834

Christensen, P. W., Klarbring, A. (2008): *An Introduction to Structural Optimization*. Springer Science & Business Media.

Cimmino, M. C., Miranda, R., Sicignano, E., Ferreira, A. J. M., Skelton, R. E., Fraternali, F. (2017): *Composite solar façades and wind generators with tensegrity architecture*. Composites Part B: Engineering, Composite lattices and multiscale innovative materials and structures, 115, pp. 275–281. doi:10.1016/j.compositesb.2016.09.077

Connelly, R., Terrell, M. (1995): *Globally rigid Symmetric Tensegrities*.

Dadashi, A., Nedjad, K. H., Farrokhabadi, A., Ghannadpour, S. A. M. (2025): *Novel geometric functionally graded auxetic double arrowhead lattice structures design: Tailored unit cell angles for superior energy absorption*. Composites Part C: Open Access, 17, pp. 100613. doi:10.1016/j.jcomc.2025.100613

Davis-Sikora, D., Liu, R., Ohrn-McDaniel, L. (2020): *Form-finding and fabrication of BeTA pavilion: a bending-active biotensegrity textile assembly*. SN Applied Sciences, 2(12), pp. 2011. doi:10.1007/s42452-020-03363-0

De Tommasi, D., Marano, G. C., Puglisi, G., Trentadue, F. (2017): *Morphological optimization of tensegrity-type metamaterials*. Composites Part B: Engineering, Composite lattices and multiscale innovative materials and structures, 115, pp. 182–187. doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.017

Dinker, A., Agarwal, M., Agarwal, G. D. (2017): *Heat storage materials, geometry and applications: A review*. Journal of the Energy Institute, 90(1), pp. 1–11. doi:10.1016/j.joei.2015.10.002

Dong, W., Stafford, P. J., Ruiz-Teran, A. M. (2019): *Inverse form-finding for tensegrity structures*. Computers & Structures, 215, pp. 27–42. doi:10.1016/j.compstruc.2019.01.009

Dong, Y., Yuan, X., Wang, X., Samy, A., Ma, S., Dong, S. (2025): *Simultaneous topology, configuration, and prestress optimization for lightweight design of modular tensegrity chain structures*. Thin-Walled Structures, 212, pp. 113184. doi:10.1016/j.tws.2025.113184

Doroftei, I., Doroftei, I. A. (2014): *Deployable Structures for Architectural Applications - A Short Review*. Applied Mechanics and Materials, 658, pp. 233–240. doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.658.233

Ehara, S., Kanno, Y. (2010): *Topology design of tensegrity structures via mixed integer programming*. International Journal of Solids and Structures, 47(5), pp. 571–579. doi:10.1016/j.ijsolstr.2009.10.020

Estrada, G. G., Bungartz, H.-J., Mohrdieck, C. (2006): *Numerical form-finding of tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 43(22), pp. 6855–6868. doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.02.012

Fabbrocino, F., Carpentieri, G., Amendola, A., Penna, R., Fernando, Fraternali (2017): *Accurate numerical methods for studying the nonlinear wave-dynamics of tensegrity metamaterials. Eccomas Procedia Compdyn 2017*. T 17765. pp. 3911–3922.

Falk, A. (2006): *Architectural and structural development of plate tensegrity*. International Association of Shell and Spatial Structures.

Falk, A., Kirkegaard, P. H. (2012): *Pre-Stressing Timber-Based Plate Tensegrity Structures: IASS-APCS 2012*. IASS-APCS 2012 Proceedings.

Falk, A., Tibert, G. (2005): *Plate based tensegrity structures*. *Proceedings of the IASS 2005 Symposium*. pp. 611–618.

Fenci, G. E., Currie, N. G. (2017): *Deployable structures classification: A review*. International Journal of Space Structures, 32(2), pp. 112–130. doi:10.1177/0266351117711290

Feng, X., Zhang, W., Jianbo, S., Chen, Y., Sergio, Z. (2021): *The topology finding algorithm of tensegrity structures based on scheme matrix strategy*. Composite Structures, 275, pp. 114429. doi:10.1016/j.compstruct.2021.114429

Feng, Y. (2019): *Design of Freeform Membrane-Tensegrity Structure*. Master Thesis. School of Arts, Design and Architecture.

Franta, A., Zając, D. (2022): *Carbon fiber reinforced polymer and tensegrity structures in search of model architectural and engineering solutions.* Technical Transactions, 2022/013. doi:https:// doi.org/10.37705/TechTrans/e2022013

Fraternali, F., Babilio, E., Nazifi Charandabi, R., Germano, G., Luciano, R., Spagnuolo, G. (2024): *Dynamic origami solar eyes with tensegrity architecture for energy harvesting Mashrabiyas*. Applications in Engineering Science, 19, pp. 100190. doi:10.1016/j.apples.2024.100190

Fraternali, F., Carpentieri, G., Amendola, A. (2015): *On the mechanical modeling of the extreme softening/stiffening response of axially loaded tensegrity prisms*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 74, pp. 136–157. doi:10.1016/j.jmps.2014.10.010

Fraternali, F., Carpentieri, G., Amendola, A., Skelton, R. E., Nesterenko, V. F. (2014): *Multiscale tunability of solitary wave dynamics in tensegrity metamaterials*. Applied Physics Letters, 105(20), pp. 201903. doi:10.1063/1.4902071

Fraternali, F., De Chiara, E., Skelton, R. E. (2015): *On the use of tensegrity structures for kinetic solar facades of smart buildings*. Smart Materials and Structures, 24(10), pp. 105032. doi:10.1088/0964-1726/24/10/105032

Fraternali, F., Senatore, L., Daraio, C. (2012): *Solitary waves on tensegrity lattices*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 60(6), pp. 1137–1144. doi:10.1016/j.jmps.2012.02.007

Fuller, R. B. (1962): *Tensile-integrity structures*. US3063521A.

Gan, B. S., Zhang, J., Nguyen, D.-K., Nouchi, E. (2015): *Node-based genetic form-finding of irregular tensegrity structures*. Computers & Structures, 159, pp. 61–73. doi:10.1016/j.compstruc.2015.07.003

Gao, Q., Ge, C., Zhuang, W., Wang, L., Ma, Z. (2019): *Crashworthiness analysis of double-arrowed auxetic structure under axial impact loading*. Materials & Design, 161, pp. 22–34. doi:10.1016/j.matdes.2018.11.013

Gao, Y., Liu, Q., Du, Y., et al. (2024): *Planar metamaterial with sign-switching Poisson's ratio based on self-contact slits*. Mechanics of Materials, 198, pp. 105138. doi:10.1016/j.mechmat.2024.105138

Gilewski, W., Al Sabouni-Zawadzka, A. (2021): *Towards Recognition of Scale Effects in a Solid Model of Lattices with Tensegrity-Inspired Microstructure*. Solids, 2(1), pp. 50–59. doi:10.3390/solids2010002

Gilewski, W., Kasprzak, A. (2013): *Tensegrity form-finding via modal analysis*. Poznań, Polska.

Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (2015): *Applications of Tensegrity Structures in Civil Engineering*. Procedia Engineering, XXIV R-S-P seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering (24RSP) (TFoCE 2015), 111, pp. 242–248. doi:10.1016/j.proeng.2015.07.084

Gilewski, W., Kłosowska, J., Obara, P. (2016): *Verification of Tensegrity Properties of Kono Structure and Blur Building*. Procedia Engineering, XXV Polish – Russian – Slovak Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering", 153, pp. 173–179. doi:10.1016/j.proeng.2016.08.099

Gilewski, W., Zawadzki, A., Thammavong, M., Al Sabouni-Zawadzka, A. (2025): *2D graded tensegrity-inspired metamaterials with hexagonal cells fabricated via additive manufacturing*. 2D Materials, 12(4), pp. 045026. doi:10.1088/2053-1583/ae1620

Golub, G. H., Reinsch, C. (1970): *Singular value decomposition and least squares solutions*. Numerische Mathematik, 14(5), pp. 403–420. doi:10.1007/BF02163027

Gomez Jauregui, V. (2009): *Controversial Origins of Tensegrity*. Editorial Universitat Politècnica de València.

Gomez-Jauregui, V., Carrillo-Rodriguez, A., Manchado, C., Lastra-Gonzalez, P. (2023): *Tensegrity Applications to Architecture, Engineering and Robotics: A Review*. Applied Sciences, 13(15), pp. 8669. doi:10.3390/app13158669

Gong, S.-G., Du, J.-X., Liu, X., Xie, G.-L., Zhang, J.-P. (2010): *Study on Topology Optimization under Multiple Loading Conditions and Stress Constraints based on EFG Method*. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, 11(6), pp. 328–336. doi:10.1080/15502287.2010.516789

Gómez Jáuregui, V. (2004): *Tensegrity Structures and Their Application to Architecture*. Master Thesis. School of Architecture Queen's University Belfast.

Gu, J.-B., Wang, J.-Y., Lu, W. (2022): *An experimental assessment of ultra high performance concrete beam reinforced with negative Poisson's ratio (NPR) steel rebar*. Construction and Building Materials, 327, pp. 127042. doi:10.1016/j.conbuildmat.2022.127042

Güney, N. N., Arpacıoğlu, Ü. (2024): *Examining Facade Adaptability: A Study of Adaptive Facade Classification Criteria*. Kent Akademisi, 17(5), pp. 1925–1938. doi:10.35674/kent.1428008

Gupta, S., Gupta, V., Chanda, A. (2022): *Biomechanical modeling of novel high expansion auxetic skin grafts*. International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering, 38(5), pp. e3586. doi:10.1002/cnm.3586

Gupta, S. S., Tan, Y. Y., Chia, P. Z., et al. (2020): *Prototyping knit tensegrity shells: a design-to-fabrication workflow*. SN Applied Sciences, 2(6), pp. 1062. doi:10.1007/s42452-020-2693-4

Haftka, R. T., Gürdal, Z. (1992): *Elements of Structural Optimization*. T 11. Springer Netherlands, Dordrecht. doi:10.1007/978-94-011-2550-5

Hagishita, T., Ohsaki, M. (2009): *Topology optimization of trusses by growing ground structure method*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 37(4), pp. 377–393. doi:10.1007/s00158-008-0237-4

Hangai, Y., Wu, M. (1999): *Analytical method of structural behaviours of a hybrid structure consisting of cables and rigid structures*. Engineering Structures, 21(8), pp. 726–736. doi:10.1016/S0141-0296(98)00027-3

Hashemipour, N., Aghaei, J., Kavousi-fard, A., et al. (2021): *Optimal Singular Value Decomposition Based Big Data Compression Approach in Smart Grids*. IEEE Transactions on Industry Applications, 57(4), pp. 3296–3305. doi:10.1109/TIA.2021.3073640

He, J. H., Huang, H. H. (2018): *Tunable Acoustic Wave Propagation Through Planar Auxetic Metamaterial*. Journal of Mechanics, 34(2), pp. 113–122. doi:10.1017/jmech.2017.51

Hillerton, C. L., Julian F. V. Vincent,J Eric (1991): *Poisson's Ratio in Skin - Caroline Lees, Julian F. V. Vincent, J. Eric Hillerton, 1991*. Bio-Medical Materials and Engineering.

