

Prof. dr hab. Adam Jakubowski
Uniwersytet Mikołaja Kopernika
Wydział Matematyki i Informatyki
Katedra Teorii Prawdopodobieństwa i Analizy Stochastycznej

Toruń, 21 lutego 2022 r.

RECENZJA ROZPRAWY HABILITACYJNEJ „ASYMPTOTYKA OGONÓW
ROZWIĄZAŃ STOCHASTYCZNYCH RÓWNAŃ PUNKTU STAŁEGO” ORAZ OCENA
DOROBKU NAUKOWEGO DOKTORA BARTOSZA KOŁODZIEJKA

1. Recenzja rozprawy habilitacyjnej

Jako rozprawę habilitacyjną (zwaną w ustawie *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce* „osiągnięciem naukowym”) dr Bartosz Kołodziejek przedstawił następujący cykl pięciu prac, opublikowanych w bardzo dobrych i dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym:

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.*, **27(2)** (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.*, **50** (4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.*, **23** (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten’s and Grincevičius–Grey’s assumptions, *Stochastic Process. Appl.*, **130** (3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli*, **25** (4B) (2019), 3939–3977.

Punkt 4.4 *Autoreferatu* zawiera bardzo precyzyjny opisu wkładu habilitanta do prac współautorskich [H3]–[H5], z którego wynika istotny udział habilitanta w powstaniu koncepcji i wykonaniu każdej z tych prac. Co więcej, już pobieżna analiza przedstawionych prac pokazuje, że stanowią one cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych. Pozwala to stwierdzić, że formalne wymagania stawiane rozprawie habilitacyjnej są spełnione.

Stochastyczne równania punktu stałego, rozważane w rozprawie habilitacyjnej, występują w wielu zagadnieniach, ze swadą opisanych m.in. w książce autorstwa D. Buraczewskiego, E. Damek i T. Mikoscha (pozycja [12] w spisie literatury

podanym w autoreferacie). Dla prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej najważniejsze są jednak dwa fakty:

- Jeśli rozwiązanie istnieje, to jego rozkład jest identyfikowany z rozkładem pewnego zbieżnego prawie wszędzie szeregu zmiennych losowych, który z kolei posiada związki z obliczaniem wartości renty wieczystej (perpetuity), pojęciem znanym od dawna w praktyce gospodarczej.
- Przy pewnych ogólnych założeniach, ogony dystrybuant rozwiązań mają asymptotykę postaci $x^{-\alpha}$, dla pewnego $\alpha > 0$, a więc są *ciężkie* (w porównaniu np. do rozkładu normalnego lub wykładniczego).

Niech (A_j, B_j) , $j = 1, 2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych wektorów losowych o jednakowych rozkładach na R^2 , przy czym $A_j \geq 0, B_j \geq 0$. Przypuśćmy, że szereg (perpetuity)

$$U_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \quad (1)$$

jest prawie na pewno zbieżny. Rozkład U_∞ jest rozwiązaniem równania (punktem stałym losowej transformacji)

$$U =_{\mathcal{D}} AU + B, \quad (2)$$

gdzie U i (A, B) są kopiami odpowiednio U_∞ i (A_1, B_1) , oraz U i (A, B) są niezależne. Piękną teorię rozwiązań równania (2) oraz własności rozkładu zmiennej losowej U_∞ zawiera książka P. Embrechts, C. Klüppelberg i T. Mikosch, *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer 1997, która nie została wymieniona w spisie literatury, a której wpływ (i przyczyna wielkiego sukcesu wydawniczego) wykracza znacznie poza środowisko akademickie.

Jeśli $P(B = b) = 1$ dla pewnego $b > 0$ oraz $P(A \in [0, 1]) = 1$, przy czym rozkład A nie jest skupiony na żadnym odcinku $[0, 1 - \delta)$, $\delta > 0$, to suma szeregu będzie nieograniczoną zmienną losową i obliczanie asymptotyki ogona ma sens. Punktem wyjścia jest tutaj praca Goldie i Grübera [28], którzy pokazali że ogony muszą być *lekkie*. W pracy [H1] habilitant podał *dokładną* asymptotykę logarytmu prawdopodobieństw ogonowych w terminach funkcji opisującej sposób, w jaki dystrybuanta czynnika A zbliża się z lewej strony do swej wartości w punkcie 1. Jest to bez wątpienia poważne osiągnięcie, ulepszające w istotny sposób wyniki Hitczenki i Wesołowskiego i opublikowane w bardzo dobrym czasopiśmie.

W pracy [H2] dr Kołodziejek rozważa ogólniejszą sytuację, gdy B nie jest już stałą (choć pozostaje ograniczone). Rozwijając techniki oszacowań górnych (w duchu metody Chernoffa - Lemat 6.2 z [H2]) i dolnych podaje pełen opis asymptotyki logarytmów prawdopodobieństw ogonowych, gdy A i B są niezależne oraz oszacowania dla granic górnych i dolnych w przypadku ujemnej bądź dodatniej kwadrantowej zależności między A i B . Zważywszy na różnorodność stosowanych

technik, są to osiągnięcia robiące wrażenie, w dodatku opublikowane w czasopiśmie o pięknych tradycjach probabilistycznych.

