

Recenzja habilitacyjna osiągnięć naukowych
doktora Kamila Szpojankowskiego

Otrzymałem do oceny materiały przygotowane przez habilitanta, w tym m.in. autoreferat, wykaz osiągnięć naukowych, kopie czterech prac wskazanych przez niego jako osiągnięcie naukowe będące podstawą do starania się o uzyskanie stopnia doktora habilitowanego oraz oświadczenia ich współautorów i starałem się napisać poniższą recenzję w taki sposób, aby wszystkie punkty zawarte w par. 3 umowy na recenzję habilitacyjną zostały uwzględnione.

Dr Kamil Szpojankowski doktoryzował się 16 października 2014 roku na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej na podstawie obronionej z wyróżnieniem rozprawy doktorskiej „Własności typu lukacsowskiego w wolnej probabilistyce”, promotorem jego rozprawy był zaś prof. dr hab. inż. Jacek Wesołowski, który był także pięć lat wcześniej opiekunem jego pracy magisterskiej „Wolne kwadratowe harnessy”; otrzymała ona III nagrodę w XLIV konkursie PTM na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki¹. Po obronie doktoratu habilitant rozpoczął w 2015 r. pracę jako adiunkt na macierzystym wydziale i pracuje na tym stanowisku do dziś. W roku akademickim 2015/16 przebywał na stażu podoktorskim na Uniwersytecie Waterloo w Kanadzie. Głównym przedmiotem jego badań naukowych stanowi więc, począwszy od czasu studiów, wolna probabilistyka.

¹ Zob. <http://www.math.uni.wroc.pl/ptm/index.php/Konkursy/Konkursy>

Jak wynika z dostarczonych materiałów habilitant nie ubiegał się uprzednio o nadanie stopnie doktora habilitowanego.

Zgodnie z art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce” dr Szpojankowski przedstawił do oceny recenzentów jako część osiągnięcia naukowego cykl czterech powiązanych tematycznie współautorskich artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych, pod wspólnym określeniem „Kumulanty boolowskie w wolnej probablistyce”:

[H1] H. Bercovici, A. Nica, M. Noyes, K. Szpojankowski, Eta-diagonal distributions and infinite divisibility for R-diagonals, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 54 (2018), 907-937.

[H2] M. Fevrier, M. Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, Using Boolean cumulants to study multiplication and anti-commutators of free random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.* 373 (2020), 7167-7205.

[H3] F. Lehner, K. Szpojankowski, Boolean cumulants and subordination in free probability, *Random Matrices Theory Appl.* 10 (2021), 2150036².

[H4] K. Szpojankowski, J. Wesołowski, Conditional expectations through Boolean cumulants and subordination towards a better understanding of the Lukacs property in free probability, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 17 (2020), 253-272.

Dr Szpojankowski jest autorem 13 artykułów naukowych, z których cztery weszły do przedstawionego do oceny cyklu publikacji. Trzy z tych prac ukazały się przed otrzymaniem przez habilitanta stopnia doktora, natomiast pozostałych dziesięć już po tym fakcie. W sieci (w repozytorium arXiv) znalazłem trzy dalsze preprinty autora, których w recenzji nie mogę uwzględnić z przyczyn formalnych, ale pragnąłbym w tym miejscu odnotować ich istnienie,

² W materiałach tylko wersja online (2020): <https://doi.org/10.1142/S2010326321500362>; zapewne praca ukazała drukiem się już po ich złożeniu.

gdyż świadczą one o kontynuowaniu przez habilitanta intensywnej pracy naukowej.

Jeżeli chodzi o czasopisma, w których kandydat publikował dotychczas swoje wyniki to przede wszystkim rzuca się w oczy jego dobry „gust publikacyjny”. Każda z jego prac opublikowana jest w innym czasopiśmie, w przeważającej liczbie są to periodyki dobre lub bardzo dobre, brak tu w ogóle publikacji przypadkowych (co nie zdarza się tak często). Chciałem ten fakt tu bardzo podkreślić, bo moim zdaniem świadczy to o tym, że jego dorobek został już wcześniej oceniony pozytywnie przez szerokie zapewne grono kompetentnych recenzentów.

Nie jest to opinia pochopna, bo przyjrzałem się dokładniej tym wszystkim periodykom używając pełnej wersji bazy Journal Citation Reports, która pozwala na dość precyzyjną ocenę pozycji czasopisma, zwracając uwagę głównie, choć nie jedynie, na dwa czynniki: wartość współczynnika Article Influence Score (AIS) uważanego w dyscyplinie matematyka za najbardziej miarodajny i stanowiącego podstawę dla sporządzenia listy ministerialnej oraz rzadziej używanego w tego typu analizach zestawienia „Contributions by organizations”, pokazującego autorzy z jakich instytucji naukowych zamieszczają najczęściej prace w danym czasopiśmie³.

Wnioski z tej analizy są następujące. Jedynie dwa czasopisma spośród tych, w których drukował prace dr Szpojankowski mogą na tle innych uznać za nieco niższej rangi: wydawane przez Springera *Complex Analysis and Operator Theory* o zróżnicowanej paletce autorów (trafiają się też wśród nich jednak bardzo dobrzy) oraz lokalne czasopismo wrocławskie *Probability and Mathematical Statistics*, gdzie dominują autorzy polscy i zagraniczni reprezentujący czasem nieco słabsze ośrodki – mają one też oba wyraźnie niższy

³ Kwestii sugerowanego w umowie współczynnika Impact Factor (a zwłaszcza sumaryczny Impact Factor) wolałbym nie komentować, gdyż wydaje mi się, że w polskim (i nie tylko) środowisku matematycznym panuje konsensus, że nie bardzo nadaje się on do oceny czasopism matematycznych i nawet z punktu widzenia naukometrii stosowanie go nie jest poprawne metodologicznie. Podobnie jest ze współczynnikiem Hirscha.

współczynnik AIS niż inne, w których habilitant publikował. Pozostałe czasopisma, w których dr Szpojankowski miał publikacje jestem skłonny uznać za dobre lub nawet bardzo dobre. Do tej drugiej kategorii zaliczyłbym przede wszystkim *Journal of Functional Analysis*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* oraz *Transactions of the American Mathematical Society*. Prace habilitanta opublikowane w tych dwóch ostatnich periodykach wchodzi zresztą w zakres „osiągnięcia naukowego”.

Jeżeli idzie o inne wskaźniki naukowometryczne przeanalizowałem dokładnie cytowania prac dra Szpojankowskiego w różnych bazach. Na pozór postronnemu obserwatorowi może się wydawać, że cytowań tych jest niewiele. Przyjrzyjmy się bowiem najkorzystniejszemu liczbowo dla niego i jednocześnie najpełniejszemu danym w bazie Google Scholar, która uwzględnia też książki i „szarą literaturę” (w szczególności doktoraty, plakaty, preprinty oraz raporty). Tych cytowań jest obecnie 87, jednak po odliczeniu autocytowań mamy tu ich (na dzień dzisiejszy) około pół setki. Jeżeli jednak spojrzymy jeszcze dokładniej i odliczymy naturalne w pewnym sensie cytowania z ośrodka warszawskiego (B. Kołodziejek, A. Piliszek, M. Świeca, J. Wesołowski) oraz wrocławskiego (W. Ejsmont, R. Lenczewski), to pozostanie nam tylko 14 pozycji czysto „zagranicznych”, w których autor jest cytowany: Hasebe (2016), Mingo & Speicher (2017), Morishita & Ueda (2018), Gao (2019), Popa & Hao (2019), Witzman (2020), Yoshida (2020), Zhou (2020), Auburn (2021), Celestino *et al.* (2021), Hasebe & Ueda (2021), Hoskins & Kabluchko (2021), Perales (2021), Popa (2021)⁴. Niewątpliwie nie jest to liczba bardzo duża i trudno na jej podstawie bezwzględnie wyrokować, czy prace habilitanta zostaną w przyszłości w szerokim matematycznym świecie docenione. Trzeba tu jednak wziąć pod uwagę kilka spraw. Po pierwsze, habilitant jest człowiekiem młodym i aż dziewięć z trzynastu omawianych prac opublikował w ciągu ostatniego

⁴ Wszystkie wg bazy Google Scholar.

pięciolecia, po drugie uprawia dziedzinę trudną (nieprzemienią probablistykę), a jego prace nie są ani krótkie, ani łatwe w lekturze, po trzecie, co powszechnie wiadomo, treści w matematyce są przyswajane wolniej niż w innych naukach, po czwarte liczba tych cytowań jednak wzrasta, po piąte wreszcie, są to cytowania w dobrych czasopismach w pracach autorów z liczącymi się ośrodków. W znaczący sposób korzystają z prac autora zarówno Gao (2019), jak i Yoshida (2020), zaś w pracy Auburna (2021) autor wykorzystuje otrzymane przez siebie wyniki do uzyskania prostszej wersji wzoru z pracy [H2], który nazywa nawet wzorem Fevriera–Mastnaka–Nicy–Szpojankowskiego. Reasumując, po tej analizie dotychczasowych cytowań prac habilitanta nabrałem przekonania, że na tym etapie kariery jest to zbiór może nie tak wielki, ale istotny, który w najbliższych latach ulegnie z dużym prawdopodobieństwem znaczącemu powiększeniu.

Nieco skromniej prezentuje się dorobek dydaktyczny dra Szpojankowskiego, w szczególności wydaje mi się, że brak tu wśród prowadzonych przez niego zajęć takich, które wiązałyby się bezpośrednio z jego pracą naukową, a mówiąc jeszcze ogólniej, przedmiotów bardziej zaawansowanych (choć zauważyłem, że w bieżącym roku akademickim współprowadzi kurs „Algorytmiczne zastosowania łańcuchów Markowa”⁵). Domyślam się jednak, że wynikało to w dużej mierze ze specyfiki wydziału i formy prowadzonych przezeń studiów matematycznych, i nie zależało po części od habilitanta. Tym bardziej należy stwierdzić z uznaniem, że tematy dwóch prac magisterskich i sześciu licencjackich, których był opiekunem⁶ wydają się zarówno ambitne, jak i ściśle związane z tematyką naukową, którą się zajmuje. Naprawdę jestem pod wrażeniem nad jak trudnymi tematami pracował on z magistrantami, a zwłaszcza z licencjatami. Uważam ten fakt za niezwykle istotny, bo stanowi podstawę do wyrażenia przekonania, że może być

⁵ Wg USOS Politechnika Warszawska, tej danej nie mogło być w materiałach z powodów czasowych.

⁶ Wg <https://repo.pw.edu.pl/>

on w przyszłości świetnym promotorem rozpraw doktorskich. Dr Szpojankowski jest też koordynatorem zespołu pracującego nad nową specjalizacją w ramach kierunku Matematyka i Analiza Danych na studiach magisterskich na Politechnice Warszawskiej o profilu bardziej probabilistycznym, co stworzy mu zapewne okazję dla poprowadzenia w przyszłości ciekawych zajęć dydaktycznych. Z kolei osiągnięcia organizacyjne habilitanta wydają się odpowiadać ilościowo czasowi jaki pracuje na Politechnice Warszawskiej. Brak jest natomiast w dokumentach wzmianki o jego aktywności popularyzacyjnej, ale może i na nią przyjdzie kiedyś czas.