Huang, T., Zhao, R., Bi, L., Zhang, D., Lu, C. (2022): *Neural Embedding Singular Value Decomposition for Collaborative Filtering*. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 33(10), pp. 6021–6029. doi:10.1109/TNNLS.2021.3070853

Intrigila, C., Micheletti, A., Nodargi, N. A., Artioli, E., Bisegna, P. (2022): *Fabrication and experimental characterisation of a bistable tensegrity-like unit for lattice metamaterials*. Additive Manufacturing, 57, pp. 102946. doi:10.1016/j.addma.2022.102946

Intrigila, C., Micheletti, A., Nodargi, N. A., Bisegna, P. (2023): *Mechanical response of multistable tensegrity-like lattice chains*. Additive Manufacturing, 74, pp. 103724. doi:10.1016/j.addma.2023.103724

inzynierbudownictwa.pl (2011): *Ile waży śnieg? Jakie obciążenie dachu śniegiem zagraża jego bezpieczeństwu?* Inżynier budownictwa. https://inzynierbudownictwa.pl/ile-wazy-snieg-jakie-obciazenie-dachu-sniegiem-zagraza-jego-bezpieczenstwu/ [dostęp:25.07.2025]

James, K. A., Hansen, J. S., Martins, J. R. R. A. (2009): *Structural topology optimization for multiple load cases using a dynamic aggregation technique*. Engineering Optimization, 41(12), pp. 1103–1118. doi:10.1080/03052150902926827

Jensen, P. D. L., Sigmund, O., Groen, J. P. (2022): *De-homogenization of optimal 2D topologies for multiple loading cases*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 399, pp. 115426. doi:10.1016/j.cma.2022.115426

Ji, S., Li, L., Motra, H. B., et al. (2018): *Poisson's Ratio and Auxetic Properties of Natural Rocks*. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 123(2), pp. 1161–1185. doi:10.1002/2017JB014606

Kanno, Y. (2012): *Topology Optimization of Tensegrity Structures Under Self-Weight Loads*. Journal of the Operations Research Society of Japan, 55(2), pp. 125–145. doi:10.15807/jorsj.55.125

Kanno, Y. (2013a): *Topology optimization of tensegrity structures under compliance constraint: a mixed integer linear programming approach*. Optimization and Engineering, 14(1), pp. 61–96. doi:10.1007/s11081-011-9172-0

Kanno, Y. (2013b): *Exploring new tensegrity structures via mixed integer programming*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1), pp. 95–114. doi:10.1007/s00158-012-0881-6

Kanno, Y. (2013c): *Generating Asymmetric Tensegrity Structures via Truss Topology Optimization*. Proceedings of IASS Annual Symposia, 2013(13), pp. 1–7.

Kasprzak, A. (2014): *Ocena możliwości wykorzystania konstrukcji tensegrity w budownictwie mostowym*. Rozprawa doktorska. Politechnika Warszawska, Warszawa.

Katiyar, A. K., Hoang, A. T., Xu, D., et al. (2024): *2D Materials in Flexible Electronics: Recent Advances and Future Prospectives*. Chemical Reviews, 124(2), pp. 318–419. doi:10.1021/acs.chemrev.3c00302

Kenner, H. (1976): *Geodesic Math and How to Use It*. University of California Press.

Kharmanda, G., Olhoff, N., Mohamed, A., Lemaire, M. (2004): *Reliability-based topology optimization*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 26(5), pp. 295–307. doi:10.1007/s00158-003-0322-7

Kim, J. T., Lee, C. W., Jung, H. J., et al. (2022): *Application of 2D Materials for Adsorptive Removal of Air Pollutants*. ACS Nano, 16(11), pp. 17687–17707. doi:10.1021/acsnano.2c07937

Koohestani, K. (2020): *Innovative numerical form-finding of tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 206, pp. 304–313. doi:10.1016/j.ijsolstr.2020.09.034

Koohestani, K., Guest, S. D. (2013): *A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 50(19), pp. 2995–3007. doi:10.1016/j.ijsolstr.2013.05.014

Kranz, M., Lüdeker, J. K., Kriegesmann, B. (2021): *An empirical study on stress-based fail-safe topology optimization and multiple load path design*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 64(4), pp. 2113–2134. doi:10.1007/s00158-021-02969-1

Kułakowski, T., Krempski-Smejda, M., Heim, D. (2021): *Heat Transfer with Phase Change in a Multilayer Construction: Simulation versus Experiment*. Energies, 14(15). doi:10.3390/en14154390

Kumar, R., Kumar, M., Chohan, J. S., Kumar, S. (2022): *Overview on metamaterial: History, types and applications*. Materials Today: Proceedings, 3rd International Conference on Contemporary Advances in Mechanical Engineering, 56, pp. 3016–3024. doi:10.1016/j.matpr.2021.11.423

Kumar, S., Sen, S. (2025): *Robust Genetic Algorithm-based deployment of a hollow-rope tensegrity utility bridge*. Structures, 72, pp. 108179. doi:10.1016/j.istruc.2024.108179

Lee, S., Lee, J. (2016): *A novel method for topology design of tensegrity structures*. Composite Structures, 152, pp. 11–19. doi:10.1016/j.compstruct.2016.05.009

Lee, S., Lee, J., Kang, J. (2017): *A Genetic Algorithm Based Form-finding of Tensegrity Structures with Multiple Self-stress States*. Journal of Asian Architecture and Building Engineering, 16(1), pp. 155–162. doi:10.3130/jaabe.16.155

Lee, S., Lieu, Q. X., Vo, T. P., Lee, J. (2022): *Deep Neural Networks for Form-Finding of Tensegrity Structures*. Mathematics, 10(11), pp. 1822. doi:10.3390/math10111822

Lee, W., Jeong, Y., Yoo, J., et al. (2019): *Effect of auxetic structures on crash behavior of cylindrical tube*. Composite Structures, 208, pp. 836–846. doi:10.1016/j.compstruct.2018.10.068

Leviat (brak daty): *Halfen Detan – System cięgnowy*. https://www.halfen.com/PDF-Dateien/Druckschriften/Technische%20Produktinformationen/PL/PB_Halfen_Detan_2025-01-PL.pdf [dostęp:25.07.2025].

Levin, S. M. (2002): *The tensegrity-truss as a model for spine mechanics: biotensegrity*. Journal of Mechanics in Medicine and Biology, 02(03n04), pp. 375–388. doi:10.1142/S0219519402000472

Lewiński, T. (2001): *On algebraic equations of elastic trusses, frames and grillages*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 39(2), pp. 307–322.

Lewiński, T., Sokół, T., Graczykowski, C. (2018): *Michell Structures*. Springer Cham. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-319-95180-5

Li, H., Gao, L., Li, P. (2014): *Topology optimization of structures under multiple loading cases with a new compliance–volume product*. Engineering Optimization, 46(6), pp. 725–744. doi:10.1080/0305215X.2013.800054

Li, J., Guan, Y., Wang, Guangchun, Wang, Guilong, Zhang, H., Lin, J. (2020): *A meshless method for topology optimization of structures under multiple load cases*. Structures, 25, pp. 173–179. doi:10.1016/j.istruc.2020.03.005

Li, Y., Feng, X.-Q., Cao, Y.-P., Gao, H. (2010): *A Monte Carlo form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 47(14), pp. 1888–1898. doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.03.026

Li, Y., Yang, Q., Chang, T., Qin, T., Wu, F. (2020): *Multi-load cases topological optimization by weighted sum method based on load case severity degree and ideality*. Advances in Mechanical Engineering, 12(8), pp. 1687814020947510. doi:10.1177/1687814020947510

Li, Z., Luo, Z., Zhang, L.-C., Wang, C.-H. (2021): *Topological design of pentamode lattice metamaterials using a ground structure method*.

Liapi, K. A., Georgopoulos, T., Ioannidi, A., Kotsalis, A., Nousias, C., Spyridonos, E. (2015): *Interactive Tensegrity Pavilion*. Proceedings of IASS Annual Symposia, 2015(7), pp. 1–12.

Liapi, K. A., Papantoniou, A. (2025): *Advancements and challenges in the design and implementation of tensegrity networks of zero mean curvature*. Meccanica, 60(3), pp. 709–721. doi:10.1007/s11012-024-01894-z

Liapi, K., Kim, J. (2009): *Tensegrity Structures of Helical Shape: A Parametric Approach*. *Proceedings of the eCAADe 2009 Conference on Computation: The New Realm of Architectural Design*. Istanbul, Turkiye. pp. 53–58.

Lim, T.-C. (2015): *Auxetic Materials and Structures*. 1 wyd. doi:https://doi.org/10.1007/978-981-287-275-3

Liu, K., Paulino, G. H. (2019): *Tensegrity topology optimization by force maximization on arbitrary ground structures*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 59(6), pp. 2041–2062. doi:10.1007/s00158-018-2172-3

Liu, K., Zegard, T., Pratapa, P. P., Paulino, G. H. (2019): *Unraveling tensegrity tessellations for metamaterials with tunable stiffness and bandgaps*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 131, pp. 147–166. doi:10.1016/j.jmps.2019.05.006

Liu, R., Davis-Sikora, D. (2017): *Form-finding of an ecological "green" wall using bending-active biotensegrity structure*. *Architecture of Complexity-Design, Systems, Society and Environment: Proceedings of the ARCC Annual Symposium 2017*. Salt Lake City, Utah, USA.

Logo, J., Ismail, H. (2020): *Milestones in the 150-Year history of topology optimization: A review*. COMPUTER ASSISTED METHODS IN ENGINEERING AND SCIENCE, 27(2–3). doi:10.24423/cames.296

Lopes, C. G., Santos, R. B. dos, Novotny, A. A. (2015): *Topological derivative-based topology optimization of structures subject to multiple load-cases*. Latin American Journal of Solids and Structures, 12, pp. 834–860. doi:https://doi.org/10.1590/1679-78251252

Lógó, J., Balogh, B., Pintér, E. (2018): *Topology optimization considering multiple loading*. Computers & Structures, CIVIL-COMP 2017, 207, pp. 233–244. doi:10.1016/j.compstruc.2017.03.018

M, N. S., Bindhu, B. (2025): *A Comprehensive Review on Two-Dimensional Materials for Water Treatment Applications*. ES Energy and Environment, Volume 28 (June 2025)(0), pp. 1411.