Należy podkreślić, że szacowanie ogona rozkładu szeregu zmiennych losowych nie jest zadaniem prostym i w swej niestabilności jest podobne do symulacji rozkładu takiego szeregu. Trudności znacznie się potęgują w przypadku ciężkich ogonów. Jako ilustrację można tutaj przytoczyć oryginalny dowód podstawowego wyniku Kestena [41], który w nawet w jednowymiarowym przypadku społeczność probabilistyczna w pełni przyswoiła dopiero w pracy Goldiego [27] z 1991 roku, zawierającej syntezę pomysłów m.in. Grincevičiusa i Letaca. Dlatego każdy wynik o regularności ogonów, przy założeniach słabszych niż klasyczne, jest uważany za godny uwagi. Takie są wyniki zawarte w pracach [H3] i [H4].

Klasyczne założenia prowadzące do ciężkich ogonów to istnienie $\kappa > 0$ o własnościach $EA^\kappa = 1$, $E(A^\kappa \log A) < +\infty$ i $E|B|^\kappa < +\infty$, oraz niearytmetyczność rozkładu warunkowego $P(A \in (\cdot) | A > 0)$. Istnieje szereg rezultatów pokazujących, że w ogólności ogony nie muszą się zachowywać jak $x^{-\alpha}$ i to na różne sposoby. Osobiście cenię tutaj szczególnie prace Keveia [43] i [44]. Wyniki Damek i Kołodziejka idą w innym kierunku - gdy na asymptotykę ogonów znaczący jest wpływ rozkładu składnika B . Np. w Twierdzeniu 1.1. z [H4] zakłada się, że co prawda $EB_+^\kappa = +\infty$, ale $P(B > x)$ zmienia się $(-\kappa)$ -regularnie oraz $EA^\eta B_+^{\kappa-\eta} < +\infty$ dla pewnego $0 < \eta < \kappa$, $\eta \leq 1$. Badana jest również asymptotyka „drugiego rzędu”, ale te wyniki są już bardzo techniczne.

Praca [H5] przynosi wyniki jeszcze innego rodzaju. Przy założeniu, że rozkład X ma nośnik jednostronnie ograniczony, badana jest asymptotyka logarytmu ogona dystrybuanty zmiennej X przy argumentie zmierzającym do końca (lewego lub prawego) tej dystrybuanty. Pojawia się tutaj nowe (dla mnie) pojęcie nieujemnej zmiennej losowej Y posiadającej „Inverse Exponential Decay” w punkcie $x = 0$. Według definicji z pracy [H5] oznacza to, że dla pewnych stałych $\lambda \geq 0$ i $\rho > 0$ oraz pewnej funkcji $L(x)$ wolno zmieniającej się w $x = 0+$ zachodzi

$$P(Y < y) = \exp\left(-\frac{\lambda + o(1)}{x^\rho L(x)}\right), \quad x \rightarrow 0+.$$

Mówimy wtedy, że Y jest $IED_L^\rho(\lambda)$. Osobiście widzę tu raczej nieco więcej (gdy $\lambda = 0$) niż „logarytmiczną regularną zmienność” w $x = 0+$, jako że własność ta jest równoważna z

$$-\log P(Y < x)x^\rho L(x) \rightarrow \lambda.$$

Jak pokazano w pracy [H5] asymptotyka typu $IED_L^\rho(\lambda)$ jest dziedziczona przez splot (przy zachowaniu tych samych ρ i L). Fakt ten pozwala badać nie tylko punkty stałe stochastycznych równań afinicznych, ale również procesy ARMA. Typowe twierdzenie 7.6 w [H5] mówi, że jeśli A i B są dodatnio kwadrantowo zależne, B jest $IED_L^\rho(\lambda)$ i spełnione są pewne minimalne warunki całkowalności, to X też jest $IED_L^\rho(\Lambda)$, z parametrem Λ będącym nieoczywistą funkcją parametrów rozkładów A i B .

Według wiedzy autorów (i mojej) niektóre wyniki z pracy [H5] są pionierskie i wydaje się, że będą miały interesującą kontynuację.

Biorąc pod uwagę uzyskane rezultaty, różnorodność stosowanych metod oraz poziom techniczny rozprawy stwierdzam, że cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych [H1]–[H5] dra Bartosza Kołodziejka stanowi znaczny wkład w rozwój nauk matematycznych, a więc spełnia merytoryczny wymóg zawarty w Art. 219 ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*.

2. Ocena dorobku naukowego habilitanta

Dorobek naukowy dra Bartosza Kołodziejka obejmuje łącznie 17 opublikowanych prac, z tego 5 przed uzyskaniem stopnia doktora i 5 wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej. Wszystkie czasopisma, w których publikował kandydat, mają zasięg międzynarodowy, choć nie wszystkie są z najwyższej półki. Nie widzę w tym nic złego: publikacja w *Statistics and Probability Letters* niewielkiej objętościowo pracy, zawierającej dobrze określony rezultat, to właściwy sposób jej upowszechnienia. Liczbowo dorobek wygląda więc solidnie.

Jeszcze lepiej dorobek naukowy dra Bartosza Kołodziejka wygląda, jeśli przyjąć się zakresowi prowadzonych badań. Poza tematyką rozprawy habilitacyjnej można tutaj wyróżnić 4 tematyki. Są to, według sformułowań zaczerpniętych z *Autoreferatu*:

1. Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych.
2. Równania funkcyjne na stożkach symetrycznych.
3. Naturalne rodziny wykładnicze oraz rozkład Wisharta na stożkach jednorodnych.
4. Teoria odnowy.

Pierwsza tematyka uprawiana była zarówno przed doktoratem, jaki i po, i wyrasta w prostej linii z upodobań promotora doktoratu. Jest trudna, hermetyczna i wymaga, podobnie jak tematyka habilitacji, pomysłowości i konsekwencji w obliczeniach. Z drugiej strony twierdzenia charakterystyczne mają bardzo długą tradycję i uzyskanie w tej dziedzinie nowych rezultatów, które spodobały się Olkinowi, jest sporym osiągnięciem. Druga tematyka stanowi naturalne uzupełnienie pierwszej i stanowiła przedmiot badań przed doktoratem.