Również aktywność konferencyjną dr Szpojankowskiego uważam za sporą, choć częstsze były tu wyjazdy na konferencje w kraju. Co jednak należy podkreślić, w jego pobytach zagranicznych przeważały krótsze wizyty naukowe (dziewięć), co mnie osobiście wydaje się na tym etapie kariery bardziej sensowną formą wyjazdów niż sam udział w konferencjach. Do tego należy dodać roczny staż podoktorski w bardzo dobrym (wedle rankingów) ośrodku. Ponieważ nie miałem nigdy przyjemności posłuchać referatu habilitanta osobiście, pozwoliłem sobie uzupełnić analizę materiałów wysłuchaniem jego 40-minutowego wystąpienia na XVI Konferencji z Probabilistyki (29 kwietnia 2021)⁷, które bardzo mi się podobało, też dlatego, że podawało dodatkowe motywacje dla prowadzonych przez niego badań. Jeżeli idzie o aktywność grantową z kolei, to udział w dwóch grantach OPUS i kierowanie grantem SONATA jest chyba tym właśnie czego się na tym etapie kariery od aktywnej naukowo osoby w naszym kraju oczekuje. Warto zauważyć, że działalność naukowa habilitanta była czterokrotnie nagradzana przez rektora Politechniki Warszawskiej.

Kontynuując tę recenzję pragnąłbym uczciwie i wyraźnie zaznaczyć, że nie jestem specjalistą od probabilistyki nieprzemiennej. Uprawiam (między

⁷ Zamieszczone na https://www.youtube.com/watch?v=GnzGGf-se_A

innymi) pokrewną dyscyplinę, kwantową teorię informacji, ale moim zdaniem te dwa obszary nie są sobie aż tak bliskie jak czasem się uważa, pomimo istnienia niewątpliwych punktów styczności, takich jak teoria macierzy losowych. Podstawowa różnica, wskazana zresztą przez habilitanta w autoreferacie, polega na tym, że informacja kwantowa skupia się raczej na skończenie wymiarowych przestrzeniach Hilberta i ich geometrii, nieprzemienne rachunek prawdopodobieństwa zaś na nieskończenie wymiarowych, stanowiąc zatem *de facto* część analizy funkcjonalnej. Inne są w związku z tym techniki dowodowe, innego typu zagadnienia wysuwają się na plan pierwszy. Ponadto w kwantowej teorii informacji, należącej raczej do świata fizyki matematycznej, probabilistyka odgrywa mniejszą rolę. Ta różnica z jednej strony pozwala mi zapewne na spojrzenie na osiągnięcia habilitanta z pewnego oddalenia, z drugiej zaś może nieco utrudniać ich ocenę na tle uprawianej przez niego subdyscypliny, o której wiem, szczerze mówiąc, nie tak wiele.

Muszę tu przyznać, że w zrozumieniu struktury i wagi osiągnięcia naukowego bardzo pomocny okazał się autoreferat habilitanta opatrzone szerokim wstępem tłumaczącym pozycję jaką w matematyce zajmuje nieprzemienna probabilistyka, a w szczególności wolna probabilistyka stworzona przez Voiculescu w latach 80-tych XX wieku, a także wprowadzającym używane w cyklu omawianych prac idee i pojęcia⁸. Równie podobała mi się dalsza część autoreferatu prezentujące cztery prace [H1]-[H4]. Jej szczegółowość zwalnia też, jak sądzę, recenzenta z obowiązku dokładnego opisanie otrzymanych przez dra Szpojankowskiego i jego współautorów wyników. Chciałbym jednak zwrócić uwagę na kilka kwestii.

Habilitant starannie i przekonująco uzasadnia, dlaczego prace te tworzą prawdziwie jednotematyczny cykl, tłumacząc za każdym razem jak każda z nich prowadziła do kolejnej, i pokazując jak wszędzie kumulanty boolowskie

⁸ Chociaż moim ulubionym tekstem pozostaje tu T. Tao „Free probability”: <https://terrytao.wordpress.com/2010/02/10/245a-notes-5-free-probability/>

wykorzystywane są do badania rozmaitych zagadnień z wolnej probabilistyki. Gdy czytałem dowody otrzymanych wyników, to na ile moja skromna wiedza w tej dziedzinie pozwala mi to ocenić, wydały mi się one złożone, pomysłowe, czerpiące dużo z prac innych autorów, jak i prac habilitanta, bez względu na to, czy rozumowania miały bardziej kombinatoryczny, czy też bardziej analityczny charakter – oba typy rozumowań są w nich bowiem niemal po równi reprezentowane. Bardzo podobało mi się, że we wszystkich przypadkach ogólne twierdzenia prowadzą do zastosowań, przykładów i wzorów o rachunkowym charakterze, zachowując właściwy bilans między abstrakcją i konkretem.

Dużą część zarówno zgłoszonego do oceny cyklu publikacji, jak i pozostałego dorobku dra Szpojankowskiego stanowią prace mające współautorów, w pierwszym przypadku są to wszystkie cztery prace, w drugim zaś pięć z dziewięciu. Nie uważam, żeby ta sytuacja cokolwiek tym pracom ujmowała – matematyka staje się w ostatnich latach w coraz większym stopniu działaniem zespołowym i w tym świetle można tu raczej mówić o pozytywach takiej drogi publikacyjnej. Warto zauważyć, że współautorów było dwunastu (mówię o całym dorobku habilitanta), co dobrze świadczy o jego umiejętności współpracy w zespołach naukowych, a prace te, jak należy domniemywać i co częściowo wiemy z oświadczeń współautorów, powstawały w czasie jego krótkich wyjazdów zagranicznych oraz rocznego stażu podoktorskiego, a także podczas dłuższych pobyków jego współpracowników w Warszawie.

Co jednak najbardziej istotne w swoim autoreferacie habilitant bardzo precyzyjnie (nie ilościowo jak to czasem bywa, lecz jakościowo) określił swój wkład we wszystkie cztery publikacje wchodzące w skład osiągnięcia naukowego. Potwierdzają to dodatkowo oświadczenia wszystkich współautorów prac [H1]-[H4], niektóre z nich stanowią właściwie entuzjastyczne mini-recenzje opisujące szczegółowo ich współpracę z habilitantem i kluczową rolę jaką w niej odegrał. Dokładna ich konfrontacja z opisem jego wkładu w autoreferacie i treścią prac pozwala bez żadnych wątpliwości stwierdzić, że

w tych wszystkich przypadkach rola dra Szpojankowskiego w powstaniu tekstów była wiodąca.

Zapoznając się z jego wynikami utwierdziłem się w przekonaniu, że probabilistyka nieprzemienialna jest dyscypliną wymagającą rozległej wiedzy i sporych umiejętności technicznych. Nie mam też po lekturze materiałów najmniejszej wątpliwości, że habilitant oba te wymagania spełnia.

Podsumowując, uważam że dr Szpojankowski ma w dorobku osiągnięcia naukowe stanowiący znaczny wkład w rozwój matematyki. W szczególności osiągnięcie takie stanowi niewątpliwie cykl powiązanych ze sobą tematycznie artykułów [H1]-[H4] opublikowanych w renomowanych czasopismach naukowych i zawierających oryginalne rozwiązanie istotnych problemów naukowych. Takim osiągnięciem jest również jego rozprawa doktorska, a także inne publikacje wchodzące w skład dorobku: [P1]-[P3] oraz [R1]-[R6]. Ponadto dr Szpojankowski wykazał się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednym podmiocie, także zagranicznym (Politechnika Warszawska, Uniwersytet Waterloo w Kanadzie, jak i inne zagraniczne uniwersytety, na których przebywał krócej, ale też owocnie). Jego kariera naukowa rozwija się w harmonijny i wzorcowy sposób we wszystkich możliwych aspektach. Z tego względu, i z uwagi na przekonanie o wysokiej wartości uzyskanych przez dra Szpojankowskiego wyników stwierdzam, że moim zdaniem **osiągnięcia naukowe wnioskodawcy spełniają wszystkie wymagane kryteria ustawowe i dlatego wnoszę o podjęcie przez komisję habilitacyjną uchwały o nadaniu mu stopnia doktora habilitowanego w dyscyplinie matematyka.**

Sądzę ponadto, że habilitacja dra Szpojankowskiego zasługuje na wyróżnienie, ale zdaje się tutaj na zdanie bardziej ode mnie merytorycznie kompetentnych członków komisji; w każdym razie jestem gotów poprzeć taki wniosek.

dr hab. Anna Wysoczańska-Kula
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dra Kamila Szpojankowskiego

Dr Kamil Szpojankowski uzyskał tytuł doktora nauk matematycznych na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej w roku 2014. Od 2015 roku jest zatrudniony jako adiunkt na tym samym Wydziale. W roku akademickim 2015/16 odbył staż podoktorski w University of Waterloo w Kanadzie. Zainteresowania naukowe kandydata od początku związane były z nieprzemianną probabilyką i tej tematyki dotyczy także przedstawione do oceny osiągnięcie naukowe pt "Kumulanty boolowskie w wolnej probabilyce". Wedle mojej wiedzy, kandydat nie ubiegał się uprzednio o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

OCENA OSIĄGNIĘCIA HABILITACYJNEGO

W skład przedstawionego przez Habilitanta osiągnięcia naukowego wchodzi 4 prace, oznaczone w autoreferacie jako [H1]-[H4], których główną ideą jest wykorzystanie kumulant boolowskich do badania problemów z wolnej probabilyki. Prace ukazały się w bardzo dobrych czasopismach i są już zauważane przez środowisko matematyczne – Google Scholar odnotowuje w sumie 16 cytowań prac [H1]-[H4] (ze względu na "młody wiek" prac Google Scholar daje lepszy obraz faktycznego nimi zainteresowania, ponieważ bierze pod uwagę także cytowania z bazy arxiv). Redakcja prac nie budzi zastrzeżeń. Wszystkie prace są współautorskie, jak jednak zgodnie twierdzą wszyscy współautorzy prac, udział dr Szpojankowskiego w ich powstaniu był bardzo istotny. Na przykład prof. Bercovici i Nica uznają, że bez habilitanta praca [H1] w ogóle by nie powstała; a prof. Nica pisze, że habilitant byłby pierwszym autorem pracy [H2], gdyby autorów podawać nie alfabetycznie, ale zgodnie z ich wkładem w pracę. Pozostali współautorzy wypowiadają się w podobnym duchu. Wszyscy podkreślają wiodącą rolę dr Szpojankowskiego w propagowaniu idei wykorzystania kumulant boolowskich do rozwiązywania problemów w wolnej probabilyce.