Ma, S., Yuan, X.-F., Xie, S.-D. (2019): *A New Genetic Algorithm-based Topology Optimization Method of Tensegrity Tori*. KSCE Journal of Civil Engineering, 23(5), pp. 2136–2147. doi:10.1007/s12205-019-1700-z

Ma, Y., Zhang, Q., Dobah, Y., et al. (2018): *Meta-tensegrity: Design of a tensegrity prism with metal rubber*. Composite Structures, 206, pp. 644–657. doi:10.1016/j.compstruct.2018.08.067

Maciejewski, A. A., Klein, C. A. (1989): *The Singular Value Decomposition: Computation and Applications to Robotics*. The International Journal of Robotics Research, 8(6), pp. 63–79. doi:10.1177/027836498900800605

Malekafzali Ardakan, A., Sok, E., Niemasz, J. (2017): *Electrochromic glass vs. fritted glass: an analysis of glare control performance*. Energy Procedia, CISBAT 2017 International ConferenceFuture Buildings & Districts – Energy Efficiency from Nano to Urban Scale, 122, pp. 343–348. doi:10.1016/j.egypro.2017.07.334

Manewa, A., Siriwardena, M., Ross, A., Madanayake, U. (2016): *Adaptable buildings for sustainable built environment*. Built Environment Project and Asset Management, 6(2), pp. 139–158. doi:10.1108/BEPAM-10-2014-0053

Manu, B. R., Gupta, A., Jayatissa, A. H. (2021): *Tribological Properties of 2D Materials and Composites—A Review of Recent Advances*. Materials, 14(7), pp. 1630. doi:10.3390/ma14071630

Markocki, B., Oleszek, R. (2011): *Konstrukcje tensegrity w zastosowaniu mostowym na przykładzie koncepcji kładki KL-03 nad trasą S-7 Salomea–Wolica.* Jachranka, Polska.

Martyniuk-Sienkiewicz, K., Al Sabouni-Zawadzka, A. (2021): *Plate tensegrity structures controlled with self-stress*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 1015(1), pp. 012025. doi:10.1088/1757-899X/1015/1/012025

Martyniuk-Sienkiewicz, K., Gilewski, W. (2023): *Local strengthening and weakening of shell-like tensegrity lattices with the use of self-equlibrated normal forces*. AIP Conference Proceedings, 2887(1), pp. 020011. doi:10.1063/5.0158758

Masic, M., Skelton, R. E., Gill, P. E. (2005): *Algebraic tensegrity form-finding*. International Journal of Solids and Structures, 42(16), pp. 4833–4858. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.01.014

Mathias Oster, Marcelo A. Dias, Timo de Wolff, Myfanwy E. Evans (2021): *Reentrant tensegrity: A three-periodic, chiral, tensegrity structure that is auxetic | Science Advances*. Science advances, 7(50). doi:10.1126/sciadv.abj6737

Meena, K., Singamneni, S. (2019): *A new auxetic structure with significantly reduced stress concentration effects*. Materials & Design, 173, pp. 107779. doi:10.1016/j.matdes.2019.107779

Melnyk, V. (2023): *Soft Knitted Tensile Membrane Tensegrity Helix-Tower*. Enquiry The ARCC Journal for Architectural Research, 20(2), pp. 60–68. doi:10.17831/enqarcc.v20i2.1155

Menon, H. G., Dutta, S., Krishnan, A., M. p., H., Shankar, B. (2022): *Proposed auxetic cluster designs for lightweight structural beams with improved load bearing capacity*. Engineering Structures, 260, pp. 114241. doi:10.1016/j.engstruct.2022.114241

Micheletti, A. (2025): *Basic Tensegrity Concepts and Calculation Methods*. W: Fraternali F, Rimoli JJ, red. *Tensegrity Systems: Basic Concepts, Mechanical Metamaterials, Biotensegrity*. Springer Nature Switzerland, Cham. pp. 1–44. doi:10.1007/978-3-031-82283-4_1

Micheletti, A., Podio-Guidugli, P. (2022): *Seventy years of tensegrities (and counting)*. Archive of Applied Mechanics, 92(9), pp. 2525–2548. doi:10.1007/s00419-022-02192-4

Micheletti, A., Ruscica, G., Fraternali, F. (2019): *On the compact wave dynamics of tensegrity beams in multiple dimensions*. Nonlinear Dynamics, 98(4), pp. 2737–2753. doi:10.1007/s11071-019-04986-8

Micheletti, A., Santos, F. A., Guest, S. D. (2023): *Prestrain-induced bistability in the design of tensegrity units for mechanical metamaterials*. Applied Physics Letters, 123(12), pp. 121702. doi:10.1063/5.0160023

Micheletti, A., Williams, W. (2007): *A marching procedure for form-finding for tensegrity structures*. Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2(5), pp. 857–882. doi:10.2140/jomms.2007.2.857

Miller, W., Ren, Z., Smith, C. W., Evans, K. E. (2012): *A negative Poisson's ratio carbon fibre composite using a negative Poisson's ratio yarn reinforcement*. Composites Science and Technology, 72(7), pp. 761–766. doi:10.1016/j.compscitech.2012.01.025

Mirzaaghazadeh, K., Abedi, K., Shekastehband, B. (2021): *An efficient self-stress design of tensegrity shell structures*. Meccanica, 56(1), pp. 147–168. doi:10.1007/s11012-020-01260-9

Mlejnek, H. P. (1992): *Some aspects of the genesis of structures*. Structural optimization, 5(1), pp. 64–69. doi:10.1007/BF01744697

Modano, M., Mascolo, I., Fraternali, F., Bieniek, Z. (2018): *Numerical and Analytical Approaches to the Self-Equilibrium Problem of Class $\vartheta = 1$ Tensegrity Metamaterials*. Frontiers in Materials, 5. doi:10.3389/fmats.2018.00005

Morrow, G. (2018): *Practice-based research, testing and application of Tensegrity for a demountable 'Tension Pavilion'*. Proceedings of IASS Annual Symposia, 2018(4), pp. 1–10.

Motro, R. (1984): *Forms and forces in tensegrity systems*. Proceedings of Third International Conference on Space Structures, 1984.

Motro, R. (1990): *Tensegrity Systems and Geodesic Domes*. International Journal of Space Structures, 5(3–4), pp. 341–351. doi:10.1177/026635119000500315

Motro, R., Raducanu, V. (2003): *Tensegrity Systems*. International Journal of Space Structures, 18(2), pp. 77–84. doi:10.1260/026635103769518198

Motta, J. de C., Fraternali, F., Saccomandi, G. (2024): *Rarefaction pulses on tensegrity lattices are just sech^2-solitary (dark) waves*. Meccanica, 60, pp. 3429–3438. doi:https://doi.org/10.1007/s11012-024-01853-8

my-christmasdecoration.shop (2025): *Christmas Decoration Shop*. https://my-christmasdecoration.shop/ [dostęp:25.07.2025]

Nguyen-Van, V., Choudhry, N. K., Panda, B., Nguyen-Xuan, H., Tran, P. (2022): *Performance of concrete beam reinforced with 3D printed Bioinspired primitive scaffold subjected to three-point bending*. Automation in Construction, 134, pp. 104060. doi:10.1016/j.autcon.2021.104060

Novak, N., Krstulović-Opara, L., Ren, Z., Vesenjak, M. (2020): *Compression and shear behaviour of graded chiral auxetic structures*. Mechanics of Materials, 148, pp. 103524. doi:10.1016/j.mechmat.2020.103524

Obara, P., Solovei, M., Tomasik, J. (2023): *Genetic Algorithm as a Tool for the Determination of the Self-Stress States of Tensegrity Domes*. Applied Sciences, 13(9), pp. 5267. doi:10.3390/app13095267

Obara, P., Solovei, M., Tomasik, J. (2024): *Parametric dynamic analysis of tensegrity cable-strut domes*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 62 nr 2. doi:10.15632/jtam-pl/183833

Obara, P., Tomasik, J. (2020): *Parametric Analysis of Tensegrity Plate-Like Structures: Part 1—Qualitative Analysis*. Applied Sciences, 10(20). doi:10.3390/app10207042

Obara, P., Tomasik, J. (2021): *Active Control of Stiffness of Tensegrity Plate-like Structures Built with Simplex Modules*. Materials, 14(24). doi:10.3390/ma14247888

Oh, C. L., Choong, K. K., Nishimura, T., Kim, J.-Y. (2022): *Multi-Directional Shape Change Analysis of Biotensegrity Model Mimicking Human Spine Curvature*. Applied Sciences, 12(5). doi:10.3390/app12052377

Oliveira, M. C., Skelton, R. E. (2009): *Tensegrity Systems*. Springer US, Boston, MA. doi:10.1007/978-0-387-74242-7

Pagitz, M., Mirats Tur, J. M. (2009): *Finite element based form-finding algorithm for tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 46(17), pp. 3235–3240. doi:10.1016/j.ijsolstr.2009.04.018

Pagliocca, N., Uddin, K. Z., Anni, I. A., Shen, C., Youssef, G., Koohbor, B. (2022): *Flexible planar metamaterials with tunable Poisson's ratios*. Materials & Design, 215, pp. 110446. doi:10.1016/j.matdes.2022.110446

Pan, H., Li, Y., Yu, X., Zhou, K. (2025): *Tensegrity structure-inspired tunable membrane-type acoustic metamaterials: Conceptual design, fabrication, and performance investigation*. Thin-Walled Structures, 216, pp. 113717. doi:10.1016/j.tws.2025.113717

Paul, S., Sychterz, A. C. (2022): *A Computational Analysis for an Adaptive Tensegrity-Based Four-Module Roof Structure*. W: Walbridge S, Nik-Bakht M, Ng KTW, et al., red. *Proceedings of the Canadian Society of Civil Engineering Annual Conference 2021*. Springer, Singapore. pp. 261–271. doi:10.1007/978-981-19-0656-5_22

Pauli, N. (2023): *TensyDome: A pavilion combining tensegrity ring and tensile architecture*. W: Association T, Université N, red. *Proceedings of the TensiNet Symposium 2023 - TENSINANTES2023 Membrane architecture: the seventh established building material. Designing reliable and sustainable structures for the urban environment*. Jean-Christophe THOMAS and Sabine CARIO and Marijke MOLLAERT and Evi CORNE, Nantes (France), France.

Pellegrino, S. (1986): *Mechanics of Kinematically Indeterminate Structures.* Doctoral Thesis. University of Cambridge, Cambridge, UK.

Pełczyński, J., Gilewski, W. (2019): *Algebraic Formulation for Moderately Thick Elastic Frames, Beams, Trusses, and Grillages within Timoshenko Theory*. Mathematical Problems in Engineering, 2019(1), pp. 7545473. doi:10.1155/2019/7545473

Pełczyński, J., Martyniuk-Sienkiewicz, K. (2025): *Computational Modelling of a Prestressed Tensegrity Core in a Sandwich Panel*. Materials, 18(21). doi:10.3390/ma18214880

Pizzigoni, A., Micheletti, A., Ruscica, G., et al. (2019): *A new T4 configuration for a deployable tensegrity pavilion*. Proceedings of IASS Annual Symposia, 2019(9), pp. 1–6.