Czwartej tematyki dotyczy tylko jedna praca, ale wynik w jej ramach uzyskany jest oryginalny i dotyczy opisu asymptotyki *lewego* ogona miary odnowy za pomocą asymptotyki *prawego* ogona innej miary odnowy.

Najbardziej interesująca jest tutaj tematyka trzecia, będąca pokłosiem nawiązanych kontaktów międzynarodowych i odzwierciedlająca, jak się wydaje, ewolucję zainteresowań habilitanta w kierunku zagadnień związanych z zaawansowaną statystyką.

Również inne aspekty dorobku naukowego dra Bartosza Kołodziejka wyglądają korzystnie. Kandydat posiada doświadczenie zagraniczne, odwiedzał m.in. Nagoya University (Japonia), York University (Toronto, Kanada), Université d'Angers (Francja) czy Instytut Weierstrassa w Berlinie (Niemcy). W latach 2013-2021 uczestniczył w ogółem 16 konferencjach naukowych, wygłaszając na trzech z nich wykłady zaproszone. Obecnie współorganizuje konferencję międzynarodową, które ma się odbyć latem 2022 roku w Będlewie, a z powodu pandemii była dwukrotnie przekładana.

Dr Bartosz Kołodziejek był kierownikiem grantu NCN Sonata 2016-18, a także wykonawcą w 4 grantach NCN i NCBiR.

Moim zdaniem, w osobie dra Bartosza Kołodziejka mamy do czynienia z dojrzałym matematykiem, o bogatym doświadczeniu i znaczących osiągnięciach.

3. Konkluzja

Powyżej wysoko oceniłem rozprawę habilitacyjną doktora Bartosza Kołodziejka stwierdzając, że stanowi ona wartościowy wkład w rozwój nauk matematycznych i że spełnia ona wymagania ustawy *Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce*. Pozytywnie oceniłem również całość dorobku naukowego doktora Kołodziejka.

Dlatego **wnoszę o przyjęcie rozprawy habilitacyjnej i dopuszczenie doktora Bartosza Kołodziejka do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.**

Prof. dr hab. Szymon Peszat,
WMiI UJ

Kraków 19 stycznia 2022 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dra Bartosza Kołodziejka

Ocena osiągnięcia naukowego

W skład osiągnięcia wchodzi 5 prac. Wszystkie prace zostały opublikowane w renomowanych czasopismach probabilistycznych, takich jak *Ann. Appl. Probab.*, *Stochastic Process. Appl.*, *Bernoulli*. Są dwie prace samodzielne i trzy prace wspólne (z bardzo dobrymi matematykami). Tematyka prac jest jednolita. Pierwsze wrażenie jest zdecydowanie korzystne. Habilitacja, oparta na pięciu pracach opublikowanych w renomowanych, specjalistycznych czasopismach nie powinna budzić żadnych kontrowersji. Uprzedzając fakty, mogę stwierdzić, że po przestudiowaniu dostarczonych mi materiałów nie zmieniłem zdania.

W pracach rozważa się własności rozwiązań tzw. stochastycznych równań punktu stałego $X = \Psi(X)$, gdzie X i Ψ są niezależne. Przykładem jest problem afiniczny: dla zadanych rozkładów niezależnych zmiennych A i B , znaleźć niezależną od A i B zmienną losową X , którego rozkładem jest $AX + B$. Pytanie, na które odpowiada habilitant to, czy istnieje rozwiązanie i jeśli istnieje to jakie ma własności. Recenzent powinien rozstrzygnąć czy problem jest trudny i wart rozważania (mający dobrą motywację). Wydaje mi się, że istnienie nie jest takie skomplikowane i wymaga badania nieskończonych spłotów. Wydedukowanie z tego własności to jednak bardzo trudna sprawa (patrz słynny nierozwiązany problem Erdősa nieskończonego spłotu). Jak w swoim autoreferacie podkreślił habilitant w 2003 r. R. Engle został uhonorowany nagrodą Nobla z ekonomii, za wyniki związane z modelami opisanymi afinicznymi równaniami punktu stałego. Więc tematyka osiągnięcia na pewno jest dobrze umotywowana. Ma związek z matematyką ubezpieczeń.

Wiele wiadomo o problemie afinicznym (monografie D. Buraczewski, E. Damek, T. Mikosch, Springer 2016, A. Iksanov, Birkhäuser/Springer 2016), np. problem ciągłości i singularności rozkładów, centralne twierdzenia graniczne. Habilitant bada zachowanie się ogonów $\mathbb{P}(X > x)$ rozwiązania gdy $x \rightarrow +\infty$. W przedstawionych pracach otrzymano dokładne asymptotyki ogonów. Korzysta się z ciekawych faktów analizy wypukłej, teorii funkcji wolnozmiennających. Uważam, że habilitant dysponuje bardzo dobrym warsztatem analitycznym. Dowody twierdzeń są zaawansowane i trudne.

Tematyka prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego jest przedstawiona w sposób bardzo przystępny i szczegółowy w autoreferacie.

W podsumowaniu, nie mam wątpliwości, że wyniki doktora Kołodziejka wchodzące w skład osiągnięcia naukowego są istotne, wartościowe i spełniają wszelkie kryteria pracy habilitacyjnej.