W pracy [H1] autorzy wprowadzają pojęcie nieskończenie podzielnego $*$ -rozkładu i badają $\boxplus$ -nieskończenie podzielne rozkłady R -diagonalne (rozkład R -diagonalny to taki, którego R -transformata jest kombinacją jednomianów $(zz^*)^n$ i $(z^*z)^n$; $\boxplus$ oznacza wolny spłot addytywny). W tym celu rozszerzają boolowską bijekcję Berkovici'ego-Paty (oryginalnie określoną między miarą nieskończenie podzielnymi względem boolowskiego spłotu addytywnego a analogicznymi miarami względem spłotu wolnego) na $*$ -rozkłady. Dzięki niej problem charakteryzacji takich rozkładów sprowadza się do badania rozkładów η -diagonalnych, czyli takich, w których η -transformata (funkcja generująca kumulant boolowskich) jest kombinacją jednomianów jak wyżej. W pracy opisano ciekawy model pozwalający udowodnić (Theorem 5.2), że rozkłady η -diagonalne pozostają w jednoznaczności z parami (σ_1, σ_2) miar na $[0, +)$ o nośniku zwartym. Jednym z ważnych wyników

w pracy jest parametryzacja $\boxplus$ -nieskończenie podzielných rozkładów R -diagonalny przez te pary miar (σ_1, σ_2) , dla których zachodzą pewne specjalne równania funkcyjne (Theorem 6.4). W szczególnym przypadku, dla $*$ -rozkładów KMS-symetrycznych, równania te zostały rozwiązane explicite (Proposition 6.8). W pracy wykazano także zaskakującą własność, że rodzina $\boxplus$ -nieskończenie podzielných rozkładów R -diagonalnych jest zamknięta na operację wolnego splotu multiplikatywnego. Dowody powyższych faktów sprytnie łączą techniki analityczne i kombinatoryczne.

Praca [H2] jest poświęcona badaniom w $*$ -przestrzeni probabilistycznej rozkładów zmiennych ab i $ab + ba$ przy założeniu, że a i b są wolne. Problem ten był znany w środowisku i oceniany jako trudny problem kombinatoryczny (znacznie trudniejszy niż rozwiązany już problem dla komutatora $i(ab - ba)$), ale pozostawał otwarty. Głównym pomysłem, który pozwolił autorom na jego rozwiązanie, było znalezienie charakterystyki wolnej niezależności w terminach kumulant boolowskich. W tym celu autorzy zidentyfikowali specjalną klasę partycji, które pojawiają się jako zbiór indeksujących nieznikające kumulanty zmiennych a i b – są to nieprzecinające się partycje mające własność VNRP (*vertical no-repeat property*). Uważam, że jest to bardzo interesujący wynik, z rodzaju takich, które są może *stosunkowo* proste do sprawdzenia, ale dopiero wtedy kiedy wiadomo już, co należy dowodzić. Sam pomysł na właściwy kombinatoryczny opis kumulant jest wysoce nietrywialny. Zastosowanie wspomnianej powyżej charakterystyki (wraz z opisem pewnych dodatkowych struktur kombinatorycznych) pozwoliło podać wzór na boolowskie kumulanty produktów ab , ba oraz $ab + ba$. Autorzy zaproponowali też sposób na obliczenie η -transformaty zmiennej $ab + ba$ za pomocą układu równań funkcyjnych. Możliwości tej metody są zilustrowane na kilku ciekawych przykładach. Nieco irytujące w artykule [H2] jest powtarzane kilkakrotnie pozostawianie czegoś *jako ćwiczenie dla czytelnika* – fraza ta wydaje mi się bardziej odpowiednia w podręczniku, skrypcie do wykładu lub monografii, ale raczej niestosowna w artykule naukowym. Za jej użycie nie można jednak obwiniać tylko habilitanta.

Główną tematyką pracy [H3] jest badanie rozkładu *splotu Canelliego*, czyli zmiennej $b + f(b)af(b)^*$ dla zmiennych a i b wolnych i borelowskiej funkcji f . W tym celu autorzy obliczają warunkową wartość oczekiwaną rezolwenty $b + f(b)af(b)^*$, znajdując specjalną funkcję subordynacji. Uzyskane wyniki uogólniają rezultaty P. Biane'a, który badał funkcje subordynacji dla wolnego splotu addytywnego i multiplikatywnego (co odpowiada badaniu rozkładów zmiennych $a + b$ i $\sqrt{ba}\sqrt{1}$). Zasadniczym narzędziem jest tutaj wzór wyrażający wartość oczekiwaną naprzemiennego iloczynu zmiennych losowych w terminach kumulant boolowskich, a funkcją subordynacji okazuje się funkcja generująca naprzemienných kumulant boolowskich. Praca opisuje także dokładny algorytm pozwalający wyznaczyć transformatę Cauchy'ego (więc, przynajmniej teoretycznie, także i rozkład) splotu. Zastosowanie tego algorytmu (wraz z bardzo wymagającym wyliczeniem rozkładu) jest pokazane na przykładzie, gdy a, b mają rozkład Wignera, a f jest identycznością. Ze wszystkich czterech prac przedstawionych w osiągnięciu praca [H3] wydaje mi się najtrudniejsza w odbiorze (ze względu na użycie zaawansowanych metod geometrii algebraicznej oraz pewne usterki redakcyjne). Jednocześnie uzyskane w niej wyniki są bardzo konkretne przy zachowaniu dużego stopnia ogólności i spodziewam się, że będą inspiracją do dalszych badań dla innych matematyków.

Praca [H4] stanowi kolejne po stwierdzenie faktu, że boolowskie kumulanty są praktycznym narzędziem do rozwiązywania problemów probabilistyki wolnej. W tej pracy konkretnie służą do obliczenia pewnych warunkowych momentów wolnych zmiennych losowych, dając znaczne ułatwienie w dowodzie zwykłej oraz dualnej, wolnej wersji twierdzenia Lukacsa. Ciekawe jest tutaj obserwowanie, jak nowe metody stworzone przez habilitanta uzupełniają i upraszczają rezultaty zawarte w jego doktoracie.

Oceniam, że prace przedstawione jako osiągnięcie naukowe stanowią bardzo cenny wkład w rozwój nieprzemiennej probabilistyki. Dr Szpojankowski jawi się w nich jako adwokat nowej, dość kontrintuicyjnej metody korzystania z kumulant boolowskich w wolnej probabilistyki. Metoda ta okazuje się mieć szerokie zastosowania: do charakteryzacji $\ast$ -rozkładów $\boxplus$ -nieskończenie podzielnych, do liczenia różnych rozkładów (iloczynów, antykomutatorów, splotów) zmiennych wolnych, czy do liczenia warunkowych wartości oczekiwanych zmiennych wolnych i badania subordynacji. Wyniki habilitanta wskazują na nieoczywiste powiązania między probabilistyką wolną a boolowską i z całą pewnością wywrą istotny wpływ na badania w tej dziedzinie.

AUTOREFERAT

Autoreferat napisany jest w sposób bardzo staranny i przyjemny do czytania. Autor zadbał o zebranie wszystkich niezbędnych pojęć wstępnych i przytoczenie twierdzeń, na których się opiera. Autoreferat zawiera nie tylko opis wyników zawartych w pracach – prezentuje także drogę do ich osiągnięcia oraz podkreśla najważniejsze aspekty prac. Lektura autoreferatu znacząco ułatwia zrozumienie prac habilitanta oraz spojrzenie na jego dokonania z właściwej perspektywy. Jedyne mankament przedstawionego autoreferatu to częsty brak przecinków, wymaganych przez reguły interpunkcji polskiej (np. przed "który", "aby", "kiedy").

DOROBK NAUKOWY NIEWCHODZĄCY W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Pozostały dorobek dra Szpojankowskiego oceniam jako bardzo dobry. Poza pracami wskazanymi w osiągnięciu habilitacyjnym kandydat ma 9 publikacji (w tym 6 opublikowanych po uzyskaniu stopnia doktora) w dobrych i bardzo dobrych czasopismach. Trzy kolejne prace są udostępnione w bazie arxiv.org i zapewne są w trakcie recenzowania.

Tematyka prac niewchodzący w skład osiągnięcia naukowego dotyczy wolnej probabilistyki, w szczególności uogólnień klasycznych twierdzeń probabilistycznych do wolnej probabilistyki (twierdzenie Lukacsa, własność Matsumoto-Yora, twierdzenie Bernsteina). Na dzień 23 marca 2022, Habilitant ma 47 cytowań w bazie MathSciNet, z czego najbardziej cytowana jest praca [P1] (13 cytowań w tym 6 autocytowań). Według bazy Web of Science kandydat ma 46 cytowań, w tym 27 bez autocytowań, indeks Hirscha: 5. Sumaryczny impact factor prac habilitanta wynosi 12.409, a sumaryczna punktacja ministerialna jego prac (według wykazu z 2019r.) – 1320 punktów.

Kandydat współpracuje naukowo z badaczami z różnych ośrodków polskich i zagranicznych. Są wśród nich bardzo dobrzy matematycy, tacy jak H. Bercovici, A. Nica, F. Lehner czy T. Hasebe – świadczy to o udziale Habilitanta w badaniach na światowym poziomie. Habilitant spędził rok na stażu podoktorskim w University of Waterloo, odbywał też krótkoterminowe wyjazdy do Kandy Austrii, USA i Francji (w sumie 9 wyjazdów 7-10-dniowych), co z nawiązką spełnia warunek realizowania aktywności naukowej w więcej niż jednym ośrodku.

Warto docenić, że dr Szpojankowski brał aktywny udział w pięciu grantach: był kierownikiem grantu NCN oraz grantu NCBiR, oraz wykonawcą w dwóch grantach NCN i grantie Austrian Federal Ministry of Education. Wyniki swoich prac referował na kilkunastu międzynarodowych konferencjach. Był wielokrotnie nagradzany nagrodą Rektora PW za osiągnięcia naukowe.

DOROBEK DYDAKTYCZNY I ORGANIZACYJNY

Kandydat prowadził różnorodne zajęcia dla studentów kilku wydziałów Politechniki Warszawskiej i University of Waterloo. Opiekował się 7 pracami dyplomowymi. Koordynuje zespół tworzący specjalność Matematyka i Analiza Danych na Politechnice Wrocławskiej oraz zasiada w komisjach ds. Finansowania Badań Naukowych i ds. Nagród i Odznaczeń na swoim Wydziale. Recenzował artykuły naukowe, a w nadchodzącym roku organizuje międzynarodową konferencję. Bierze też aktywny udział w ocenianiu wniosków grantowych Narodowego Centrum Nauki jako ekspert w panelu ST1.

W mojej ocenie dorobek dydaktyczny i organizacyjny habilitanta jest w pełni satysfakcjonujący.

KONKLUZJA

Nie mam najmniejszych wątpliwości co do tego, że dr Kamil Szpojankowski spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane kandydatom do habilitacji, w szczególności ma znaczący dorobek naukowy i wykazuje się istotną aktywnością naukową, realizowaną w więcej niż jednej uczelni. Dlatego z pełnym przekonaniem rekomenduję nadanie mu stopnia doktora habilitowanego. Ponadto, jeśli jest taka możliwość, wnioskuję o uznanie rozprawy za wyróżniającą.

Anna Wysoczańska-Kula

Toruń, 14 marca 2022 r.

prof. dr hab. Piotr Śniady
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa
email: psniady@impan.pl

Recenzja
w postępowaniu o nadanie
doktorowi
KAMIŁOWI SZPOJANKOWSKIEMU
stopnia doktora habilitowanego

Niniejszą recenzję przygotowałem na zlecenie Przewodniczącej Rady Dyscypliny Naukowej Matematyka, prof. dr hab. Janiny Kotus, z dnia 13 stycznia 2022 roku. Elektroniczną wersję zlecenia otrzymałem 18 stycznia 2022 roku.