Polinceusz, P. (2019): *STRUCTURE OF ARCHITECTURE – TENSEGRITIES IN THE CONSTRUCTION OF ARCHITECTURAL SPACE*. Architecture, Civil Engineering, Environment, 12(1), pp. 45–52. doi:10.21307/acee-2019-004

Polski Komitet Normalizacyjny (2010a): *PN-EN 1990 Eurokod: Podstawy projektowania konstrukcji.*

Polski Komitet Normalizacyjny (2010b): *PN-EN 1991-1-3-2005 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-3: Oddziaływania ogólne – Obciążenie śniegiem.*

Polski Komitet Normalizacyjny (2011a): *PN-EN 1991-1-1-2004 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-1: Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.*

Polski Komitet Normalizacyjny (2011b): *PN-EN 1991-1-3-2008 Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-4: Oddziaływania ogólne – Obciążenie wiatru.*

Pugh, A. (1976): *An Introduction to Tensegrity*. DGO-Digital original, 1. University of California Press. doi:10.2307/jj.8500981

Qi, C., Remennikov, A., Pei, L.-Z., Yang, S., Yu, Z.-H., Ngo, T. D. (2017): *Impact and close-in blast response of auxetic honeycomb-cored sandwich panels: Experimental tests and numerical simulations*. Composite Structures, 180, pp. 161–178. doi:10.1016/j.compstruct.2017.08.020

Ramesh, V., Anbarasan, M. I., Muthuramu, B. (2025): *Advanced strategies in earthquake-resistant structural engineering: seismic design, materials, and innovations*. Asian Journal of Civil Engineering, 26(4), pp. 1413–1428. doi:10.1007/s42107-025-01298-8

Ren, X., Shen, J., Tran, P., Ngo, T. D., Xie, Y. M. (2018a): *Auxetic nail: Design and experimental study*. Composite Structures, 184, pp. 288–298. doi:10.1016/j.compstruct.2017.10.013

Ren, X., Shen, J., Tran, P., Ngo, T. D., Xie, Y. M. (2018b): *Design and characterisation of a tuneable 3D buckling-induced auxetic metamaterial*. Materials & Design, 139, pp. 336–342. doi:10.1016/j.matdes.2017.11.025

Rhode-Barbarigos, L., Ali, N. B. H., Motro, R., Smith, I. F. C. (2012): *Design Aspects of a Deployable Tensegrity-Hollow-rope Footbridge*. International Journal of Space Structures, 27(2–3), pp. 81–95. doi:10.1260/0266-3511.27.2-3.81

Rhode-Barbarigos, L., Hadj Ali, N. B., Motro, R., Smith, I. F. C. (2010): *Designing tensegrity modules for pedestrian bridges*. Engineering Structures, 32(4), pp. 1158–1167. doi:10.1016/j.engstruct.2009.12.042

Riether, G., Wit, A. J., Putt, S. T. (2015): *The underwood pavilion: An investigation in parametric tensegrity structures*. *CAADRIA 2015 - 20th International Conference on Computer-Aided Architectural Design Research in Asia: Emerging Experiences in the Past, Present and Future of Digital Architecture*. The Association for Computer-Aided Architectural Design Research in Asia (CAADRIA). pp. 663–672.

Rimoli, J. J. (2018): *A reduced-order model for the dynamic and post-buckling behavior of tensegrity structures*. Mechanics of Materials, IUTAM Symposium on Dynamic Instabilities in Solids, 116, pp. 146–157. doi:10.1016/j.mechmat.2017.01.009

Rimoli, J. J., Garanger, K., Ruffini, F. (2025): *Flexible Tensegrity Structures: From Space Applications to 3D Tensegrity Metamaterials*. W: Fraternali F, Rimoli JJ, red. *Tensegrity Systems: Basic Concepts, Mechanical Metamaterials, Biotensegrity*. Springer Nature Switzerland, Cham. pp. 101–128. doi:10.1007/978-3-031-82283-4_5

Rimoli, J. J., Pal, R. K. (2017): *Mechanical response of 3-dimensional tensegrity lattices*. Composites Part B: Engineering, Composite lattices and multiscale innovative materials and structures, 115, pp. 30–42. doi:10.1016/j.compositesb.2016.10.046

Rutsch, F., Fina, M., Freitag, S. (2025): *Structural topology optimization with simultaneous stress and displacement constraints considering multiple load cases*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 68(2), pp. 42. doi:10.1007/s00158-024-03954-0

Safaei, S. D., Eriksson, A., Micheletti, A., Tibert, G. (2013): *Study of Various Tensegrity Modules as Building Blocks for Slender Booms*. International Journal of Space Structures, 28(1), pp. 41–52. doi:10.1260/0266-3511.28.1.41

Salahshoor, H., Pal, R. K., Rimoli, J. J. (2018): *Material symmetry phase transitions in three-dimensional tensegrity metamaterials*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 119, pp. 382–399. doi:10.1016/j.jmps.2018.07.011

Santos, F. A. (2023): *Toward a Novel Energy-Dissipation Metamaterial with Tensegrity Architecture*. Advanced Materials, 35(26), pp. 2300639. doi:10.1002/adma.202300639

Santos, F. A. (2025): *Tensegrity metastructure with tunable stiffness, strength, and energy dissipation*. Extreme Mechanics Letters, 81, pp. 102420. doi:10.1016/j.eml.2025.102420

Santos, F. A., Singh, N., Amendola, A., Fraternali, F., Micheletti, A. (2021): *SEISMIC METAMATERIALS WITH TENSEGRITY ARCHITECTURE*. Athens, Greece. pp. 1867–1873. doi:10.7712/120121.8607.19347

Scarr, G. (2008): *A model of the cranial vault as a tensegrity structure, and its significance to normal and abnormal cranial development*. International Journal of Osteopathic Medicine, 11(3), pp. 80–89. doi:10.1016/j.ijosm.2008.03.006

Scarr, G. (2025): *Biotensegrity: Concept, Principles and Applications*. W: Fraternali F, Rimoli JJ, red. *Tensegrity Systems: Basic Concepts, Mechanical Metamaterials, Biotensegrity*. Springer Nature Switzerland, Cham. pp. 151–174. doi:10.1007/978-3-031-82283-4_7

Schek, H.-J. (1974): *The force density method for form finding and computation of general networks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 3(1), pp. 115–134. doi:10.1016/0045-7825(74)90045-0

Senatore, G., Wang, Y. (2024): *Topology Optimization of Adaptive Structures: New Limits of Material Economy*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 422, pp. 116710. doi:10.1016/j.cma.2023.116710

Seuntjens, O., Belmans, B., Buyle, M., Audenaert, A. (2022): *A critical review on the adaptability of ventilation systems: Current problems, solutions and opportunities*. Building and Environment, 212, pp. 108816. doi:10.1016/j.buildenv.2022.108816

Shang, E., Li, A., Islam, M. S., Zhang, L.-Y., Cao, C. (Chase) (2025): *Adaptive Deployable Structure Enabled by Actively Controlled Tensegrity for Space Debris Removal*. Advanced Science, 12(14), pp. 2408617. doi:10.1002/advs.202408617

Shao, S., Guo, M., Zhang, A., Zhang, Y., Li, Y., Li, Z. (2024): *Form-finding of tensegrity structures based on graph neural networks*. Advances in Structural Engineering, 27(15), pp. 2664–2690. doi:10.1177/13694332241276051

Shen, J., Zhou, S., Huang, X., Xie, Y. M. (2014): *Simple cubic three-dimensional auxetic metamaterials*. physica status solidi (b), 251(8), pp. 1515–1522. doi:10.1002/pssb.201451304

SJP PWN (brak daty): *optymalizacja - Słownik Języka Polskiego PWN*. https://sjp.pwn.pl/sjp/optymalizacja;2569873.html [dostęp:02.04.2026]

Sokolowski, J., Zochowski, A. (1999): *On the Topological Derivative in Shape Optimization*. SIAM Journal on Control and Optimization, 37(4), pp. 1251–1272. doi:https://doi.org/10.1137/S0363012997323230

Song, H., Liu, J., Liu, B., Wu, J., Cheng, H.-M., Kang, F. (2018): *Two-Dimensional Materials for Thermal Management Applications*. Joule, 2(3), pp. 442–463. doi:10.1016/j.joule.2018.01.006

Su, Y., Xu, X., Shi, J., Huang, G. (2021): *A 3D Mechanism-driven Hexagonal Metamaterial: Evaluation of Auxetic Behavior*. International Journal of Mechanical Sciences, 209, pp. 106699. doi:10.1016/j.ijmecsci.2021.106699

Su, Y., Zhang, J., Ohsaki, M., Wu, Y. (2020): *Topology optimization and shape design method for large-span tensegrity structures with reciprocal struts*. International Journal of Solids and Structures, 206, pp. 9–22. doi:10.1016/j.ijsolstr.2020.09.002

Subramani, P., Rana, S., Oliveira, D. V., Fangueiro, R., Xavier, J. (2014): *Development of novel auxetic structures based on braided composites*. Materials & Design, 61, pp. 286–295. doi:10.1016/j.matdes.2014.04.067

Sui, Y. K., Du, J. Z., Guo, Y. Q. (2006): *TOPOLOGICAL OPTIMIZATION OF FRAME STRUCTURES UNDER MULTIPLE LOADING CASES*. W: LIU GR, TAN VBC, HAN X, red. *Computational Methods*. Springer Netherlands, Dordrecht. pp. 1015–1022. doi:10.1007/978-1-4020-3953-9_2

Sultan, C. (1999): *Modeling, design, and control of tensegrity structures with applications*. Ph.D.

Sultan, C., Corless, M., Skelton, R. (1999): *Reduced prestressability conditions for tensegrity structures*. *40th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit*. American Institute of Aeronautics and Astronautics. doi:10.2514/6.1999-1478

Sun, J., Gai, M., Zhang, M., et al. (2025): *Isotropic Energy-Absorbing Metamaterial with Tensegrity-Inspired Architecture and Auxetic Behavior*. Advanced Materials, n/a(n/a), pp. e10155. doi:10.1002/adma.202510155

Sun, J., Zhang, H., Zhang, M., et al. (2025): *Twist, Recover, Repeat: Helical Tensegrity Metamaterials with Compression-Torsion Coupling, Negative Dissipation, and Programmable Energy Response*. Advanced Functional Materials, n/a(n/a), pp. e16110. doi:10.1002/adfm.202516110

Szybiński, J. (2012): *Kładka dla pieszych przez Odrę we Wrocławiu*. Master Thesis. Wrocław University of Science and Technology, Wrocław, Polska.

Taherkhani, B., Nasri, R., Tuncay Atalay, A., Malmir Chegini, M., Atalay, O. (2024): *Design of the monolithic planar isotropic auxetic piezo-resistive sensor glove to detect human hand motion*. Journal of Materials Science, 59(2), pp. 686–697. doi:10.1007/s10853-023-09212-w

Tan, B., Jawed, B., Liu, K. (2025): *Tensegrity-inspired sandwich metamaterial for reprogrammable stiffness and impact mitigation*. International Journal of Mechanical Sciences, 296, pp. 110344. doi:10.1016/j.ijmecsci.2025.110344

Tan, Y. Y., Tracy, K. J., Yogiaman, C. (2023): *Towards upscaling membrane tensegrity shells: A design-to-fabrication workflow*. Proceedings of IASS Annual Symposia, 2023(18), pp. 1–10.

Tedjosaputro, M., Maurina, A. (2025): *Multi-objective optimisation of bamboo tensegrity structure for post-disaster immediate relief*. City, Territory and Architecture, 12(1), pp. 12. doi:10.1186/s40410-025-00263-x

Tempo (brak daty): *Strona producenta tempo*. https://www.tempo.com.tn/etfesystem [dostęp:25.07.2025]

Tensaform (brak daty): *Etfe systems new generation architectural solutions*. https://pdf.archiexpo.com/pdf/tensaform/etfe/59245-377897.html [dostęp:25.07.2025].