Ocena dorobku nie wchodzącego w zakres osiągnięcia naukowego

Pan doktor Kołodziejek jest autorem lub współautorem jeszcze 12 prac opublikowanych. Prawie wszystkie prace zostały opublikowane w bardzo dobrych i renomowanych czasopismach matematycznych, w tym: dwie prace J. Teoret. Prob. jedna w J. Multivariate Anal. oraz jedna w Studia Math. Ponieważ pierwsze prace dra Kołodziejka zostały opublikowane niedawno, w 2015 roku, nie należy się spodziewać ich dużej cytowalności. Uważam, że ogólna liczba 46 cytowań w bazie MathSciNet jest co najmniej przyzwoita (mieści się w średniej dla matematyków uzyskujących habilitację) i dobrze rokuje na przyszłość. Pan doktor Kołodziejek współpracuje z bardzo dobrymi matematykami. Co więcej wydaje się, że stopniowo poszerza krąg swoich współpracowników.

Problematyka prac doktora Kołodziejka, nie wchodzących w zakres osiągnięcia naukowego, jest dość podobna do problematyki z prac wchodzących w skład dorobku. Niemniej jednak nie jest ona w sposób negatywny ograniczona.

Osiągnięcia naukowo-badawcze habilitanta - Wnioski

Uważam, że Pan dr Kołodziejek przez ostatnie dziesięć lat pracował bardzo intensywnie i owocnie. Wszystkie jego publikacje reprezentują wysoki poziom naukowy. Są publikowane w bardzo porządnym czasopiśmie. Tematyka badań jest istotna i dostatecznie szeroka a wyniki oryginalne i trudne. Dorobek naukowy doktora Kołodziejka uważam za wystarczający na tytuł doktora habilitowanego.

Granty i współpraca międzynarodowa habilitanta

Pan doktor Kołodziejek odbył około dziesięciu krótkoterminowych (do 2 tygodni) wizyt naukowych w dobrych ośrodkach matematycznych Nagaya, Toronto, Wrocław, Angers. Współpraca z Prof. Ishi (Nagaya) oraz Prof. Graczykiem (Angers) mają już charakter współpracy stałej. Obiecująca jest współpraca z Prof. Graczykiem i Prof. M. Bogdan (wydaje mi się, że będą zajmować się całkowicie nową tematyką).

Dorobek dydaktyczny

Pan doktor Kołodziejek wykłada rachunek prawdopodobieństwa, matematykę finansową i aktuariarną na WMiI Politechniki Warszawskiej. Prowadzi ćwiczenia. Był opiekunem trzech prac magisterskich i 2 prac licencjackich.

Ostateczna konkluzja

Uważam, że dorobek naukowy i dydaktyczny oraz przedstawione osiągnięcia naukowe za wystarczające do nadania doktorowi Kołodziejekowi stopnia doktora habilitowanego.

Prof. dr hab. Szymon Peszat

Recenzja
rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
doktora Bartosza Kołodziejka

Dr Bartosz Kołodziejek jest absolwentem Politechniki Warszawskiej. Dyplom magistra matematyki uzyskał na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej w roku 2010. Stopień doktora nauk matematycznych został mu nadany przez wspomniany wyżej wydział w roku 2014. Jego rozprawa doktorska nosiła tytuł "*Niezależnościowe charakteryzacje rozkładu prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych*". Promotorem zarówno jego pracy magisterskiej, jak też i rozprawy doktorskiej był prof. dr hab. inż. Jacek Wesołowski. Habilitant uzyskał w roku 2009 także tytuł zawodowy magistra nauk fizycznych, na Wydziale Fizyki Technicznej Politechniki Warszawskiej.

A. Krótkie omówienie i ocena osiągnięcia naukowego

Głównym przedmiotem badań habilitanta są własności rozkładów rozwiązań równania $X \stackrel{d}{=} \Psi(X)$ (tzw. stochastyczny punkt stały), gdzie $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją losową, zaś X jest zmienną losową niezależną od Ψ . Typowym przykładem losowej funkcji jest odwzorowanie afiniczne dane wzorem $\Psi(x) = Ax + B$, gdzie A, B są zadanymi zmiennymi losowymi. Problemem badanym przez habilitanta są własności prawego ogona dystrybuanty rozwiązania X , czyli funkcji $x \mapsto P(X > x)$. W ogólnym przypadku funkcja ta nie jest zadana w sposób jawny.

W samodzielnej pracy [H1], opublikowanej w bardzo prestiżowym czasopiśmie *The Annals of Applied Probability*, rozważany jest przypadek gdy zmienna losowa B jest deterministyczna, t.j. $B = b$, p.n. dla pewnej liczby $b \in \mathbb{R}$, zaś A spełnia $0 \leq A < 1$, p.n. oraz

$$f(x) := x \log \mathbb{P}[A > 1 - 1/x], \quad x \geq 1,$$

jest funkcją regularnie, lub szybko zmieniającą się, patrz definicja w Sekcji 4.3.3 autoreferatu. Główny wynik pracy podaje dokładną asymptotykę $x \mapsto -\log P(X > x)$, dla $x \rightarrow +\infty$, w terminach $f(x/b)$. Wyniki tej pracy uzyskane są przy pomocy metody stanowiącej rozwinięcie podejścia użytego wcześniej w pracach [28,36] przez C. M. Goldie and R. Grübela oraz P. Hitczenko i J. Wesołowskiego.