Niniejsze postępowanie o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego toczy się według przepisów ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* (Dziennik Ustaw z 2020 r. poz. 85, 374, 695, 875, 1086, z 2021 r. poz. 159) oraz według *Rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 19 stycznia 2018 r. w sprawie szczegółowego trybu i warunków przeprowadzania czynności w przewodzie doktorskim, w postępowaniu habilitacyjnym oraz w postępowaniu o nadanie tytułu profesora* (Dziennik Ustaw z 2018 r. poz. 261).

Krótki życiorys naukowy Kandydata. 16 października 2014 roku Kamil Szpojankowski uzyskał stopień doktora nauk matematycznych w dyscyplinie *matematyka* na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej na podstawie rozprawy *Własności typu lukacsowskiego w wolnej probabilistyce*. Kandydat nie ubiegał się uprzednio o nadania stopnia doktora habilitowanego.

Od 2015 roku jest zatrudniony jako adiunkt na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. Przez 12 miesięcy, w latach 2015–2016 pracował jako post-doc w Department of Pure Mathematics, University of Waterloo w Kanadzie.

Ocena osiągnięcia naukowego. *Osiągnięcie naukowe Kandydata stanowiące podstawę ubiegania się w aktualnym postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego, o którym mowa w Artykule 219 Ustawy, a które dla uproszczenia nazywać będę rozprawą habilitacyjną, ma postać cyklu czterech powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych, które w roku opublikowania były ujęte w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b.*

Tematem rozprawy są, mówiąc bardzo ogólnie, zastosowania boolowskich kumulant w wolnej probabilistyce. Zgodnie z twierdzeniami klasyfikacyjnymi Speichera i Murakiego, istnieje tylko kilka *uniwersalnych produktów*, czyli istnieje tylko kilka sposobów na zdefiniowanie pojęcia niezależności w nieprzemiennej probabilistyce. Pierwszym z nich jest pojęcie *klasycznej niezależności*, które badane jest w ramach zwykłego rachunku prawdopodobieństwa. Drugim jest *wolna niezależność*, która została wprowadzona przez Voiculescu w kontekście wielkich problemów teorii algebr operatorowych i szybko znalazła bardzo liczne zastosowania zarówno w teorii macierzy losowych, jak i w asymptotycznej teorii reprezentacji. Trzecią uniwersalną niezależnością jest *niezależność boolowska*, która pomimo swojej uniwersalności nie znalazła wielu interesujących modeli i zastosowań.

Ważną obserwacją leżącą głęboko u podstaw recenzowanej rozprawy jest to, że wiele obiektów związanych z klasycznym rachunkiem prawdopodobieństwa ma swoje odpowiedniki w świecie wolnym oraz w świecie boolowskim. Jednym z nich jest pojęcie *kumulant*. W klasycznej sytuacji kumulanty pochodzą z rozwinięcia w szereg potęgowy logarytmu transformaty Fouriera, która nie uogólnia się dobrze w sytuacji nieprzemiennej; na szczęście kumulanty można również zdefiniować w sposób kombinatoryczny, który ładnie uogólnia się do świata wolnego oraz boolowskiego. Właśnie pojęciu boolowskich kumulant poświęcona jest rozprawa.

Na pierwszy rzut oka mogłoby się wydawać, że skoro boolowski rachunek prawdopodobieństwa nie okazał się ogromnym sukcesem, również związane z nim kumulanty są mało użyteczne. Tak jednak nie jest, gdyż wspomniane już analogie pomiędzy wolnym i boolowskim rachunkiem prawdopodobieństwa pozwalają przeformułować pewne interesujące i trudne problemy wolnej probabilistyki na znacznie prostszy język boolowski. Główną treścią recenzowanej rozprawy jest kilka takich apetycznych przykładów. W ten sposób wyniki rozprawy lokują ją w samym środku wolnej probabilistyki. Jest to bardzo ciekawa i dynamicznie rozwijająca się tematyka, którą zajmowało się wielu świetnych badaczy, i w której konkurencja jest dość silna. Gratuluję więc Habilitantowi tak znakomitej i niełatwej dziedziny badań.

Poszczególne prace wchodzące w skład rozprawy zostaną skomentowane poniżej. Numeracja publikacji odpowiada tej z autoreferatu.

Praca [H1]. Praca *Eta-diagonal distributions and infinite divisibility for R -diagonals* (współautorska z Harim Bercovicim, Alandru Nicą i Michaeliem Noyesem) ukazała się w znakomitym czasopiśmie *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Probabilités et Statistiques*. Głównym tematem pracy są takie nieprzemienne zmienne R -diagonalne, które są $\boxplus$ -nieskończenie podzielne (czyli są nieskończenie podzielne ze względu na wolny splot). Każde z tych dwóch pojęć z osobna jest tematem-rzeką w naukowym świecie wolnej probabilistyki, zatem taki wybór tematyki nie wymaga dodatkowych motywacji (serdecznie gratuluję habilitantowi takiego wyboru pytania; sam żałuję, że nie zająłem się tym problemem wcześniej).

Wspomniana wcześniej analogia pomiędzy klasycznym, wolnym i boolowskim światem przybiera konkretną postać w *bijekcji BBP* (ten niewyjaśniony w pracy akronim prawdopodobnie oznacza *Boolean Bercovici–Pata*), która łączy rozkłady nieskończenie podzielne w każdym z tych trzech światów. Dzięki tej bijekcji każdy $\boxplus$ -nieskończenie podzielny rozkład R -diagonalny odpowiada pewnemu boolowsko nieskończenie podzielnemu rozkładowi. Założenie o R -diagonalności oryginalnego rozkładu gwarantuje, że odpowiadający mu rozkład w świecie boolowskim będzie miał pewne dodatkowe własności. Te właśnie dodatkowe własności są motywacją do nowego pojęcia η -diagonalności rozkładu, które jest boolowskim odpowiednikiem R -diagonalności ze świata wolnego.

Autorzy pracy badają i charakteryzują na różne sposoby η -diagonalne rozkłady; nie powinno być zaskoczeniem, że jednym z głównych narzędzi są boolowskie kumulanty, ponadto η -diagonalne elementy okazują się mieć własności będące bezpośrednimi boolowskimi odpowiednikami ich odpowiedników ze świata R -diagonalności.

Z punktu widzenia wolnej probabilistyki bardzo interesujące jest zastosowanie tych wyników: R -diagonalne i $\boxplus$ -nieskończenie podzielne rozkłady okazują się być scharakteryzowane przez pewną parę miar pochodzącą ze świata boolowskiego. I absolutnie zachwycająca wisienka na torcie: *zbiór nieskończenie podzielnych rozkładów R -diagonalnych jest zamknięty ze względu na wolny splot multiplikatywny!* Ten wynik bardzo mi się spodobał i sam w sobie stanowi on doskonałą motywację do pozostałych wyników zawartych w pracy. Tymczasem te pozostałe wyniki są bardzo obiecującymi użytecznymi narzędziami, które tylko czekają aż ktoś zastosuje je w jakichś innych problemach.

Fragment pracy, w której pokonywana jest główna trudność, wykorzystuje

bardzo interesującą mieszaninę metod kombinatorycznych oraz analitycznych.

Podsumowując: uważam, że omawiana praca jest bardzo interesująca, problemy w niej rozważane są naturalne, i może być ona powodem słusznej dumy Kandydata.

Krótko po napisaniu powyższych słów zapoznałem się z oświadczeniami współautorów pracy [H1]. Wskazują oni jednoznacznie, że wkład Kandydata był tak znaczący, że bez niego praca ta nie mogłaby powstać. Ponadto liczne elementy pracy, o których pisałem tak pozytywnie w poprzednich akapitach, są jego autorstwa lub miał w nich duży wkład.

Praca [H2]. Praca *Using boolean cumulants to study multiplication and anti-commutators of free random variables* (współautorska z Maximem Fevrierem, Mitją Mastnakiem i Alexandru Nicą) ukazała się w znakomitym czasopiśmie *Transactions of the American Mathematical Society*. Praca ta opiera się na całkowicie innym pomysle: zamiast badać związki pomiędzy światem wolnym oraz światem boolowskim, kumulanty boolowskie użyte są do badania nieprzemiennych zmiennych losowych, które są niezależne w sposób wolny. Na pierwszy rzut oka ten pomysł wydaje się dość niepoważny, ponieważ właściwym narzędziem do badania wolnych zmiennych losowych powinny być przecież jedynie słuszne *wolne kumulanty*. Praca [H2] pokazuje jednak pewne problemy, w których zastosowanie wolnych kumulant napotyka na trudności (na przykład związane ze strukturą wolnego odpowiednika wzoru Leonova i Shiraeva dla iloczynów wolnych zmiennych losowych), z którymi świetnie radzą sobie kumulanty boolowskie.

Kluczową (i bardzo interesującą) obserwacją jest *Theorem 1.2*, które pozwala scharakteryzować wolność nieprzemiennych zmiennych losowych poprzez pewną tożsamość algebraiczną, którą winny spełniać ich boolowskie kumulanty. Autorzy pracy tworzą kombinatoryczną maszynę (klasa partycji *vertical no-repeat property* czyli VNRP), która łączy świat wolnej kombinatoryki (nieprzecinające partycje) oraz świat kombinatoryki boolowskiej (partycje boolowskie).

Przykładowym zastosowaniem tej maszyny — pokazanym w omawianej pracy — jest problem opisu rozkładu antykomutatora pary wolnych zmiennych losowych jeśli znane są rozkłady każdej z tych zmiennych z osobna.

Sądzę, że najciekawszym elementem tej pracy jest to, że narzędzia w niej zawarte mają dużą szansę dać się zastosować w przyszłości do zupełnie innych problemów. Między innymi z tego powodu bardzo wysoko oceniam tę publikację.

Oświadczenia współautorów jednoznacznie wskazują, że Habilitant jest głównym autorem pracy, w szczególności wyżej wspomniany nieintuicyjny pomysł na

zastosowanie boolowskich kumulant jest jego autorstwa.

Praca [H3]. Praca *Boolean cumulants and subordination in free probability* (współautorska z Franzem Lehnerem) ukazała się w dobrym czasopiśmie *Random Matrices: Theory and Applications*. Jej głównym przedmiotem jest tzw. *funkcja subordynacji* (ang. *subordination function*), która pojawia się w naturalny sposób w opisie splotu wolnego przy pomocy metod analizy zespolonej. Podobnie jak w omawianej powyżej pracy [H2], punktem startu jest pewna tożsamość, która wyraża mieszany moment wolnych zmiennych losowych przez ich boolowskie kumulanty.

Jednym z głównych wyników jest interpretacja współczynników funkcji subordynacji przy pomocy boolowskich kumulant. Drugim jest nowa rodzina tożsamości uogólniająca klasyczne tożsamości w wolnej probabilistyce wyrażające pewną warunkową wartość oczekiwaną (a la transformata Cauchy’ego–Stieltjesa) przez zwykłą transformatę Cauchy’ego–Stieltjesa obliczoną w punkcie zadanym funkcją subordynacji. Ta nowa rodzina tożsamości pozwala bardzo dobrze zrozumieć rozkład zmiennych losowych postaci $X + f(Y)Xf^*(Y)$ dla pary X, Y wolnych zmiennych losowych.