Tian, X., Zhang, Y., Spencer, B. F., Tao, C. (2024): *A study of global cable force identification of tensegrity structures*. Structures, 65, pp. 106610. doi:10.1016/j.istruc.2024.106610

Tibert, A. G., Pellegrino, S. (2003): *Review of Form-Finding Methods for Tensegrity Structures*. International Journal of Space Structures, 18(4), pp. 209–223. doi:10.1260/026635103322987940

Tibert, G. (2002): *Deployable Tensegrity Structures for Space Applications*. Doctoral Thesis. Kungliga Tekniska Hogskolan - Royal Institute of Technology, Sweden.

Tran, H. C., Lee, J. (2010): *Advanced form-finding of tensegrity structures*. Computers & Structures, 88(3), pp. 237–246. doi:10.1016/j.compstruc.2009.10.006

Tran, H. C., Lee, J. (2011): *Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress*. Acta Mechanica, 222(1), pp. 131. doi:10.1007/s00707-011-0524-9

Tran, H. C., Lee, J. (2013): *Form-finding of tensegrity structures using double singular value decomposition*. Engineering with Computers, 29(1), pp. 71–86. doi:10.1007/s00366-011-0245-7

Vangelatos, Z., Micheletti, A., Grigoropoulos, C. P., et al. (2020): *Design and Testing of Bistable Lattices with Tensegrity Architecture and Nanoscale Features Fabricated by Multiphoton Lithography*. Nanomaterials, 10(4). doi:10.3390/nano10040652

Vassart, N., Motro, R. (1999): *Multiparametered Formfinding Method: Application to Tensegrity Systems - N. Vassart, R. Motro, 1999*. International journal of space structures, 14(2), pp. 147–154. doi:https://doi.org/10.1260/0266351991494768

Verma, P., L. Smith, C., C. Griffin, A., L. Shofner, M. (2022): *Towards textile metamaterials: a pathway to auxeticity and tensegrity in a needle-punched nonwoven stiff felt*. Materials Advances, 3(15), pp. 6324–6334. doi:10.1039/D2MA00405D

Wang, B.-B. (1998): *Cable-strut systems: part I — tensegrity*. Journal of Constructional Steel Research, 45(3), pp. 281–289. doi:10.1016/S0143-974X(97)00075-8

Wang, D., Gao, W. (2020): *Robust topology optimization under multiple independent uncertainties of loading positions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 121(22), pp. 4944–4970. doi:10.1002/nme.6503

Wang, J., Panesar, A. (2022): *Machine learning based lattice generation method derived from topology optimisation*. Additive Manufacturing, 60, pp. 103238. doi:10.1016/j.addma.2022.103238

Wang, X., Cai, J., Lee, D. S., Xu, Y., Feng, J. (2022): *Numerical form-finding of multi-order tensegrity structures by grouping elements*. Steel and Composite Structures, pp. 267–277.

Wang, Y., Han, Z., Xu, X., Luo, Y. (2024): *Topology optimization of active tensegrity structures*. Computers & Structures, 305, pp. 107513. doi:10.1016/j.compstruc.2024.107513

Wang, Y., Xu, X., Luo, Y. (2020): *Topology design of general tensegrity with rigid bodies*. International Journal of Solids and Structures, 202, pp. 278–298. doi:10.1016/j.ijsolstr.2020.05.030

Wang, Y., Xu, X., Luo, Y. (2021a): *A unifying framework for form-finding and topology-finding of tensegrity structures*. Computers & Structures, 247, pp. 106486. doi:10.1016/j.compstruc.2021.106486

Wang, Y., Xu, X., Luo, Y. (2021b): *Minimal mass design of active tensegrity structures*. Engineering Structures, 234, pp. 111965. doi:10.1016/j.engstruct.2021.111965

Wang, Y., Xu, X., Luo, Y. (2023): *Self-Equilibrium, Mechanism Stiffness, and Self-Stress Design of General Tensegrity With Rigid Bodies or Supports: A Unified Analysis Approach*. Journal of Applied Mechanics, 90(081004). doi:10.1115/1.4062225

Wang, Z., Zhang, M., Zhang, R., Sun, J., Chu, J. (2025): *Tensegrity-Inspired Pre-Stress Control for Programmable Multistability and Stiffness in Mechanical Metamaterials*. Advanced Functional Materials, 35(15), pp. 2420892. doi:10.1002/adfm.202420892

Wei, Y., Pan, F., Du, J., Xiang, J., Chen, Y. (2025): *Tensegrity metamaterial-based shear band structure for non-pneumatic tires*. Forces in Mechanics, 21, pp. 100341. doi:10.1016/j.finmec.2025.100341

Wen, L., Pan, F., Ding, X. (2020): *Tensegrity metamaterials for soft robotics*. Science Robotics, 5(45), pp. eabd9158. doi:10.1126/scirobotics.abd9158

Williams, J. L., Lewis, J. L. (1982): *Properties and an Anisotropic Model of Cancellous Bone From the Proximal Tibial Epiphysis*. Journal of Biomechanical Engineering, 104(1), pp. 50–56. doi:10.1115/1.3138303

Woldseth, R. V., Aage, N., Bærentzen, J. A., Sigmund, O. (2022): *On the use of Artificial Neural Networks in Topology Optimisation*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 65(10), pp. 294. doi:10.1007/s00158-022-03347-1

Wu, K., Zhao, X., Bifano, T. G., Anderson, S. W., Zhang, X. (2022): *Auxetics-Inspired Tunable Metamaterials for Magnetic Resonance Imaging*. Advanced Materials, 34(6), pp. 2109032. doi:10.1002/adma.202109032

Xiao, S.-H., Zhang, C., Qin, Q.-H., Wang, H. (2021): *A novel planar auxetic phononic crystal with periodic cookie-shaped cellular microstructures: Mechanics of Advanced Materials and Structures: Vol 29, No 23*. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 29(23), pp. 3345–3358. doi:https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896057

Xie, Y. M., Steven, G. P. (1993): *A simple evolutionary procedure for structural optimization*. Computers & Structures, 49(5), pp. 885–896. doi:10.1016/0045-7949(93)90035-C

Xiong, Y., Zhao, Z.-L., Lu, H., Shen, W., Xie, Y. M. (2023): *Parallel BESO framework for solving high-resolution topology optimisation problems*. Advances in Engineering Software, 176, pp. 103389. doi:10.1016/j.advengsoft.2022.103389

Xu, X., Huang, S., Shu, T., Wang, Y., Luo, Y. (2022): *A Novel Two-Step Tensegrity Topology-Finding Method Based on Mixed Integer Programming and Nonlinear Programming*. International Journal of Steel Structures, 22(4), pp. 1266–1282. doi:10.1007/s13296-022-00634-x

Xu, X., Wang, Y., Luo, Y. (2016): *General Approach for Topology-Finding of Tensegrity Structures*. Journal of Structural Engineering, 142(10), pp. 04016061. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001532

Xu, X., Wang, Y., Luo, Y., Hu, D. (2018): *Topology Optimization of Tensegrity Structures Considering Buckling Constraints*. Journal of Structural Engineering, 144(10), pp. 04018173. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002156

Xu, Y., Schlangen, E., Luković, M., Šavija, B. (2021): *Tunable mechanical behavior of auxetic cementitious cellular composites (CCCs): Experiments and simulations*. Construction and Building Materials, 266, pp. 121388. doi:10.1016/j.conbuildmat.2020.121388

Xu Yin, Shuai Zhang, Guang-Hui Xu, Li-Yuan Zhang, Zhi-Ying Gao (2020): *Bandgap characteristics of a tensegrity metamaterial chain with defects*. Extreme Mechanics Letters, 36, pp. 100668. doi:10.1016/j.eml.2020.100668

Xue, B., Han, X., Zhu, H., et al. (2025): *Hydrogels with prestressed tensegrity structures*. Nature Communications, 16(1), pp. 3637. doi:10.1038/s41467-025-58956-3

Yamamoto, M., Gan, B. S., Fujita, K., Kurokawa, J. (2011): *A Genetic Algorithm Based Form-Finding for Tensegrity Structure*. Procedia Engineering, The Proceedings of the Twelfth East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering and Construction, 14, pp. 2949–2956. doi:10.1016/j.proeng.2011.07.371

Yan, J., Zhang, Q., Xu, Q., et al. (2022): *Deep learning driven real time topology optimisation based on initial stress learning*. Advanced Engineering Informatics, 51, pp. 101472. doi:10.1016/j.aei.2021.101472

Yang, H., Ma, L. (2020): *Design and characterization of axisymmetric auxetic metamaterials*. Composite Structures, 249, pp. 112560. doi:10.1016/j.compstruct.2020.112560

Yang, H., Zhang, J., Wang, J., et al. (2025): *Delocalized Deformation Enhanced Reusable Energy Absorption Metamaterials Based on Bistable Tensegrity*. Advanced Functional Materials, 35(5), pp. 2410217. doi:10.1002/adfm.202410217

Yang, R. J., Chen, C. J. (1996): *Stress-based topology optimization*. Structural optimization, 12(2), pp. 98–105. doi:10.1007/BF01196941

Yang, S., Sultan, C. (2016): *Modeling of tensegrity-membrane systems*. International Journal of Solids and Structures, 82, pp. 125–143. doi:10.1016/j.ijsolstr.2015.09.012

Yang, S., Sultan, C. (2019): *Deployment of foldable tensegrity-membrane systems via transition between tensegrity configurations and tensegrity-membrane configurations*. International Journal of Solids and Structures, 160, pp. 103–119. doi:10.1016/j.ijsolstr.2018.10.017

Yu, R., Luo, W., Yuan, H., Liu, J., He, W., Yu, Z. (2020): *Experimental and numerical research on foam filled re-entrant cellular structure with negative Poisson's ratio*. Thin-Walled Structures, 153, pp. 106679. doi:10.1016/j.tws.2020.106679

Yuan, X., Chen, M., Yao, Y., et al. (2021): *Recent progress in the design and fabrication of multifunctional structures based on metamaterials*. Current Opinion in Solid State and Materials Science, 25(1), pp. 100883. doi:10.1016/j.cossms.2020.100883

Yuan, X.-F., Ma, S., Jiang, S.-H. (2017): *Form-finding of tensegrity structures based on the Levenberg–Marquardt method*. Computers & Structures, 192, pp. 171–180. doi:10.1016/j.compstruc.2017.07.005

Zawadzki, A., Al Sabouni-Zawadzka, A. A. (2020): *In Search of Lightweight Deployable Tensegrity Columns*. Applied Sciences, 10(23). doi:10.3390/app10238676

Zhachek, M. (2025): *A Comparative Analysis of a Tensegrity Pedestrian Bridge and Standard Two Girder Steel Bridge*. Master Thesis. The Cooper Union for the Advancement of Science and Art.