W pracy [H2] (także samodzielnej, opublikowanej w *Advances in Applied Probability*) habilitant rozważał nieco ogólniejszą sytuację, gdzie zmienna losowa B może nie być deterministyczna oraz zmienne A i B mogą być zależne. Wówczas, asymptotyka ogona X zależy nie tylko od brzegowych rozkładów A i B , ale również od struktury zależnościowej wektora (A, B) . W przypadku gdy składowe wektora są niezależne, dokładna charakteryzacja $x \mapsto -\log P(X > x)$ jest podana w przypadku gdy zmienna $A \in [0, 1)$ oraz indeks regularności r jest skończony i większy od 1, patrz Twierdzenie 2 w autoreferacie. Ważną rolę w sformułowaniu powyższej asymptotyki pełni funkcja

h zdefiniowana przez habilitanta wzorem (25). W pracy [H2] (patrz sekcja 4) habilitant podaje heurystykę pozwalającą na sformułowanie hipotezy, iż funkcja ta może służyć do opisu asymptotyki także w przypadku zależnych zmiennych A, B . W tej sytuacji możliwe jest uzyskanie, w sposób ścisły, oszacowań dolnych, patrz Twierdzenie 3. Jeśli chodzi o oszacowania górne to podane jest ono w terminach funkcji h odpowiadającej komonotonicznym zmiennym A, B , patrz Twierdzenie 4. W Twierdzeniu 5 podane są wyniki dla zmiennych A i B ujemnie i dodatnio kwadrantowo zależnych.

W pracy [H3] (wspólnej z prof. E. Damek i opublikowanej w *Electronic Comm. in Prob.*) habilitant badał prawostronne ogony zmiennej losowej spełniającej $X \stackrel{d}{=} \max\{AX, B\}$. Podstawowym założeniem o X i (A, B) jest niezależność. Ponadto zakłada się, iż $A \geq 0$, rozkład warunkowy $\log A$, przy warunku $A > 0$ nie jest arytmetyczny oraz $\kappa > 0$ moment tej zmiennej wynosi 1 przy $\mathbb{E}A^\kappa \log A < +\infty$. O funkcji $x \mapsto \mathbb{P}[B > x]$ zakłada się, iż jest funkcją $-\kappa$ -regularną oraz $\mathbb{E}B_+^\kappa = +\infty$. Przypadek rozważany przez habilitanta stanowi uzupełnienie poprzednich wyników uzyskanych przez Kestena, Goldie'go, Greya i Grincievičiusa, w pracach [41], [27], [31] oraz [32]. Podstawowy wynik, zawarty w Theorem 4.2 z pracy [H3] (patrz także Twierdzenie 9 autoreferatu) mówi, iż przy pewnych dodatkowych technicznych założeniach o momentach A i B funkcja $\mathbb{P}[X > x]$ jest $-\kappa$ -regularną dla dużych x .

Wyniki pracy [H4] (wspólnej z prof. E. Damek, opublikowanej w *Stochastic Processes and Their Applications*) dotyczą przypadku gdy rozkład X spełnia równanie afiniczne $X \stackrel{d}{=} \Psi(X)$, gdzie $\Psi(x)$ jest procesem stochastycznym, niezależnym od X i spełniającym warunek

- 1) $Ax + B_1 \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \mathbb{P}$ p.n., lub
- 2) $\max\{Ax, B_1\} \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \mathbb{P}$ p.n.

Szczegółowe założenia o zmiennych losowych A, B, B_1 podane są w wypowiedziach Twierdzeń 10-12. Twierdzenie 10 rozszerza wynik pracy [H3], patrz Twierdzenie 9, do przypadku gdy $\Psi(x) = Ax + B$. Wspólnie, wyniki te implikują, iż $\mathbb{P}[X > x]$ jest $-\kappa$ -regularną dla dużych x , patrz Twierdzenie 11. Dokładna asymptotyka podana jest wzorem (51). Asymptotyka wyższego rzędu podana jest w Twierdzeniu 12.

Praca [H5] (wspólna z prof. K. Burdzym oraz T. Tadićem) ukazała się w prestiżowym czasopiśmie probabilistycznym *Bernoulli*. Badany jest w niej przypadek gdy X spełnia równanie $X \stackrel{d}{=} AX + B$, gdzie na ogół A, B są zmiennymi losowymi dodatnio kwadrantowo zależnymi, patrz Twierdzenia 13 i 14 z autoreferatu.

Na zakończenie warto podkreślić, iż, zgodnie z oświadczeniami współautorów prac [H3]-[H5] wkład habilitanta w przygotowanie tych artykułów wydaje się bardzo istotny (artykuły [H1] i [H2] są pracami samodzielnymi). Godnym podkreślenia jest też fakt, iż habilitant wykazał umiejętność

pracy w bardzo silnych zespołach badawczych, w partnerstwie m.in. z tak znakomitymi probabili-
stami jak profesorowie K. Burdzy i E. Damek.

Podsumowanie. Podsumowując tą część mojej recenzji, wysoko oceniam przedstawione mi osią-
gnięcie naukowe. Dotyczy ono badania własności rozwiązań stochastycznych równań punktu sta-
łego (tzw. perpetu, ang. *perpetuity*). Jest to ważna dziedzina rachunku prawdopodobieństwa, która
znajduje się w centrum zainteresowań tego działu matematyki. Świadczy o tym m.in. fakt, iż publi-
kacje z tej dziedziny ukazują się, także w ostatnich latach, w czołowych czasopismach jak np: *The*
Annals of Probability, *The Annals of Applied Probability*, *Bernoulli*. Wyniki osiągnięte w przed-
stawionym mi do oceny osiągnięciu naukowym są głębokie i otrzymane przy użyciu zaawansowa-
nych metod z analizy oraz teorii rachunku prawdopodobieństwa. Dr B. Kołodziejek mistrzowsko
opanował zarówno techniki probabilistyczne, pochodzące z teorii odnowy (twierdzenia o odnowie
oraz regularności miar odnowy), jak też techniki analityczne: własności funkcji hölderowskich,
zaawansowane metody badania asymptotyki funkcji o regularnym wahaniu (twierdzenia tauberow-
skie). Autoreferat jest dobrze zredagowany i prezentuje w sposób przejrzysty wyniki habilitanta.