Wyżej wspomniana nowa rodzina tożsamości związanych z subordynacją była dla mnie dużym zaskoczeniem. Może ona świadczyć o tym, że związki subordynacji z wolną probabilistyką są znacznie głębsze, niż dotąd sądzono. Z tego powodu wysoko cenię tę publikację, gdyż ma ona szansę zapoczątkować nowy kierunek badań w ramach wolnej probabilistyki.

Oświadczenie współautora wskazuje, że wkład Kandydata do pracy jest co najmniej proporcjonalny.

Praca [H4]. Praca *Conditional expectations through Boolean cumulants and subordination – towards a better understanding of the Lukacs property in free probability* (współautorska z Jackiem Wesołowskim) ukazała się w przyzwoitym czasopiśmie *ALEA Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*. Jej główną treścią jest zastosowanie wyników z wcześniej omawianych prac wchodzących w skład rozprawy ([H2] i [H3]) do charakteryzowania pewnych fundamentalnych rozkładów jako jednych spełniających pewne naturalne warunki. W klasycznym rachunku prawdopodobieństwa przykładem takiego wyniku jest twierdzenie Lukacsa. Twierdzenia tego typu były uogólniane do kontekstu wolnej probabilistyki i wolnej niezależności; niestety, wolna sytuacja okazywała się często zdecydowanie trudniejsza i wiele dowodów wolnych odpowiedników było

zaskakująco złożone technicznie. Co najmniej jeden z takich złożonych dowodów jest autorstwa samego Habilitanta. Głównym celem omawianej pracy jest przedstawienie nowych, bardziej koncepcyjnych dowodów, korzystających z boolowskich kumulant.

Warto ponadto zwrócić na Proposition 3.3 i Proposition 3.4, które w jawny sposób podają pewną warunkową wartość oczekiwaną, która jest dość dużym uogólnieniem warunkowej wartości oczekiwanej pojawiającej się w klasycznym już dziś związku wolnych splotów z subordynacją. Interesujące jest dla mnie jak daleko można pójść z takimi uogólnieniami? Czy istnieje jakaś ukryta struktura, która wyjaśniałaby te wyniki? To, że omawiana praca budzi takie pytania, jest znakiem towarzyszącym dobrej matematyce.

Artykuł [H4] traktuję jako pierwociny plonów pochodzących z wcześniejszych prac [H2] i [H3]: w samej rzeczy prace te dostarczają narzędzi użytecznych do dużej klasy problemów wolnej probabilistyki.

Oświadczenie współautora pracy jednoznacznie wskazuje, że wkład Kandydata był więcej niż proporcjonalny.

Ocena osiągnięcia naukowego, podsumowanie. Omówione wyżej cztery prace Kandydata tworzą spójny, fascynujący, bardzo przemyślany cykl. U jego podstaw leży pochodząca od samego Kandydata idea stosowania boolowskich kumulant poza ich naturalnym habitatem, w kontekście wolnej probabilistyki. Ja sam uważam tę ideę za głęboko nieintuicyjną, gratuluję więc Habiliantowi tak znakomitego pomysłu oraz wykazania na kilku dobrze dobranych przykładach, że istotnie ta idea może być efektywnie wykorzystana w praktyce. Brawo. **Recenzowane osiągnięcie stanowi dla mnie dowód dojrzałości i samodzielności naukowej Habilitanta, w szczególności — zgodnie z wymaganiami Ustawy — stanowi ono bardzo znaczny wkład w rozwój odpowiedniej dyscypliny naukowej (czyli matematyki).**

Oświadczenia współautorów wszystkich prac jednoznacznie wskazują na Kandydata jako głównego lub bardzo ważnego pomysłodawcę oraz lidera.

Dorobek naukowy jako całość. Całość dorobku naukowego Habilitanta składa się z 12 prac. Cztery z nich omówiłem już szczegółowo powyżej. Pozytywnie oceniam zróżnicowanie tematyczne: choć niemal cały dorobek Kandydata związany jest z wolną probabilistyką, poszczególne prace dotyczą bardzo różnych jej aspektów. Powtarzającymi się motywami w dorobku są: charakteryzacja różnych nieprzemiennych rozkładów przez ich konkretne własności, kumulanty boolowskie,

metody związane z analizą zespoloną oraz kombinatoryka partycji. Kilka z prac Habilitanta zwróciło moją uwagę, omówię je krótko poniżej.

Praca *Convolution, subordination, and characterization problems in noncommutative probability* (współautorska z Wiktorem Ejsmontem oraz Uwe Franzem) ukazała się w bardzo prestiżowym czasopiśmie *Indiana University Mathematical Journal*! Główny wynik dotyczy nowego spojrzenia na problemy charakteryzacji (a la Laha–Lukacs) z punktu widzenia subordynacji. Efektem tego nowego spojrzenia jest zarówno uproszczenie dowodów pewnych starych wyników w tej dziedzinie, jak i radykalne osłabienie założeń. Podobnie jak w przypadku kilku już wspomnianych prac Kandydata, metody pokazane w pracy mają szansę stosować się w znacznie większej ogólności.

Głównym celem pracy *A construction which relates c -freeness to infinitesimal freeness* (współautorska z Maximem Févrierem, Mitją Mastnakiem oraz Alexandru Nica), która ukazała się w *Advances in Applied Mathematics* jest poszukiwanie powiązań między formalizmem warunkowo wolnej niezależności (wprowadziny przez Bożejkę, Speichera i Leinerta) oraz infinitezymalnej wolności (wprowadzonej przez Belinschiego, Shlyakhtenkę). Artykuł ten zawiera wielowymiarowe rozszerzenie wyniku Belinschiego i Shlyakhtenki i daje jawne odwzorowanie, które przeplata operacje warunkowego splotu wolnego i infinitezymalnie wolnego splotu. Szczególnie interesujący dla mnie był rozdział *Section 5.2*, który daje nowy wgląd w kombinatorykę kumulant w formalizmie warunkowej wolności.

Moją uwagę zwróciła również krótka praca *Quantum Bernstein's theorem and the hyperoctahedral quantum group* (współautorska z Pawłem Józiakiem), która ukazała się w *Journal of Mathematical Physics*; w pracy tej bardzo spodobał mi się naturalny problem, który rozwiązują Autorzy.

Podsumowując, dorobek Habilitanta zawiera liczne interesujące i trudne prace, które oceniam bardzo wysoko. Wiele z wyników Habilitanta to narzędzia, które aż zachęcają, aby wykorzystać je ponownie w innych kontekstach, i spodziewam się, że w przyszłości społeczność naukowa będzie z tych narzędzi korzystać. **Jest to znakomity dorobek, który zdecydowanie i z wielkim nadmiarem przekracza oczekiwania stawiane przez Ustawę.**

W szczególności **z dużym naddatkiem spełnione jest wymagane w Ustawie kryterium dotyczące wykazania się istotną aktywnością naukową lub artystyczną.** Warto w tym kontekście dodać, że Kandydat czterokrotnie otrzymał indywidualną nagrodę Rektora Politechniki Warszawskiej za osiągnięcia naukowe.

Bibliometria. Do podania danych zawartych w niniejszym rozdziale zostałem zobowiązany przez umowę, którą zawarłem ze Zleceniodawcą. Nie jestem zwolennikiem koncentrowania się na danych bibliometrycznych, ale w tym przypadku potwierdzają one moją powyższą wysoką ocenę merytoryczną cyklu habilitacyjnego oraz pozostałego dorobku Habilitanta.

Patrząc jedynie na prestiż czasopism, serdecznie gratuluję Habilitantowi publikacji w bardzo prestiżowych *Journal of Functional Analysis*, *Indiana University Mathematics Journal*, *Transactions of the American Mathematical Society*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*. Czasopisma te słyną z bardzo gęstego sita recenzyjnego, każda publikacja w nich może być dla Habilitanta źródłem uzasadnionej dumy. Wypada również wspomnieć o takich dobrych czasopismach w których publikował, jak *Studia Mathematica*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Journal of Mathematical Physics*.

Suma punktacji Ministerstwa wszystkich prac Habilitanta wynosi 775 (z czego 715 to suma dla prac wydrukowanych po roku, w którym uzyskał on doktorat). Warto zwrócić uwagę na to, że część prac otrzymała punktację w skali, w której maksimum wynosi 40, a część w innej skali, w której maksimum wynosi 200; oczywiście zmniejsza to użyteczność tej metryki. Suma Impact Factorów wszystkich prac Habilitanta wynosi 12,409 (z czego 10,357 to suma dla prac wydrukowanych po roku, w którym uzyskał on doktorat).

Zarówno z powyższych danych liczbowych jak i z mojej intuicyjnej analizy prestiżu wynika, że Habilitant regularnie publikuje w znakomitych oraz bardzo dobrych czasopismach. Brawo.

Jest on autorem 13 prac (z czego 11 ukazało się po roku, w którym uzyskał on doktorat), cytowanych łącznie 47 razy przez 14 autorów (dane na marzec 2022, na podstawie *MathSciNet*) lub 41 razy (w tym bez autocytowań 24 razy, dane na podstawie *Web of Science*). Jego indeks Hirscha wynosi 5.

Matematyka jest dziedziną, w której typowe liczby cytowań nie są wysokie i trudno jest wyrokować o jakości badań na podstawie tak zaszumionych danych jak cytowania. Moja osobista interpretacja szczegółowej analizy cytowań poszczególnych prac jest taka, że wyniki Habilitanta zostały zauważone przez kilku badaczy (między innymi w Polsce i w Japonii), z których duża część później została współautorami Habilitanta. Warto też podkreślić, że najciekawsze prace Kandydata ukazały się drukiem stosunkowo niedawno i nie miały czasu zbierać wielu cytowań.

Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne i popularyzujące naukę. Habilitant prowadził wykłady na University of Waterloo oraz na Politechnice Warszawskiej. Jednym z wymogów Ustawy jest realizowanie aktywności naukowej w więcej niż jednej uczelni; wymóg ten jest w tym przypadku spełniony.

Kandydat był promotorem 2 prac magisterskich oraz 5 prac licencjackich. Habilitant jest koordynatorem zespołu pracującego nad nową specjalizacją na studiach drugiego stopnia.

Podsumowanie. Zgodnie z Ustawą,

Art. 219. 1. Stopień doktora habilitowanego nadaje się osobie, która:
1) posiada stopień doktora; 2) posiada w dorobku osiągnięcia naukowe albo artystyczne, stanowiące znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny, w tym co najmniej: [. . .] b) 1 cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych opublikowanych w czasopismach naukowych lub w recenzowanych materiałach z konferencji międzynarodowych, które w roku opublikowania artykułu w ostatecznej formie były ujęte w wykazie sporządzonym zgodnie z przepisami wydanymi na podstawie art. 267 ust. 2 pkt 2 lit. b, [. . .] 3) wykazuje się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

Bez najmniejszych wątpliwości stwierdzam, że dr Kamil Szpojankowski spełnia z ogromnym naddatkiem te ustawowe wymagania. Gorąco rekomenduję nadanie mu stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Uważam, że dorobek naukowy Kandydata jest niezwykle interesujący, wykorzystuje często głęboko nieoczywiste metody, a wyniki zawarte w jego pracach są narzędziami, które mają dużą szansę na nowe zastosowania w przyszłości. Z tego powodu **wnioskuję o uznanie tej habilitacji za wyróżniającą.**

prof. dr hab. Piotr Śniady



UNIwersytet
Warszawski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki

dr hab. Radosław Adamczak, prof. ucz.