Zhang, H., Wang, L., Shi, W. (2023): *Seismic control of adaptive variable stiffness intelligent structures using fuzzy control strategy combined with LSTM*. Journal of Building Engineering, 78, pp. 107549. doi:10.1016/j.jobe.2023.107549

Zhang, J. Y., Ohsaki, M. (2006): *Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures*. International Journal of Solids and Structures, 43(18), pp. 5658–5673. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.10.011

Zhang, J.Y., Ohsaki, M. (2006): *Form-Finding of Tensegrity Structures Subjected to Geometrical Constraints*. International Journal of Space Structures, 21(4), pp. 183–195. doi:10.1260/026635106780866024

Zhang, L., Maurin, B., Motro, R. (2006): *Form-Finding of Nonregular Tensegrity Systems*. Journal of Structural Engineering, 132(9). doi:https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:9(1435)

Zhang, L.-Y., Li, S.-X., Zhu, S.-X., Zhang, B.-Y., Xu, G.-K. (2018): *Automatically assembled large-scale tensegrities by truncated regular polyhedral and prismatic elementary cells*. Composite Structures, 184, pp. 30–40. doi:10.1016/j.compstruct.2017.09.074

Zhang, L.-Y., Yin, X., Yang, J., Li, A., Xu, G.-K. (2021): *Multilevel structural defects-induced elastic wave tunability and localization of a tensegrity metamaterial*. Composites Science and Technology, 207, pp. 108740. doi:10.1016/j.compscitech.2021.108740

Zhang, P., Zhou, J., Chen, J. (2021): *Form-finding of complex tensegrity structures using constrained optimization method*. Composite Structures, 268, pp. 113971. doi:10.1016/j.compstruct.2021.113971

Zhang, Q., Zhang, D., Dobah, Y., Scarpa, F., Fraternali, F., Skelton, R. E. (2018): *Tensegrity cell mechanical metamaterial with metal rubber*. Applied Physics Letters, 113(3), pp. 031906. doi:10.1063/1.5040850

Zhang, S., Zhang, M., Sun, J., Chu, J. (2025): *Modular mechanical metamaterial surface structure with tensegrity characteristics*. International Journal of Mechanical Sciences, 301, pp. 110543. doi:10.1016/j.ijmecsci.2025.110543

Zhang, W., Feng, X., Xu, X., Lin, Y., Zheng, L., Chen, Y. (2025): *Topological form-finding analysis of regular tensegrity structure based on parallel component coding algorithm*. Structures, 76, pp. 108906. doi:10.1016/j.istruc.2025.108906

Zhang, X. G., Jiang, W., Zhang, Y., et al. (2022): *Energy absorption properties of composite tubes with hexagonal and re-entrant honeycomb fillers*. Construction and Building Materials, 356, pp. 129298. doi:10.1016/j.conbuildmat.2022.129298

Zhang, X., Hou, L., Ciesielski, A., Samorì, P. (2016): *2D Materials Beyond Graphene for High-Performance Energy Storage Applications*. Advanced Energy Materials, 6(23), pp. 1600671. doi:10.1002/aenm.201600671

Zhang, X.-W., Yang, D.-Q. (2016): *Numerical and Experimental Studies of a Light-Weight Auxetic Cellular Vibration Isolation Base*. Shock and Vibration, 2016(1), pp. 4017534. doi:10.1155/2016/4017534

Zhang, Y., Ren, X., Zhang, X. Y., Huang, T. T., Sun, L., Xie, Y. M. (2021): *A novel buckling-restrained brace with auxetic perforated core: Experimental and numerical studies*. Engineering Structures, 249, pp. 113223. doi:10.1016/j.engstruct.2021.113223

Zhang, Z., Tian, R., Zhang, X., Wei, F., Yang, X. (2021): *A novel butterfly-shaped auxetic structure with negative Poisson's ratio and enhanced stiffness*. Journal of Materials Science, 56(25), pp. 14139–14156. doi:10.1007/s10853-021-06141-4

Zhong, R., Ren, X., Yu Zhang, X., Luo, C., Zhang, Y., Min Xie, Y. (2022): *Mechanical properties of concrete composites with auxetic single and layered honeycomb structures*. Construction and Building Materials, 322, pp. 126453. doi:10.1016/j.conbuildmat.2022.126453

Zhou, K., Li, X. (2008): *Topology optimization for minimum compliance under multiple loads based on continuous distribution of members*. Structural and Multidisciplinary Optimization, 37(1), pp. 49–56. doi:10.1007/s00158-007-0214-3

Zhou, M., Rozvany, G. I. N. (1991): *The COC algorithm, Part II: Topological, geometrical and generalized shape optimization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Second World Congress on Computational Mechanics, 89(1), pp. 309–336. doi:10.1016/0045-7825(91)90046-9

Zhuang, C., Xiong, Z., Ding, H. (2007): *A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(4), pp. 1074–1084. doi:10.1016/j.cma.2006.08.005

Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu, J. Z. (2005): *The Finite Element Method Set*. Elsevier Butterworth-Heinemann.

Spis rysunków

Rysunek 2.1 Pierwsze rzeźby tensegrity: a) rzeźby Karla Iogansona (źródło: (Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023)), b) Praca X (X-piece) (źródło: (Micheletti, Podio-Guidugli 2022)). 20
Rysunek 2.2 Struktura tensegrity: a) klasy 1, b) klasy 2, c) klasy 3. Wykonane na podstawie: (Oliveira, Skelton 2009). 23
Rysunek 2.3 Moduły tensegrity a) prętowego, b) prętowo-płytowego oraz c) prętowo-membranowe na przykładzie modułu Simplex czterozastrzałowy (opracowanie własne). 24
Rysunek 2.4 Schemat pokazujący przekształcenie a) dwudziestościanu w b) moduł tensegrity z prostymi prętami oraz c) moduł tensegrity z zakrzywionymi prętami (źródło: (Scarr 2008)). ... 26
Rysunek 2.5 Model czaszki biotensegrity (źródło: https://jeanine.looman.ca/). 26
Rysunek 2.6 Rzeźby Kennetha Snelsona: a) Needle Tower I (źródło: https://krollermuller.nl/en/kenneth-snelson-needle-tower) i b) Rainbow Arch (źródło: https://tensegritywiki.com/images/b/b3/Snelson_Rainbow_Arch.jpg). 28
Rysunek 2.7 Kopuły zaprojektowane przez Buckminstera Fullera: a) Tensegrity Dome i b) Aspension Dome (źródło: (Gomez-Jauregui, Carrillo-Rodriguez et al. 2023)). 28
Rysunek 2.8 Przykładowe konstrukcje tensegrity – kładki piesze i rowerowe: a) Kurilpa Bridge (źródło: www.coxarchitecture.com.au/project/kurilpa-pedestrian-bridge/), b) kładka piesza Landolfa Rhode-Barbarigosa (źródło: (Markocki, Oleszek 2011)), c) TorVergata Footbridge (źródło: (Micheletti, Podio-Guidugli 2022)]) 30
Rysunek 2.9 Przykładowa konstrukcje tensegrity – fasada zawierająca panele słoneczne (źródło:(Cimmino, Miranda et al. 2017)) 31
Rysunek 2.10 Przykładowe konstrukcje tensegrity – kopuły i stropy: a) hala sportowa „Spodek" w Katowicach (źródło: https://www.bryla.pl/bryla/56,85301,8496801,Architektura_w_Katowicach_TOP_10___przewodnik_po_najciekawszych,,ga.html),), b) Georgia Dome w Atlancie (źródło: https://www.thorntontomasetti.com/project/georgia-dome) , c) La Plata Stadium w La Plata (źródło: https://www.thorntontomasetti.com/project/la-plata-stadium), d) White Rhino (źródło: https://www.tensinet.com/index.php/component/tensinet/?view=project&id=4679). 32
Rysunek 2.11Przykładowe konstrukcje tensegrity – pawilony wystawowe: a) Blur Building (źródło: https://dsrny.com/project/blur-building), b) Tension Pavilion (źródło: https://parametrichouse.com/tension-pavilion/), c) pawilon zbudowany z knit tensegrity (źródło: https://dmand.sutd.edu.sg/research2/knitting-and-textiles/architecture/knit-tensegrity-shell/#), d) BeTA pavillion (źródło: https://www.dianedavissikora.com/projects/beta_s-pavilion). 34
Rysunek 2.12 a) Trójwymiarowa struktura metamateriału rozpatrywana w analizie propagacji fal (źródło: (Rimoli, Pal 2017)), b) Sześciokątna komórka metamateriału auksetycznego inspirowanego tensegrity (źródło: (Sun, Gai et al. 2025)) 37
Rysunek 2.13 Przykładowe komórki metamateriałów wydrukowane przyrostowo: a) kolumna składająca się z trzech modułów (Amendola, Hernández-Nava et al. 2015b), b) metamateriał płaski zbudowany z komórek sześciokątnych (Gilewski, Zawadzki et al. 2025). 40

Rysunek 2.14 Moduły tensegrity płaskie: a) sześciokątny, b) ośmiokątny. Moduły tensegrity przestrzenne: c) Simplex trójzastrzałowy, d) Simplex czterozastrzałowy, e) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie sztywnym, f) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie podatnym, g) ścięty czworościan (truncated tetrahedron). 53
Rysunek 2.15 Połączenie modułów piramidalnych: a) krawędź do krawędzi, b) węzeł do węzła (Mirzaaghazadeh, Abedi et al. 2021). 56
Rysunek 3.1 Trzy rodzaje optymalizacji strukturalnej: a) optymalizacja rozmiaru: optymalizacja przekrojów prętów kratownicy, b) optymalizacja kształtu: poszukiwanie funkcji kształtu $\eta(x)$ opisująca kształt belki, c) optymalizacja topologiczna: usunięcie części prętów kratownicy poprzez przyjęcie zerowej wartości przekrojów prętów. Rysunek wykonany na podstawie(Christensen, Klarbring 2008). 66
Rysunek 3.2 Przykładowy wynik optymalizacji topologicznej w przypadku wspornika obciążonego pojedynczą siłą: a) schemat statyczny, b) wynik optymalizacji topologicznej z oznaczonymi na czarno obszarami wypełnionymi materiałem, na biało: obszary pustki, na czarno: obrys obszaru (opracowanie własne). 67
Rysunek 3.3 Koncepcja inteligentnego, adaptacyjnego wzmacniania struktury tensegrity dla: a) struktury zbudowanej z modułów płaskich (stosowanych w modelowaniu struktur typu tarczowego), b) struktury składającej się z jednej warstwy modułów przestrzennych tensegrity (modelowanie struktur typu płytowego) (opracowanie własne). 72
Rysunek 3.4 Trójmodułowa rama płaska zbudowana z sześciokątnych modułów tensegrity, podparta swobodnie w dolnych węzłach. 78
Rysunek 3.5 Geometria pojedynczego modułu sześciokątnego tensegrity budującego trójmodułową ramę. 78
Rysunek 3.6 Po lewej: moduł 1 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych. 83
Rysunek 3.7 Po lewej: moduł 2 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych. 84
Rysunek 3.8 Po lewej: moduł 3 wraz z opisanymi przemieszczeniami globalnymi, po prawej: podstawowa komórka budująca ramę z oznaczeniami przemieszczeń lokalnych. 85
Rysunek 4.1 Od góry: wspornik krótki, średniej długości oraz długi: a) schematy statyczne przykładowych wsporników wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej (wykonanej w programie Interactive 2D TopOpt App) dla odpowiadających schematów statycznych. 87
Rysunek 4.2 Od góry: belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą i dwiema siłami: a) schematy statyczne przykładowych belek wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej dla odpowiadających schematów statycznych – przypadek 1. 88
Rysunek 4.3 Od góry: belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą i dwiema siłami: a) schematy statyczne przykładowych belek wraz z obciążeniem, b) wyniki optymalizacji topologicznej dla odpowiadających schematów statycznych – przypadek 2. 88
Rysunek 4.4 Moduły: a) sześciokątny podstawowy, b) ośmiokątny oraz c) sześciokątny obrócony) z oznaczeniem stosunków wartości sił sprężających. 89
Rysunek 4.5 Wymiary podstawowych modułów budujących struktury. 90