B. Ocena pozostałego dorobku naukowego.

Dorobek naukowy dr Kołodziejka nie wchodzący do rozprawy habilitacyjnej stanowi 12 artyku-
łów, z których 5 zostało opublikowanych przed uzyskaniem przez habilitanta stopnia doktora, zaś
pozostałych 7 po doktoracie. W swojej działalności badawczej, rozpoczętej jeszcze przed doktora-
tem, habilitant zajmował się problemem charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa zadanych
na stożkach (np macierzy symetrycznych i dodatnio określonych) oraz równań funkcyjnych zwią-
zanych z tym problemem. Ponadto przedmiotem jego zainteresowań badawczych były niektóre
zagadnienia z teorii odnowy, jak np asymptotyka lewego ogona miary odnowy. Znaczną część
swoich prac naukowych (10 artykułów) habilitant opublikował samodzielnie. Świadczy to, moim
zdaniem, o tym, iż jest on już w pełni dojrzałym matematykiem, który może tworzyć wokół siebie
własną grupę badawczą. Analizując dorobek naukowy dr B. Kołodziejka dochodzę do wniosku, iż
ma on umiejętność nawiązywania owocnej współpracy naukowej. Wśród jego współpracowników
wymienić można m. in.: profesorów K. Burdzego, E. Damek, P. Graczyka.

Habilitant odbył 9 krótkoterminowych (na ogół trwających około 1 tygodnia) wyjazdów na-
ukowych, w tym także w zagranicznych ośrodkach naukowych, m.in z Niemiec, Francji, Japonii
i Kanady. Dr Kołodziejek brał udział w 5 grantach badawczych, w tym w 3 grantach NCN oraz

2 przyznanych przez NCBiR. W dwóch z tych grantów (SONATA, NCN i jednym NCBiR) pełnił rolę kierownika.

B. 2 Dane bibliometryczne

Habilitant opublikował, wraz ze współautorami, 17 prac naukowych, które w ukazały się w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematycznych, z zakresu probabilistyki i statystyki. Wszystkie czasopisma, w których opublikowane są prace habilitanta indeksowane są przez bazę danych *Journal Citation Report*. W swoim autoreferacie dr Kołodziejek podaje, za bazą danych *Web of Science*, iż jego prace były cytowane 37 razy, w tym 13 razy bez autocytowań. Według bazy danych *MathSciNet*, w dniu gdy pisałem recenzję, artykuły, których współautorem był habilitant cytowane były 46 razy, co w moim przekonaniu jest przyzwoitym wynikiem, świadczącym o pewnym oddźwięku jaki znajdują prace habilitanta. Wśród czasopism, w których publikował dr Kołodziejek wymienić można:

- *The Annals of Applied Probability, Bernoulli* (czołowe czasopisma z rachunku prawdopodobieństwa) oraz
- *The Electronic Communications in Probability, Aequationes Mathematicae, Studia Mathematicae, Journal of Theoretical Probability, The Journal of Multivariate Analysis, Stochastic Processes and their Applications, The Journal of Mathematical Analysis and Applications, Revstat Statistical Journal, Colloquium Mathematicum, Probability and Mathematical Statistics, ESAIM: Probability and Statistics, Statistics & Probability Letters.*

C. Konkluzja.

Uważam, iż zarówno przedstawione mi do oceny osiągnięcie naukowe jak i pozostały dorobek naukowy habilitanta w pełni spełniają ustawowe wymogi do nadania stopnia doktora habilitowanego. Z pełnym przekonaniem popieram więc wniosek o nadanie doktorowi Bartoszowi Kołodziejowi stopnia doktora habilitowanego.

Lublin, 8 luty, 2022 r.

Tomasz Komorowski

prof. dr hab. Zbigniew Palmowski
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska
ul. Janiszewskiego 14a
50-372 Wrocław

RECENZJA OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO ORAZ POZOSTAŁEGO DOROBKU W PRZEWODZIE HABILITACYJNYM DOKTORA BARTOSZA KOŁODZIEJKA

Dr Bartosz Kołodziejek przedstawił do oceny w postępowaniu habilitacyjnym cykl prac (osiągnięcie naukowe w rozumieniu Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym): *Asymptotyka ogonów rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego*. Cykl ten składa się z pięciu publikacji, z których dwie są pracami samodzielnymi a trzy pozostałe są napisane z różnymi współautorami. Współautorzy przedstawili szczegółowe oświadczenia, z których jednoznacznie wynika istotny wkład doktora Kołodziejka w ich tworzenie. Cykl prac został opisywany w dobrze zredagowanym autoreferacie. Przedstawię na początku ocenę złożonego osiągnięcia naukowego, po czym opiszę pozostałą działalność naukową, organizacyjną i dydaktyczną doktora Kołodziejka.

Ocena osiągnięcia naukowego.

Osiągnięcie dotyczy badania asymptotyki ogona rozkładu rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego, czyli równań postaci

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \Psi(X), \quad (1)$$

gdzie X jest rzeczywistą zmienną losową, Ψ jest losową funkcją Lipschitzowską, X i Ψ są niezależne zaś $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ oznacza równość według rozkładu. Najczęściej rozważa się następujące równanie afiniczne:

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} AX + B, \quad (2)$$

gdzie para zmiennych losowych (A, B) jest niezależna od X . To klasyczna tematyka badań probabilistyczno-analitycznych mająca szereg zastosowań.