Warszawa, 21 marca 2022

**Recenzja osiągnięcia naukowego oraz dorobku naukowego, dydaktycznego
i organizacyjnego dr. Kamila Szpojankowskiego w związku z postępowaniem
o nadanie stopnia doktora habilitowanego**

Podstawowe informacje o kandydacie

Dr Kamil Szpojankowski w 2010 r. ukończył studia magisterskie na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. W roku 2014 na tym samym wydziale, na podstawie rozprawy *Własności typu lukacsowskiego w wolnej probabilistyce*, uzyskał stopień doktora. Promotorem był prof. dr hab. Jacek Wesołowski.

Od roku 2015 dr Szpojankowski jest zatrudniony na stanowisku adiunkta na Wydziale MiNI PW. W trakcie zatrudnienia, w roku akad. 2015/2016, odbył staż podoktorski na University of Waterloo w Kanadzie.

Postępowanie w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego

W dniu 27 września 2021 r., na wniosek dr. Kamila Szpojankowskiego, działając na podstawie art. 221 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r., poz. 478 z późn. zm.) Rada Doskonałości Naukowej wszczęła postępowanie o nadanie stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych. Niniejsza recenzja wskazanego we wniosku osiągnięcia naukowego oraz pozostałego dorobku dr. Szpojankowskiego oparta jest o przepisy i kryteria opisane w powołanej ustawie.

We wniosku dr. Szpojankowski przedstawił osiągnięcie naukowe pt. *Kumulanty boolowskie w wolnej probabilistyce*, składające się z czterech powiązanych tematycznie artykułów naukowych:

- [H1] H. Bercovici, A. Nica, M. Noyes, K. Szpojankowski, *Eta-diagonal distributions and infinite divisibility for R -diagonals*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat., 54(2) (2018), 907–937.
- [H2] M. Fevrier, M. Mastnak, A. Nica, K. Szpojankowski, *Using Boolean cumulants to study multiplication and anti-commutators of free random variables*, Trans. Amer. Math. Soc., 373(10)

(2020), 7167–7205.

[H3] F. Lehner, K. Szpojankowski, *Boolean cumulants and subordination in free probability*, Random Matrices Theory Appl., dostępna online (2020).

[H4] K. Szpojankowski, J. Wesołowski, *Conditional expectations through Boolean cumulants and subordination – towards a better understanding of the Lukacs property in free probability*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 17 (1) (2020), 253–272.

Wszystkie prace wchodzące w skład osiągnięcia są współautorskie, Kandydat przedstawił oświadczenia współautorów, dot. jego indywidualnego wkładu. Podkreślają one kluczową rolę Kandydata w powstaniu prac [H1]–[H4].

Na dzień złożenia wniosku na dorobek naukowy Habilitanta składa się 13 publikacji, w tym 3 napisane przed uzyskaniem stopnia doktora. Wszystkie artykuły zostały opublikowane w czasopismach z bazy JCR i listy czasopism punktowanych MNiSW. Część z artykułów została opublikowana w czasopismach o wysokiej renomie w środowisku matematycznym: Trans. Am. Math. Soc., J. Funct. Anal., Ann. Inst. Henri Poincaré – Probab. Stat., część w uznanych czasopismach, jednak o mniejszym prestiżu.

Sumaryczny współczynnik IF to 12,409 zaś sumaryczna punktacja to 1320 zgodnie z wykazem MNiSW z 18.12.2019 r. (775 zgodnie z rokiem opublikowania). Indeks Hirscha wg Web of Science wynosi 5, zaś liczba cytowań 41 (24 bez autocytowań). Sumaryczny IF dla prac powstałych po uzyskaniu stopnia doktora to 9,734, zaś punktacja MNiSW to 1010 (odp. 690). Dostarczona z wnioskiem dokumentacja nie pozwala na ustalenie indeksu Hirscha oraz liczby cytowań po uzyskaniu stopnia doktora na dzień wszczęcia postępowania.

Na podstawie przedstawionej dokumentacji wnioskuję, że Kandydat nie ubiegał się uprzednio o nadanie stopnia doktora habilitowanego.

Prezentacja osiągnięcia naukowego

Osiągnięcie naukowe dr. Kamila Szpojankowskiego dotyczy nieprzemiennej teorii prawdopodobieństwa, w szczególności możliwości zastosowania pojęć z probabilistyki boolowskiej w probabilistyce wolnej.

Pod pojęciem *nieprzemienna probabilistyka* kryje się ogół teorii, w których klasyczne zmienne losowe zastąpione są elementami pewnej algebry z jedyneką $\mathcal{A}$ z wyróżnionym unormowanym funkcjonałem liniowym φ , pełniącym rolę wartości oczekiwanej. W przypadku algebry $L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ oraz φ będącego klasyczną wartością oczekiwaną odzyskujemy pewne podstawowe aspekty klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, zaś ogólna teoria pozwala, w zależności od dodatkowych założeń nałożonych

na algebrę $\mathcal{A}$, uogólnić wiele klasycznych pojęć do abstrakcyjnej, nieprzemiennej sytuacji. Podejście tego typu związane jest z mechaniką kwantową, a rozpatrywane algebry są zazwyczaj C^* -algebrami lub algebrami von Neumanna. Cechą wyróżniającą probabilistykę nieprzemiennej jest rezygnacja z pojęcia zdarzenia elementarnego. W konsekwencji kolektywne zachowanie rodzin zmiennych losowych badane jest poprzez analizę ich $*$ -momentów, zdefiniowanych poprzez złożenie $*$ -wielomianów od rozpatrywanych zmiennych z funkcjonałem φ . W przypadku pojedynczej zmiennej samosprężonej momenty mogą być opisane w terminach odpowiedniej miary probabilistycznej na prostej – rozkładu zmiennej, w ogólnej sytuacji definiują one jedynie tzw. $*$ -rozkład – funkcjonał na przestrzeni nieprzemiennych $*$ -wielomianów, który jest podstawowym obiektem badań w analizie nieprzemiennych zmiennych losowych.

Kluczowym pojęciem w teorii prawdopodobieństwa jest niezależność zmiennych losowych. W przypadku probabilistyki nieprzemiennej istnieje kilka, istotnie różnych sposobów zdefiniowania niezależności. Najbardziej naturalnym z nich jest niezależność wolna, wprowadzona przez Voiculescu w latach 80-tych XX w. Odgrywa ona istotną rolę zarówno z punktu widzenia analizy funkcjonalnej, przykładowo dla badania podprzestrzeni niezmienniczych operatorów, jak i w klasycznej teorii prawdopodobieństwa, gdyż okazuje się, że rozkłady prawdopodobieństwa pochodzące z wolnej probabilistyki opisują wspólne zachowanie szerokiej klasy rodzin (klasycznie) niezależnych wysokowymiarowych macierzy losowych.

W związku z tym wolna probabilistyka badana jest z dwóch punktów widzenia: nieskończenie wymiarowego, związanego z analizą funkcjonalną oraz wysokowymiarowego, motywowanego przez teorię prawdopodobieństwa i pewne działy fizyki statystycznej. Te dwa podejścia uzupełniają się wzajemnie i inspirują, a wyniki uzyskane w jednym z obszarów badawczych mają konsekwencję w drugim.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że osiągnięcie naukowe dr. Kamila Szpojankowskiego wpisuje się w funkcjonalno-analityczny punkt widzenia na wolne prawdopodobieństwo, nie dotyczący bezpośrednio teorii macierzy losowych, podczas gdy moje doświadczenie badawcze związane jest z podejściem probabilistycznym, co może znaleźć odzwierciedlenie w recenzji. W szczególności chciałbym podkreślić, że mimo pewnych związków między obszarem mojej aktywności naukowej, a tematyką osiągnięcia, nigdy bezpośrednio się tą tematyką nie zajmowałem.

Wspomniana powyżej probabilistyka boolowska związana jest z innym pojęciem niezależności zmiennych losowych, wprowadzonym formalnie przez Speichera i Woroudi'ego w kontynuacji wcześniejszych prac m. in. Bożejki i Speichera. To pojęcie niezależności jest technicznie prostsze niż niezależność wolna, jednak nie ma równie naturalnych związków z teorią macierzy losowych. Również jego wpływ na teorię operatorów jest mniejszy niż w przypadku niezależności wolnej. Osobiście odnoszę wrażenie, że związana z tym rodzajem niezależności teoria czasami jest traktowana jako uproszczony

odpowiednik wolnej probabilistyki, interesujący z abstrakcyjnego punktu widzenia, ale nieposiadający równie czytelnej interpretacji i motywacji.

Osiągnięcie naukowe dr. Kamila Szpojankowskiego podważa ten pogląd, przedstawiając zastosowania metod probabilistyki boolowskiej do rozwiązania szeregu problemów pochodzących z wolnej probabilistyki. Doprecyzowując, w pracach składających się na osiągnięcie własności związane z wolną probabilistyką uzyskane są poprzez analizę kumulant boolowskich rozważanych nieprzemiennych zmiennych losowych, co okazuje się technicznie prostsze od podejścia z użyciem kumulant wolnych. Nadmienmy, że kumulanty wolne i boolowskie mogą zostać zdefiniowane podobnie do kumulant klasycznych, poprzez rekurencyjną relację wiążącą je z momentami zmiennych losowych. O ile jednak w definicji kumulant klasycznych występuje sumowanie po wszystkich podziałach uporządkowanego liniowo zbioru indeksującego rozpatrywane zmienne losowe, w definicji kumulant wolnych, odp. boolowskich, następuje ograniczenie do podziałów nieprzecinających, odp. interwałowych. Prostsza struktura rodziny podziałów interwałowych sprawia, że kumulanty boolowskie oraz wyznaczone przez nie transformaty rozkładów są łatwiejsze w analizie niż ich wolne odpowiedniki. O ile obserwacja ta była znana wcześniej, dotychczas używana była jedynie wewnątrz probabilistyki boolowskiej, prace Kandydata pokazują, że wyrażając własności zmiennych wolnych w terminach ich kumulant boolowskich, można ją efektywnie wykorzystać także na polu probabilistyki wolnej.