Rysunek 4.6 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:1: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II). 90
Rysunek 4.7 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:3: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II). 91
Rysunek 4.8 Struktury modularne dla struktury o proporcji boków 1:5: a) sześciokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), b) ośmiokątna (po lewej: typ I, po prawej: typ II), c) sześciokątna obrócona po lewej: typ I, po prawej: typ II). 91
Rysunek 4.9 Moduły (od lewej: sześciokątny podstawowy, sześciokątny obrócony oraz ośmiokątny) z oznaczeniem stosunków przekrojów prętów. 94
Rysunek 4.10 Schemat statyczny: podpory oraz układ obciążenia i miejsce odczytu przemieszczenia węzła na przykładzie struktury sześciokątnej typu II: a) wspornik średniej długości, b) belka obciążona jedną siłą , c) belka obciążona dwiema siłami. 94
Rysunek 4.11 Wykres zależności przemieszczenia od współczynnika **σ** regulującego wartości sił sprężających (struktury o stosunku boków 1:1, 1:3, 1:5 – wspornik). 95
Rysunek 4.12 Wykres zależności przemieszczenia od współczynnika **σ** regulującego wartości sił sprężających (struktury o stosunku boków 1:3 – belka z pojedynczym obciążeniem i podwójnym obciążeniem). 96
Rysunek 4.13 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (po lewej) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (po prawej) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:1. 97
Rysunek 4.14 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik krótki). 99
Rysunek 4.15 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik krótki). 99
Rysunek 4.16 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik krótki). 101
Rysunek 4.17 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik krótki). 102
Rysunek 4.18 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik krótki). 103
Rysunek 4.19 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik krótki). 104

Rysunek 4.20 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na górze) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na dole) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:3. 105
Rysunek 4.21 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik średniej długości). 106
Rysunek 4.22 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik średniej długości). 107
Rysunek 4.23 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik średniej długości). 108
Rysunek 4.24 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik średniej długości). 108
Rysunek 4.25 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik średniej długości). 109
Rysunek 4.26 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik średniej długości). 110
Rysunek 4.27 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na górze) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na dole) – przypadek wspornika o proporcji boków 1:5. 111
Rysunek 4.28 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik długi). 112
Rysunek 4.29 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (wspornik długi). 113
Rysunek 4.30 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik długi). 114
Rysunek 4.31 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (wspornik długi). 115
Rysunek 4.32 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik długi). 116
Rysunek 4.33 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (wspornik długi). 116

Rysunek 4.34 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej jedną siłą (bez wzmocnienia). 118
Rysunek 4.35 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 119
Rysunek 4.36 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 119
Rysunek 4.37 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 120
Rysunek 4.38 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 121
Rysunek 4.39 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 122
Rysunek 4.40 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta obciążona jedną siłą). 123
Rysunek 4.41 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej jedną siłą (ze wzmocnieniem). 124
Rysunek 4.42 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą) 125
Rysunek 4.43 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą). 126
Rysunek 4.44 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą). 127
Rysunek 4.45 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą). 127

Rysunek 4.46 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą)..... 128
Rysunek 4.47 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona jedną siłą)..... 129
Rysunek 4.48 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej dwiema siłami (bez wzmocnienia)..... 130
Rysunek 4.49 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 131
Rysunek 4.50 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 132
Rysunek 4.51 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 133
Rysunek 4.52 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 133
Rysunek 4.53 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 134
Rysunek 4.54 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta obciążona dwiema siłami)..... 135
Rysunek 4.55 Struktury modularne ze wzmocnieniem pojedynczym (na dole) oraz wzmocnieniem podwójnym (dodatkowe moduły w stosunku do wzmocnienia pojedynczego oznaczone na czerwono) (na górze) – przypadek belki swobodnie podpartej obciążonej dwiema siłami (ze wzmocnieniem)..... 136
Rysunek 4.56 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami). 137
Rysunek 4.57 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami). 138
Rysunek 4.58 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w

przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami). 139
Rysunek 4.59 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami). 139
Rysunek 4.60 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania pojedynczego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami)..... 140
Rysunek 4.61 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania podwójnego wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (belka swobodnie podparta ze wzmocnieniem obciążona dwiema siłami)..... 140
Rysunek 5.1 Schematyczne przedstawienie rozpatrywanych przypadków: a) przypadek obciążenia jedną siłą, b) przypadek obciążenia czterema siłami. 146
Rysunek 5.2 Zrzut ekranu przedstawiający pracę nad przypadkiem pełnego podparcia płyty na wszystkich bokach. 147
Rysunek 5.3 Zrzut ekranu przedstawiający pracę nad przypadkiem swobodnego podparcia płyty w narożach. 147
Rysunek 5.4 Bryła wynikająca z optymalizacji topologicznej przypadku pełnego podparcia płyty na wszystkich bokach w widoku: a) z góry oraz b) izometrycznym. 148
Rysunek 5.5 Bryła wynikająca z optymalizacji topologicznej przypadku swobodnego podparcia płyty w narożach w widoku: a) z góry oraz b) izometrycznym. 148
Rysunek 5.6 Wybrane moduły: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w układzie podatnym przedstawione w widoku izometrycznym oraz w widoku trzech płaszczyzn. Na szaro (w widoku izometrycznym) oraz linią przerywaną (w widokach z boku) oznaczone są płaszczyzny podstaw modułów. 149
Rysunek 5.7 Podstawowe wymiary modułów wykorzystywanych w analizach: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron). 150
Rysunek 5.8 Moduły: a) rozszerzony ośmiościan (octahedron) oraz b) Simplex czterozastrzałowy z oznaczeniem stosunków wartości sił sprężających. 150
Rysunek 5.9 Superkomórka jednowarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym. 151
Rysunek 5.10 Superkomórka dwuwarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym. 151
Rysunek 5.11 Płyta jednowarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym. 152
Rysunek 5.12 Płyta dwuwarstwowa zbudowana z modułu: a) Simplex czterozastrzałowy oraz b) rozszerzony ośmiościan (octahedron) w rzutach oraz widoku izometrycznym. 152
Rysunek 5.13 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła, ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia (pojedyncze

siły oznaczone na czerwono) dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy, b) dwóch warstw. Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne. 153
Rysunek 5.14 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła, ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia (pojedyncze siły oznaczone na czerwono) dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy, b) dwóch warstw. Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne. 154
Rysunek 5.15 Schematyczny rysunek schematu połówkowego płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), przypadek pojedynczej siły na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej. 154
Rysunek 5.16 Wykresy zależności przemieszczenia węzłów pod siłą od mnożnika siły sprężającej w przypadku struktury z modułów: rozszerzony ośmiościan (octahedron) (po lewej) oraz Simplex czterozastrzałowy (po prawej). 155
Rysunek 5.17 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty dwuwarstwowej wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) podparcie boków struktury, b) podparcie w narożach. 156
Rysunek 5.18 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty dwuwarstwowej wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty: a) podparcie boków struktury, b) podparcie w narożach. 156
Rysunek 5.19 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami), b) dwóch warstw warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne. 157
Rysunek 5.20 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej. 158
Rysunek 5.21 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 159
Rysunek 5.22 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 160
Rysunek 5.23 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 162
Rysunek 5.24 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku

wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 163
Rysunek 5.25 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{rk}$ (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 165
Rysunek 5.26 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{rk}$ (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 166
Rysunek 5.27 Schemat statyczny: podpory (ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów Simplex czterozastrzałowy w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami), b) dwóch warstw warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne. 166
Rysunek 5.28 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów Simplex czterozastrzałowy, obciążonej siłami na środku płyty: a) jednowarstwowej, b) dwuwarstwowej. 167
Rysunek 5.29 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{r\sigma}$ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 168
Rysunek 5.30 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{r\sigma}$ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 169
Rysunek 5.31 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{r\sigma}$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 170
Rysunek 5.32 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{r\sigma}$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 171
Rysunek 5.33 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{rk}$ (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 172
Rysunek 5.34 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $\boldsymbol{rk}$ (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów Simplex czterozastrzałowy). 173

Rysunek 5.35 Schemat statyczny: podpory (kwadratami oznaczone podparcie pojedynczego węzła) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne..... 174
Rysunek 5.36 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty jednowarstwowej..... 174
Rysunek 5.37 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron))..... 175
Rysunek 5.38 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron))..... 176
Rysunek 5.39 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron))..... 177
Rysunek 5.40 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron))..... 178
Rysunek 5.41 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 179
Rysunek 5.42 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (obciążenie wieloma siłami, podparcie w narożach, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 180
Rysunek 5.43 Schemat statyczny: podpory (ciągłą linią podparcie wszystkich węzłów na linii) oraz układ obciążenia dla przypadku struktury z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron) w przypadku: a) jednej warstwy (po lewej: obciążenie jedną siłą, po prawej: obciążenie wieloma siłami). Linią przerywaną oznaczone są dolne cięgna modułów, linią ciągłą górne..... 180
Rysunek 5.44 Struktury modularne ze wzmocnieniem – przypadek płyty wykonanej z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron), obciążonej siłami na środku płyty: jednowarstwowej..... 181
Rysunek 5.45 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku

niskich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 182
Rysunek 5.46 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku niskich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 183
Rysunek 5.47 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 184
Rysunek 5.48 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika $r\sigma$ w przypadku wysokich wartości (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 184
Rysunek 5.49 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (obciążenie pojedynczą siłą, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan(octahedron)). 185
Rysunek 5.50 Wykres procentowej zmiany wartości ugięcia w stosunku do oryginalnej wartości ugięcia w wyniku zastosowania wzmocnienia za pomocą współczynnika rk (obciążenie wieloma siłami, podparcie boków, struktura zbudowana z modułów rozszerzony ośmiościan (octahedron)). 186
Rysunek 6.1 Dworzec Tramwajowy Centrum w Łodzi (Stajnia Jednorożców) (źródło: archiwum własne autorki). 190
Rysunek 6.2 Zdjęcie satelitarne przedstawiające zadaszenie przystanku tramwajowego w miejscu węzła transportowego Metro Młociny w Warszawie (źródło: Google Maps). 191
Rysunek 6.3 Wizualizacja konstrukcji wykonana w programie Twinmotion. 191
Rysunek 6.4 Wizualizacja konstrukcji i otoczenia wykonana w programie Twinmotion. 192
Rysunek 6.5 Wykresy zależności przemieszczenia węzłów pod siłą od wartości siły sprężającej konstrukcji zadaszenia przystanku tramwajowego w przypadku różnych typów struktury modułów Simplex czterozastrzałowy. 202
Rysunek 6.6 Przypadek pracownika poruszającego się po zadaszeniu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory. 203
Rysunek 6.7 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu – w przypadku struktury dwuwarstwowej. 204
Rysunek 6.8 Przypadek pracownika stojącego w miejscu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory. 205
Rysunek 6.9 Widok izometryczny wzmocnionych modułów z oznaczeniem punktu odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku pracownika stojącego w miejscu – w przypadku struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej). 205