Samodzielna praca [H1] została opublikowana w *Annals of Applied Probability*, czyli w świetnym czasopiśmie probabilistycznym (przez wielu uważanym jako najlepsze, obok siostrzanego *Annals of Probability*, czasopismo w tej tematyce badań). Według mojej oceny wyniki zawarte w tej pracy uzasadniają publikację w tak dobrym miejscu, co warte jest uwagi, ponieważ zdarza

się, iż poziom opublikowanej pracy nie odpowiada jakkolwiek rozumianemu rankingowi czasopisma, czyli innymi słowy, założenie dziedziczności obecne w polskiej nauce niekoniecznie musi być prawdziwe. Jest to też, według mnie, zdecydowanie najlepsza publikacja w całym dorobku naukowym doktora Kołodziejka. Praca zawiera dwa istotne składniki badań naukowych: pomysłowe idee jak i ciężką pracę. Jest to także bardzo dobrze zredagowany artykuł.

Główny rezultat tej pracy mówi, że jeśli B jest zdegenerowane, tzn. $B = b$ p.n. dla pewnego stałego b , $\mathbb{P}(A \in [0, 1)) = 1$, funkcja

$$f(x) := -x \log \mathbb{P}\left(A > 1 - \frac{1}{x}\right)$$

jest regularnie zmieniająca się w nieskończoności z indeksem $r > 1$, to

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim f\left(\frac{x}{b}\right) \left(\frac{r}{r-1}\right)^{r-1}, \quad (3)$$

gdzie piszemy $z(x) \sim h(x)$ dla funkcji z i h jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} z(x)/h(x) = 1$. Dla ujednolicenia recenzji, używam notacji użytej w autoreferacie a nie w opublikowanej pracy.

Przy dodatkowym założeniu, że f jest ostatecznie wypukła, powyższe asymptotyka (3) pozostaje prawdziwa dla $r = 1$, gdzie prawa strona jest rozumiana jako prawostronna granica przy $r \rightarrow 1$ dając $f(x/b)$.

Autor podaje także asymptotykę ogona rozkładu X , kiedy f jest pewnej podklase Γ funkcji szybko zmieniających się, dla której istnieje mierzalna funkcja g taka, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + ug(x))}{f(x)} = e^u \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R}.$$

Jeśli dopuścimy aby A przyjmowała wartość 1 ale z prawdopodobieństwem należącym do $(0, 1)$ zaś $b > 0$, to wtedy

$$\log \mathbb{P}(X > x) \sim \frac{x}{b} \log \mathbb{P}(A = 1).$$

Rezultaty w podobnym duchu można odnaleźć w pracy Buraczewski et al. (2018).

Idea dowodu opiera się na uzyskaniu poprawnych oszacowań z dołu i z góry ilorazu $\mathbb{P}(X > x)/f\left(\frac{x}{b}\right)$ dających tę samą asymptotykę. To jest klasyczne podejście. Jednakże znalezienie tych oszacowań zwykle w każdym osobnym przypadku jest inne i wymaga sporej pomysłowości a często też dużej ilości pracy. Tak jest też w tym przypadku.

Górne ograniczenie uzyskuje się z bardzo ładnego faktu pochodzącego z teorii wilekich odchyłeń: jeśli dla zmiennej losowej R

$$\mathbb{E}e^{zR} \leq e^{g(z)}, \quad z > 0$$

to

$$\log \mathbb{P}(R > x) \leq -g^*(x),$$

gdzie g^* jest transformatą Legendre’a-Fenchela funkcji g . Korzystając z postaci równania (2) i indukcji matematycznej można uzyskać oszacowanie górne dla ogona rozkładu X o ile oszacuje się z góry funkcję generującą momenty X poprzez $e^{\psi(z)+D}$ dla pewnej funkcji ψ i stałej D . Aby oszacować tę funkcję generującą momenty korzysta się z pomysłu zaczerpniętego z pracy Hitchenko i Wesołowski (2009), mówiący, że wystarczy zidentyfikować funkcję ψ taką aby

$$I_\psi(z) := e^z \mathbb{E} e^{\psi(zA) - \psi(z)} \leq 1.$$

Później za ψ wybiera się dolne oszacowanie asymptotyczne równoważne $bf^*(x/b)$. Pokazanie, że jest to właściwy wybór wymaga sporego wysiłku. Wszystko zostało według mojej oceny zrealizowane precyzyjnie.

Dowód dolnego oszacowania jest zwykle prostszy i tak też jest tutaj. Definiuje się ciąg

$$x_n = 1 + (1 - \delta_n)x_{n-1}, \quad \text{dla } n \geq 1 \text{ i } x_0 = 0,$$

i pokazuje w dwóch liniijkach, korzystając z klasycznej reprezentacji szerego-
wej rozwiązania (2), że

$$\mathbb{P}(X > x_n) \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(A > 1 - \delta_i).$$

Teraz tylko pozostaje wybrać właściwy ciąg δ_n , co też zostało zrobione w przedstawionej pracy.

Niestety pozostałe prace w wchodzące do osiągnięcia, w moim odczuciu, prezentują istotnie niższy poziom naukowy, co oczywiście wcale nie oznacza, że są to proste artykuły. Jest wręcz przeciwnie.