Przed szczegółowym omówieniem poszczególnych prac, chciałbym wyjaśnić, że wpisują się one w dość szeroki nurt analizy obiektów nieprzemiennej probabilistyki przy pomocy narzędzi kombinatorycznych, zainicjowany między innymi przez Nicę i Speichera w latach 90-tych. Jak wyjaśniono w publikacjach, część wyników można uzyskać innymi, bardziej analitycznymi metodami, związanymi m. in. z przybliżeniami macierzami losowymi i bezpośrednią analizą transformat Cauchy'ego–Stieltjesa ich miar spektralnych (jest to podejście wywodzące się ze Szkoły Charkowskiej, sięgające do prac Marczenki i Pastura z lat 60-tych). Osobiście uważam, że obie metodologie są równie ważne, metody analityczne pozwalają często uzyskać więcej ilościowej informacji w przypadku skończeniowym, z kolei metody kombinatoryczne wskazują na dodatkową elegancką strukturę badanych obiektów nieskończeniowo wymiarowych.

Przedstawię teraz najważniejsze wyniki prac wchodzących w skład osiągnięcia.

[H1]: W pracy [H1] badane są własności tzw. zmiennych o $*$ -rozkładach R -diagonalnych. Jest to ważna klasa zmiennych losowych, dla operatorów tego typu wykazano w szczególności mocne wyniki dotyczące podprzestrzeni niezmienniczych. Zdefiniowana jest poprzez szczególną postać tzw. szeregu R $*$ -rozkładu.

Podstawowym narzędziem jest rozszerzenie jednej z wersji tzw. bijekcji Bercovici-Paty z miar proba-

bilistycznych na $*$ -rozkłady. Bijekcje typu Bercovici-Paty zadają odpowiedniość między rozkładami nieskończenie podzielnymi względem różnych splotów. Wynik dotyczący ich istnienia jest jednym z klasycznych już twierdzeń wolnej probabilistyki. W przypadku pracy [H1] punktem wyjścia jest bijekcja między zbiorem wszystkich miar probabilistycznych (każda miara probabilistyczna jest nieskończenie podzielna względem splotu boolowskiego), a zbiorem miar nieskończenie podzielnych względem splotu wolnego. W omawianej pracy autorzy rozszerzają tę bijekcję, pokazując wzajemną odpowiedniość między klasą wszystkich $*$ -rozkładów pochodzących od nieprzemiennych zmiennych losowych, a klasą $*$ -rozkładów nieskończenie podzielnych względem splotu wolnego. Co ważne odpowiedniość ta przenosi tzw. szereg η argumentu na wspomniany już szereg R obrazu. Pozwala to sprowadzić charakteryzację $*$ -rozkładów R -diagonalnych nieskończenie podzielnych względem splotu wolnego do charakteryzacji ciągów liczbowych będących współczynnikami w diagonalnych szeregach η pochodzących od nieprzemiennych zmiennych losowych. Okazuje się, że rodzina $*$ -rozkładów η -diagonalnych (a zatem także rodzina R -diagonalnych $*$ -rozkładów nieskończenie podzielnych względem splotu wolnego) może być sparametryzowana przez pary miar probabilistycznych na $[0, \infty)$, o zwartym nośniku. Głównym wyzwaniem technicznym w dowodzie tego faktu jest elementarna, ale elegancka i nietrywialna konstrukcja odpowiedniego operatora η -diagonalnego oraz charakteryzacja elementów η -diagonalnych w terminach momentów.

W połączeniu z wcześniejszym analitycznym opisem η -szeregów odpowiadających miarom o zwartym nośniku w $[0, \infty)$ uzyskane charakteryzacje prowadzą do nowych własności zmiennych o $*$ -rozkładach R -diagonalnych. W szczególności udowodniono, że nieskończona podzielność względem splotu wolnego R -diagonalnej zmiennej a , przenosi się na aa^* oraz a^*a . Wykazano także, że rodzina $*$ -rozkładów R -diagonalnych, nieskończenie podzielnych względem splotu wolnego jest zamknięta ze względu na wolny splot moltiplikatywny. Wyznaczono też wzory na rozkłady aa^* oraz a^*a wyrażone w terminach addytywnego i moltiplikatywnego splotu wolnego w sytuacji gdy nieskończenie podzielna zmienna a spełnia tzw. warunek KMS, pochodzący pierwotnie z kwantowej teorii pola.

[H2]: W pracy tej wykazano charakteryzację wolnej niezależności algebr w terminach kumulant boolowskich poprzez szereg równości uwzględniających sumowanie po specjalnej podklasie etykietowanych partycji nieprzecinających. Wynik ten wymagał identyfikacji tych obiektów kombinatorycznych oraz analizy ich strukturalnych własności. Jako zastosowanie podano wzór na kumulanty łączne elementów ab i ba dla samosprzężonych zmiennych wolnych a, b , który dzięki wieloliniowości pozwala wyznaczyć kumulanty antykomutatora $ab + ba$. Dalsza analiza algebraiczna i kombinatoryczna prowadzi do równań umożliwiających wyznaczenie szeregu η dla pary ab, b^*a^* (jest to formalny szereg potęgowy czterech argumentów). W szczególnym przypadku, gdy a, b są samosprzężonymi elementami C^* algebry, o tym samym rozkładzie, odpowiednie szeregi są zbieżne w otoczeniu zera. Autorzy uzyskują stąd równania funkcyjne na η -transformatę antykomutatora, z której poprzez związki z

transformatą Cauchy’ego–Stieltjesa i wzory na odwrócenie można wyznaczyć rozkład antykomutatora. Autorzy podają więc czytelny algorytm, który może zostać użyty do znalezienia rozkładu $ab + ba$. Oczywiście zastosowanie tego algorytmu w konkretnych sytuacjach zależy istotnie od możliwości rozwiązania odpowiednich równań funkcyjnych, już w prostym przypadku zmiennych a, b z rozkładami dwupunktowymi, zilustrowanym w pracy, uzyskane wzory na transformaty i gęstość są bardzo skomplikowane. Jest to jednak nieuniknione i typowe zjawisko w wolnej probabilistyce, świadczące o trudności tej teorii. Zauważmy, że w przeciwieństwie do sytuacji klasycznej, w wolnej probabilistyce prostymi operacjami algebraicznymi zastosowanymi do zmiennych o rozkładach dyskretnych można otrzymać zmienną o rozkładzie absolutnie ciągłym.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że układ równań pozwalający na wyznaczenie transformaty Cauchy’ego–Stieltjesa dla antykomutatora został uzyskany wcześniej przez Vasilchuka przy pomocy metod macierzy losowych. Nie umniejsza to moim zdaniem osiągnięcia z pracy [H2]. Jak wspomniałem wcześniej, punkt widzenia kombinatoryczny i nieskończenie wymiarowy oraz związany z asymptotycznym zachowaniem wysokowymiarowych macierzy losowych wzajemnie się uzupełniają. Podejście Vasilchuka ma tę zaletę, że pozwala rozważać miary o nośniku nieskończonym, przy założeniu skończoności momentów niskiego rzędu, z kolei analiza z pracy [H6] ujawnia kombinatoryczno-algebraiczną strukturę stojącą za granicznymi obiektami. Dodatkowo, podejście przez kumulanty, jako bardziej przejrzyste, wydaje się też łatwiejsze do zaadaptowania przy analizie pokrewnych problemów.

Alternatywą dla użycia kumulant do wyznaczenia rozkładu antykomutatora jest bardzo ogólna metoda linearyzacji, rozwijana w ostatnich latach w kontekście wolnej probabilistyki głównie przez Speichera i współautorów, która pozwala wyznaczyć równania na rozkłady dla ogólnych wielomianów, a nawet funkcji wymiernych od wolnych zmiennych losowych, a poprzez hermityzację, także na tzw. miarę Browna. W pracy [4] (numeracja zgodnie z Autoreferatem) przedstawione są numeryczne obliczenia dla antykomutatora wolnych zmiennych o wolnych rozkładach gaussowskim i Poissona. Interesującym byłoby porównanie obu metod w przypadku, gdy odpowiednie równania mogą zostać rozwiązane w sposób jawny. Podobnie jak w przypadku porównania z pracą Vasilchuka, należy zwrócić uwagę na dodatkową informację kombinatoryczną i algebraiczną, którą niesie podejście z pracy [H2].

[H3]: W artykule [H3] badane zmienne losowe są elementami algebry von Neumanna spełniającej dodatkowe, dość standardowe założenia. Umożliwia to rozpatrywanie warunkowych wartości oczekiwanych względem podalgebr i wykorzystanie ich do obliczeń rozkładów zmiennych losowych. Podany zostaje algorytm na znajdowanie rozkładu zmiennej $a + f(a)bf^*(a)$, gdzie a, b są samosprzężonymi zmiennymi wolnymi, zaś f funkcją borelowską, ograniczoną na widmie a . Podobnie jak w pracy [H2]

autorzy wspominają o metodach związanych z linearyzacją, które mogłyby potencjalnie stanowić alternatywne podejście, przynajmniej dla wielomianowych funkcji f . Zwracają jednak uwagę, że metoda ta prowadzi do dużo bardziej złożonych równań, przekraczających możliwości dostępnych obecnie systemów algebry symbolicznej. Ponadto, poza trywialnymi przypadkami, nie są znane przykłady, w których metody te zostałyby użyte do wyprowadzenia jawnych wzorów. Z kolei metoda zaproponowana przez autorów jest zilustrowana wysoce nietrywialnym z punktu widzenia obliczeń przykładem dotyczącym rozkładu zmiennej $a + aba$ dla zmiennych wolnych a, b o rozkładzie Wignera. Autorzy znajdują równanie algebraiczne stopnia 11, spełnione przez transformatę Cauchy’ego–Stieltjesa rozkładu, dzięki czemu mogą znaleźć równanie na gęstość stopnia 110 (sic!). Same szczegóły obliczeniowe bazują na klasycznych metodach geometrii algebraicznej i z uwagi na trudność zagadnienia są wspomagane komputerowo. Z punktu widzenia oceny osiągnięcia naukowego, mimo imponującej złożoności, nie stanowią jednak głównego aspektu pracy, który zawarty jest we wprowadzonych narzędziach i wynikach abstrakcyjnych. Te są kolejnym przykładem na efektywne zastosowanie kumulant boolowskich, tym razem do wyznaczenia warunkowych wartości oczekiwanych pewnych szczególnych wielomianów oraz warunkowych transformat rozpatrywanych zmiennych losowych.

Całość bazuje na eleganckim wzorze na wartość oczekiwaną alternującego iloczynu zmiennych pochodzących z dwóch podalgebr niezależnych w sensie wolnym. Wyrażony jest on w terminach momentów łącznych zmiennych pochodzących z jednej tylko podalgebry oraz łącznych kumulant boolowskich zmiennych z obu algebr. Co ważne, postać tego wzoru pozwala na użycie go do znalezienia warunkowej wartości oczekiwanej iloczynu względem pierwszej z algebr. Autorzy przedstawiają dwa, dość elementarne dowody rozważanego wzoru. Jak już wspominałem, nie zajmuję się bezpośrednio wolną probabilistyką, niemniej uważam, że brak tego wzoru we wcześniejszej literaturze jest dość zaskakujący. Jest to przykład wyniku, którego wartość leży nie tyle w trudności technicznej, co w odpowiednim, świeżym spojrzeniu na rozpatrywane zagadnienie, najwyraźniej tendencja do rozpatrywania probabilistyki wolnej i boolowskiej jako „odrębnych światów” nie pozwalała na wcześniejsze dostrzeżenie tego podstawowego faktu.