Rysunek 6.10 Przypadek zalegającego śniegu – na pomarańczowo oznaczone obszary obciążeń oraz wzmocnień, na niebiesko podpory. 206
Rysunek 6.11 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku zalegającego śniegu – w przypadku struktury dwuwarstwowej. 206
Rysunek 6.12 Przypadek zawieszenia ozdób świątecznych - na pomarańczowo oznaczone obszary wzmocnień, pogrubioną pomarańczową linią – linia obciążenia, na niebiesko podpory. 207
Rysunek 6.13 Rzut z oznaczeniem obszarów wzmocnionych (na pomarańczowo) oraz przekrojów i punktów odczytu przemieszczeń w kierunku pionowym Z (na fioletowo) w przypadku zawieszenia ozdób świątecznych – w przypadku struktury dwuwarstwowej. 208
Rysunek 6.14 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu dla współczynnika $r\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej). 209
Rysunek 6.15 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe struktury jednowarstwowej w zależności od współczynnika $r\sigma$ w przypadku wzmocnienia przy obciążeniu poruszającym się pracownikiem. 210
Rysunek 6.16 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu. 210
Rysunek 6.17 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu. . 211
Rysunek 6.18 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej) składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika poruszającego się po zadaszeniu. 211
Rysunek 6.19 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku pracownika stojącego w miejscu dla współczynnika $r\sigma = 2$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej). 212
Rysunek 6.20 Wykres przemieszczeń węzła w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej) składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku pracownika stojącego w miejscu. 212
Rysunek 6.21 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku obciążenia zalegającym śniegiem dla współczynnika $r\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej). 213
Rysunek 6.22 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe struktury dwuwarstwowej w zależności od współczynnika $r\sigma$ w przypadku wzmocnienia pod obciążeniem zalegającym śniegiem. 213

Rysunek 6.23 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu. 214
Rysunek 6.24 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu. 215
Rysunek 6.25 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju B-B w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu. 215
Rysunek 6.26 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zalegającego śniegu. 216
Rysunek 6.27 Widok izometryczny struktury sprężonej siłami osiowymi (bez obciążeń) ze wzmocnieniem obszaru w przypadku obciążenia ozdobami świątecznymi dla współczynnika $r\sigma = 8$ dla struktury jednowarstwowej (po lewej) i dwuwarstwowej (po prawej). 216
Rysunek 6.28 Wykresy przedstawiające przemieszczenie wypadkowe dolnej powierzchni struktury dwuwarstwowej w zależności od współczynnika $r\sigma$ w przypadku obciążenia ozdobami świątecznymi..... 217
Rysunek 6.29 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych. 218
Rysunek 6.30 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A''-A'' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury jednowarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych. 218
Rysunek 6.31 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A'-A' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych..... 219
Rysunek 6.32 Wykres przemieszczeń węzłów w przekroju A''-A'' w kierunku pionowym Z w zależności od wzmocnienia współczynnikiem $r\sigma$ dla struktury dwuwarstwowej składającej się z modułów $1\ m \times 1\ m \times 1\ m$ w przypadku zawieszonych ozdób świątecznych..... 219
Rysunek 7.1 Zachowanie materiału auksetycznego i nieauksetycznego pod wpływem rozciągania i ściskania (rysunek na podstawie (Lim 2015), opracowanie własne). 222
Rysunek 7.2 Wybrane materiały auksetyczne 2D zbudowane z komórek: a) o kształcie grota strzały (double arrowhead), b) dwuwymiarowych komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), c) z obracających się kwadratów (rotating squares), d) chiralna sieć w heksagonalnym uporządkowaniu, e) antytetrachiralna struktura plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb), f) z usuniętymi żebrami (missing rib). (na podstawie (Lim 2015)) ... 224
Rysunek 7.3 Wybrane materiały auksetyczne 2D zbudowane z komórek: a) o kształcie litery S (S-shaped honecomb structure) (Meena, Singamneni 2019), b) w kształcie gwiazdy (star-shaped honecomb structure) (Yang, Ma 2020), c) w kształcie ciasteczka (cookie-shaped honeycomb structure) (Xiao, Zhang et al. 2021), d) w kształcie motyla (butterfly-shaped honeycomb structure) (Zhang, Tian et al. 2021), e) perforacji (I-shaped slits) (Gupta, Gupta et al. 2022). 225

Rysunek 7.4 Wybrane materiały auksetyczne 3D zbudowane z komórek: a) komórki wklęsłego plastra miodu (Chen, Fu 2017), b) w kształcie gwiazdy (Ai, Gao 2018), c) grota strzały (Gao, Ge et al. 2019), d) komórek wklęsłego plastra miodu, chiralnych i obracających się kwadratów (Yuan, Chen et al. 2021)..... 226
Rysunek 7.5 Wybrane materiały auksetyczne 3D zbudowane z komórek: a) sześciokątna komórka opierająca się na unikalnym o mechanizmie przesuwnym (Su, Xu et al. 2021), b) komórka, która składa się z pełnej (litej) sfery oraz trzech prostopadłościanów (Ren, Shen et al. 2018b), c) komórek sześciennych nazywanych simple cubic (Shen, Zhou et al. 2014). 227
Rysunek 7.6 Wybrane geometrie struktur auksetycznych: a) zbudowane z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead), b) dwuwymiarowych komórek o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb) oraz c) antytetrachiralna struktura plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) (opracowanie własne na podstawie (Lim 2015)). 232
Rysunek 7.7 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury sześciokątnej typu I. 233
Rysunek 7.8 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) i c) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz d) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury sześciokątnej typu II. 233
Rysunek 7.9 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu(anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury ośmiokątnej typu I. 234
Rysunek 7.10 Odwzorowanie struktur auksetycznych: a) dwuwymiarowych o kształcie wklęsłego plastra miodu (2D re-entrant honeycomb), b) zbudowanych z komórek o kształcie grota strzały (double arrowhead) oraz c) antytetrachiralnej struktury plastra miodu (anti-tetrachiral honeycomb) w przypadku struktury ośmiokątnej typu II. 234
Rysunek 7.11 Wybrane struktury modularne tensegrity płaskie: a) struktura sześciokątna typu I, b) struktura sześciokątna typu II, c) struktura ośmiokątna typu I, d) struktura ośmiokątna typu II. 235
Rysunek 7.12 Wykres zależności przemieszczeń δ od współczynnika σ w przypadku ściskania dla struktury sześciokątnej typu I (po lewej) oraz struktury sześciokątnej typu II (po prawej). 236
Rysunek 7.13 Wykres zależności przemieszczeń δ od współczynnika σ w przypadku ściskania dla struktury ośmiokątnej typu I (po lewej) oraz struktury ośmiokątnej typu II (po prawej). . 237
Rysunek 7.14 Analizowany model struktury sześciokątnej typu I z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym). 238
Rysunek 7.15 Analizowany model struktury sześciokątnej typu II z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym). 238

Rysunek 7.16 Analizowany model struktury ośmiokątnej typu I z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym). 239
Rysunek 7.17 Analizowany model struktury ośmiokątnej typu II z nałożonym wzorem struktury auksetycznej wraz z obciążeniem i sposobem podparcia w przypadku ściskania w kierunku a) Y (pionowym) oraz b) X (poziomym). 239
Rysunek 7.18 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 242
Rysunek 7.19 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 242
Rysunek 7.20 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 244
Rysunek 7.21 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 244
Rysunek 7.22 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 245
Rysunek 7.23 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 245
Rysunek 7.24 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 248
Rysunek 7.25 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 249
Rysunek 7.26 Przykładowe wyniki rozciągania w Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury sześciokątnej typu II (po lewej: przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1, po prawej: przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 249
Rysunek 7.27 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 252
Rysunek 7.28 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu I (przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 252
Rysunek 7.29 Przykładowe wyniki rozciągania w Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury struktury ośmiokątnej typu I (po lewej: przemieszczenia przedstawione bez zmian –

skala 1:1, po prawej: przemieszczenia przedstawione w dwudziestopięciokrotnym powiększeniu). 253
Rysunek 7.30 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku Y w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 254
Rysunek 7.31 Przykładowe wyniki ściskania w kierunku X w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 255
Rysunek 7.32 Przykładowe wyniki rozciągania w kierunku X (po lewej) i Y (po prawej) w przypadku auksetycznej odpowiedzi struktury ośmiokątnej typu II (przemieszczenia przedstawione bez zmian – skala 1:1). 257

Spis tabel

Tabela 6.1 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 1. 196
Tabela 6.2 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 2. 197
Tabela 6.3 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 3. 198
Tabela 6.4 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 4. 199
Tabela 6.5 Podsumowanie obliczeń dla Kombinacji 5. 200
Tabela 6.6 Podsumowanie kombinacji obciążeń. 201
Tabela 7.1 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura sześciokątna typu I). 241
Tabela 7.2 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σw przypadku ściskania względem osi X (struktura sześciokątna typu I). 243
Tabela 7.3 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura sześciokątna typu II). 247
Tabela 7.4 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura ośmiokątna typu I). 250
Tabela 7.5 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi Y (struktura ośmiokątna typu II). 254
Tabela 7.6 Wartości współczynników ν_mean, ν_max dla wybranych par współczynników σ, r_σ w przypadku ściskania względem osi X (struktura ośmiokątna typu II). 255

Spis załączników

Załącznik 1. Zestawienie tabelaryczne wyników analiz struktur zbudowanych z modułów płaskich i przestrzennych tensegrity wzmocnionych inteligentnym szkieletem wewnętrznym inspirowanym wynikami optymalizacji topologicznej (załącznik elektroniczny)

Załącznik 2. Algorytm obliczeniowy w programie Mathematica dla struktur zbudowanych z modułów płaskich – przykład struktury sześciokątnej typu II (załącznik elektroniczny)

Załącznik 3. Algorytm obliczeniowy w programie Mathematica dla struktur zbudowanych z modułów przestrzennych – przykład struktury dwuwarstwowej zbudowanej z *Simplexów* czterozastrzałowych (załącznik elektroniczny)

Załącznik 4. Plik wejściowy Abaqusa do obliczeń Wiaty przystankowej dla przypadku 3 (Śnieg) - Struktura z 2 warstwami (1m) - wzmocnienie R2 (załącznik elektroniczny)

Załączniki w formie elektronicznej są dostępne w Bazie Wiedzy Politechniki Warszawskiej pod adresem: repo.pw.edu.pl/info/researchdata/WUTc6c75b7972984e2fb92568496d1e9de8/ oraz pod numerem DOI: 10.71724/5raw-yd56.