Poprzez elementarne metody algebraiczne wzór na warunkową wartość oczekiwaną w terminach kumulant boolowskich prowadzi do twierdzeń dotyczących tzw. funkcji subordynacji dla warunkowych wartości oczekiwanych rezolwent zmiennych postaci $a + b$, $a^{1/2}ba^{1/2}$ oraz $a + f(a)bf(a)$, gdzie a, b to wolne elementy samosprężone (w przypadku drugim – nieujemne). Umożliwiają one wyeliminowanie z rozważań jednej ze zmiennych i sprowadzenie obliczeń do wyznaczania pewnej transformaty rozkładu drugiej zmiennej przy odpowiednio zmienionym argumentie. Zmiana argumentu opisana jest przez funkcję subordynacji, która może zostać wyznaczona z pewnych równań punktu stałego. Dwa pierwsze wzory były wyprowadzone w klasycznej pracy Biane’a z roku 1998. Zaletą nowego podejścia jest interpretacja funkcji subordynacji w terminach kumulant boolowskich, w oryginalnym podejściu

w ich miejsce pojawiały się skomplikowane wyrażenia kombinatoryczne, bez klarownej interpretacji. Oczywiście najważniejszym wkładem autorów jest analiza trzeciego przypadku, prowadząca do dowodu poprawności wspomnianego wcześniej algorytmu.

Podobnie jak w przypadku pracy [H2], zaproponowany algorytm został również wyprowadzony w kontekście macierzy losowych (ponownie przez Vasilchuka). Podejście to działa dla f ciągłych, co jest związane z faktem, że miary spektralne skończeniowymiarowych macierzy losowych przybliżają rozkłady odpowiednich nieprzemiennych zmiennych losowych jedynie w sensie słabej zbieżności. Wydaje się, że w połączeniu z założeniami dot. algebry von Neumanna w pracy [H3] powinno być możliwe rozszerzenie z funkcji ciągłych na dowolne borelowskie poprzez odpowiednie aproksymacje. Nie jest to jednak szczególnie istotne z punktu widzenia zastosowań, skoro już dla funkcji identycznościowej analizowanej w pracy, znalezienie równań na transformatę Stieltjesa jest zadaniem niezwykle uciążliwym. Niezależnie, należy ponownie podkreślić, że podejście kombinatoryczne daje dodatkowe korzyści, zwłaszcza w postaci wspomnianych wzorów na momenty alternujących iloczynów czy warunkowe wartości oczekiwane.

[H4]: Ostatni z artykułów wchodzących w osiągnięcie naukowe nawiązuje do pracy doktorskiej Habilitanta i dotyczy twierdzeń charakteryzacyjnych dla rozkładów zmiennych losowych w wolnej probabilistyce – nurtu badań który w ostatnich latach jest intensywnie rozwijany w szczególności w grupie prof. Jacka Wesołowskiego. Ideą przewodnią jest poszukiwanie odpowiedników w wolnej probabilistyce klasycznych twierdzeń charakteryzujących znane rozkłady prawdopodobieństwa w terminach niezależności zmiennych losowych. Spójność pracy [H4] z pozostałymi elementami osiągnięcia wynika z faktu, że użyte metody są rozwinięciem idei z pracy [H3]. Jest to dość naturalne, gdyż rozważany problem charakteryzacyjny, twierdzenia typu Lukacsa, wyrażony jest w terminach warunkowych wartości oczekiwanych (podobnie jak w [H3] rozważane zmienne losowe są elementami algebry von Neumanna). Autorzy przedstawiają dwa wyniki charakteryzujące zmienne wolne u, v o rozkładzie wolnym Poissona (Marczenki–Pastura) i wolnym dwumianowym. Krokiem technicznym w dowodzie jest wyliczenie pewnej warunkowej wartości oczekiwanej w terminach szeregów potęgowych o współczynnikach wyznaczonych przez kumulanty boolowskie.

Ocena osiągnięcia naukowego

Moja ocena osiągnięcia naukowego dr. Kamila Szpojankowskiego jest wysoka. Każdy z artykułów zawiera szereg nietrywialnych i interesujących wyników o dużym stopniu zaawansowania. Świadczą one o szerokich horyzontach Habilitanta i dużej biegłości rachunkowej (wiele z obliczeń, nawet tych elementarnych, wykazuje bardzo wysoką złożoność). Używane metody na poziomie technicznym są oparte głównie o algebrę i kombinatorykę, miejscami wymagają też użycia metod analitycznych.

Poszczególne artykuły różnią się nieco charakterem. Prace [H1]–[H3] prowadzą do głównych wyników poprzez wiele stosunkowo elementarnych (choć miejscami technicznych) kroków. Podstawowym osiągnięciem wydaje mi się w nich nowe spojrzenie na szersze obszary teorii i zaproponowanie ogólnego planu postępowania z właściwym powiązaniem odpowiednich prostszych faktów. Z tego względu prace te są, mimo skomplikowanych sformułowań, dość przystępne w odbiorze, czytelny plan dowodu pozwala na zrozumienie głównych wyników „od ogółu do szczegółu”.

Z kolei praca [H4], podobnie jak wiele innych wyników dotyczących twierdzeń charakteryzacyjnych, także w klasycznej probabilistyce, bazuje na technicznych spostrzeżeniach natury obliczeniowej, dotyczących odpowiednich transformat rozważanych zmiennych losowych. Dla osoby z zewnątrz, przynajmniej przy pierwszej lekturze, wydają się one bardzo nieintuicyjne. Nie wyobrażam sobie, by można było przeprowadzić zawarte w tej pracy rozumowania bez dużego doświadczenia i głębokiego zrozumienia innych twierdzeń charakteryzacyjnych, zarówno klasycznych, jak i nieprzemiennych. Wskazują one na dużą sprawność techniczną Habilitanta.

Osiągnięcie dr. Kamila Szpojankowskiego uważam za cenne na przynajmniej dwóch poziomach. Z jednej strony mamy poszczególne nowe wyniki, które w mojej opinii są interesujące same w sobie, z drugiej główną nową ideę, dotyczącą użycia kumulant boolowskich w wolnej probabilistyce. Nie wykluczam, że z perspektywy czasu to właśnie to ogólne podejście będzie postrzegane jako najważniejszy wkład w dziedzinę, ponieważ można spodziewać się, że znajdzie ono dalsze zastosowania i będzie wygodną alternatywą dla znanych obecnie metod (jak wskazano wyżej część wyników uzyskanych w osiągnięciu można odtworzyć innymi metodami, które bywają jednak bardziej złożone technicznie). Moim zdaniem bardzo pozytywnie świadczy to o osiągnięciu naukowym Habilitanta, osobiście niezbyt często miałem do czynienia z wnioskami habilitacyjnymi, w których oprócz poszczególnych technicznych wyników można znaleźć wartościową ideę przewodnią, którą da się wyrazić jednym zdaniem.

Nie mam wątpliwości, że osiągnięcie naukowe dr. Kamila Szpojankowskiego stanowi istotny wkład w rozwój nauk matematycznych i spełnia przesłanki Art. 219. ust. 1 pkt 2. ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce.

Ocena aktywności naukowej

Oprócz trzech publikacji przed uzyskaniem stopnia doktora i czterech wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, dr Kamil Szpojankowski jest autorem sześciu artykułów (na dzień złożenia wniosku). Dwa z nich są jednoautorskie. Wszystkie opublikowane są w uznanych, choć nie zawsze wiodących czasopismach matematycznych. Tematyka wszystkich prac dotyczy nieprzemiennej probabilistyki, większości – twierdzeń charakteryzacyjnych. Być może wskazane byłoby wyjście poza ten obszar

badawczy, związany jeszcze z rozprawą doktorską Habilitanta, niemniej niezależnie od tej uwagi, aktywność publikacyjną i jakość uzyskanych wyników uważam za dobrą (warto zaznaczyć, że nieopublikowane jeszcze preprinty Habilitanta wychodzą poza wspomniany powyżej obszar, w większym stopniu wiążąc się z teorią macierzy losowych). Działalność naukowa Habilitanta została doceniona na Politechnice Warszawskiej, otrzymywał on wielokrotnie indywidualne nagrody JM Rektora.

Habilitant wygłosił kilka odczytów konferencyjnych i seminaryjnych, w tym zagranicznych. Był wykonawcą w dwóch projektach NCN OPUS i jednym projekcie zagranicznym (Austria) oraz kierownikiem projektu NCN Sonata i projektu NCBiR. Bez wątpienia ten aspekt działalności naukowej Habilitanta należy ocenić wysoko.

Dr Kamil Szpojankowski udzielał się także jako ekspert w panelu NCN oraz w Komisjach Rady Wydziału MiNI.

Oprócz wspomnianego rocznego stażu podoktorskiego na University of Waterloo, dr Kamil Szpojankowski brał udział w kilku krótkoterminowych wyjazdach badawczych do różnych jednostek naukowych w Austrii, Francji, Kanadzie i Stanach Zjednoczonych, co pozwala mi jednoznacznie stwierdzić, że wykazuje się on istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej, a zatem spełnia przesłanki Art. 119 ust. 1, pkt 3 ustawy Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce.

Ocena osiągnięć dydaktycznych, organizacyjnych i popularyzujących naukę

W ramach działalności dydaktycznej na Politechnice Warszawskiej Habilitant prowadził wykłady z przetwarzania danych w systemie SAS na Wydziale MiNI oraz ćwiczenia i laboratoria z wielu przedmiotów matematycznych, na różnych wydziałach uczelni. Podczas pobytu na University of Waterloo prowadził dwa wykłady z algebry liniowej. Na docenienie zasługuje liczba prac dyplomowych prowadzonych przez Habilitanta, są to dwie prace magisterskie i 5 licencjackich. Moim zdaniem pod tym względem dorobek Kandydata jest ponadprzeciętny i wskazuje na istotne zaangażowanie w proces dydaktyczny.

W ramach działalności organizacyjnej dr Kamil Szpojankowski koordynuje zespół pracujący nad nową specjalizacją na studiach drugiego stopnia na Wydziale MiNI oraz jest członkiem komitetu organizacyjnego konferencji *Independence and Conditional Aspects of Probability*.

W autoreferacie nie znalazłem informacji o działalności popularyzatorskiej, jednak w ostatnich latach, z uwagi na pandemię bywa ona, podobnie jak organizacje konferencji, utrudniona. Ponadto nie znajduję w obowiązujących aktach prawnych wymogu dotyczącego tej formy działalności, nie uważam też, by była kluczowa dla oceny osiągnięć Habilitanta.

Całokształt osiągnięć Kandydata oceniam zatem pozytywnie.

Podsumowanie

Biorąc pod uwagę przedstawioną powyżej ocenę osiągnięcia naukowego dr. Kamila Szpojankowskiego oraz pozostałych aspektów jego dorobku z pełnym przekonaniem stwierdzam, że spełnia on ustawowe i zwyczajowe wymagania związane z nadaniem stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka. W szczególności spełnione są wymagania określone w art. 219 ust. 1 pkt 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce. W związku z tym popieram wniosek o nadanie dr. Kamilowi Szpojankowskiemu stopnia doktora habilitowanego.