Ponownie samodzielna praca [H2] opublikowana a *Advances in Applied Probability* stanowi uogólnienie pracy [H1]. Osłabia się w niej założenie, że $\mathbb{P}(B = b) = 1$ do założenia, że B ma skończone wszystkie wykładnicze momenty. Główna idea pozostaje taka sama, choć duża część szacowań musiała ulec zmianie. Ze względu na [H1] ta praca nie robi takiego wrażenia. Jest to jednak wciąż bardzo dobra praca. Habilidadant pokazał w [H2], jeśli A i B są niezależne oraz funkcja

$$h(x) := \inf_{t \geq 1} \left\{ -t \log \mathbb{P} \left(\frac{1}{1-A} > t, B > \frac{x}{t} \right) \right\}$$

regularnie zmieniająca się, to

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim Ch(x)$$

dla jawnie podanej stałej $C > 0$.

Główna trudność i wartość pracy [H2] polega jednak na dopuszczeniu w niej zależności pomiędzy A i B . W tym przypadku znalezione górne oszacowanie nie jest optymalne i nie jest równe asymptotycznie dolnemu oszacowaniu. W obu przypadkach prędkość asymptotyki tych szacowań (co do stałej) funkcji $-\log \mathbb{P}(X > x)$ jest podana poprzez funkcję $h(x)$. Wynik jest bardzo interesujący a niektóre fakty pomocnicze są interesujące same w sobie. Na

przykład najważniejszy Lemat 2.2 mówi, że jeśli (A, B) i (A', B') mają takie same rozkłady brzegowe oraz

$$\mathbb{P}(A \leq z, B \leq y) \leq \mathbb{P}(A' \leq z, B' \leq y) \quad \text{dla } z, y \in \mathbb{R},$$

to

$$\mathbb{E}l(X) \leq \mathbb{E}l(X')$$

dla wypukłej i monotonicznej funkcji l , gdzie X i X' są rozwiązaniami (2) odpowiadającymi odpowiednio (A, B) i (A', B') .

Prace [H3] i [H4] są opublikowane wspólnie z prof. Damek odpowiednio w *Electronic Communications in Probability* i *Stochastic Processes and their Applications*. To drugie czasopismo cieszy się dużym uznaniem w środowisku probabilistów. Obie prace zajmują się przypadkiem ciężkoogonowej asymptotyki ogona rozkładu X rozwiązującego (1) i wykorzystują technikę Goldiego tzw. uwikłanego równania odnowy. Obie prace mieszczą się w klasycznym nurcie badań równań typu (1), uzyskane w nich wyniki są ciekawe zaś dowody, choć w pewnym stopniu przewidywalne, wymagały bardzo dużego wysiłku i wiedzy.

W [H3] wzięto rekursję maksymalną $\Psi(z) = \max\{Az, B\}$, która powoduje, że rozwiązanie X ma taki sam rozkład jak zaburzone błędzenie losowe ze składnikami o rozkładzie $\log A$ i zaburzeniu o rozkładzie $\log B$. Analizuje się przypadek dotychczas jeszcze niezidentyfikowany, kiedy A i B wpływają na asymptotykę ogona X . W szczególności zakłada się, że A spełnia warunek Kestena o istnieniu $\alpha > 0$ takiego, że $\mathbb{E}A^\alpha = 1$ i B ma rozkład regularnie zmieniający się z parametrem α . Przy pewnych innych dodatkowych technicznych założeniach pokazuje się, że

$$\mathbb{P}(X > x) \sim Cx^{-\alpha},$$

gdzie stała C jest jawna i zależy od A i B . Kluczem jest następujące twierdzenie, które w moim odczuciu jest najciekawsze w tej pracy i którego dowód wymaga sporego wysiłku. Jeśli H jest miarą odnowy związaną z niearytmetycznym błędzeniem losowym ze składnikami Z_i o dodatniej średniej, zaś L jest funkcją wolno zmieniającą się, to

$$\int_{(0,x]} L(e^{x-z}) H(dz) \sim \frac{1}{\mathbb{E}Z_1} \int_{x_0}^{e^x} \frac{L(t)}{t} dt$$

dla ustalonego x_0 .

Praca [H4] zajmuje się afiniczną rekursją, w której $\Psi(x) = Ax + B$ i jest podobna do [H3]. Jest jedna pewnie znacząca różnica: złożoność przeprowadzonych argumentów.

Wspólna praca [H5] z K. Burdzym i T. Tadićem w *Bernoulli* zajmuje się przypadkiem kiedy nośnik rozkładu X rozwiązania równania (2) jest ograniczony i bada asymptotykę rozkładu przy $x \downarrow 0$. Dowody głównych twierdzeń nie wydają mi się złożone i są oparte o argumenty Tauberowskie typu de Bruijna. Praca jest jednak opublikowana w bardzo dobrym czasopiśmie. Może pomógł w tym sukcesie związek ze statystyką poprzez model autoregresyjny ARMA spełniający

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n. \quad (4)$$

Może być też tak, że same pytanie dotyczące przypadku o zwartym nośniku jest ciekawe. Dla mnie najbardziej interesujące jest z pewnością badanie zachowania się X_n zdefiniowanego w (4) dla $n \rightarrow +\infty$. To z kolei wynika z wcześniejszych argumentów i lematu Borela-Cantelliego. Praca [H5] niesie za sobą ogromny potencjał przyszłych badań a postawione pytania są na pewno istotne i intrygujące.

Opisując rezultaty [H5] bardziej szczegółowo, warto podkreślić, iż pierwszy główny wynik [H5] opiera się na własności *Inverse Exponential Decay*, którą zmienna losowa, powiedzmy Y , ma jeśli

$$\mathbb{P}(Y < x) = e^{-\frac{\lambda + o(1)}{x^\rho L(x)}}$$

dla $x \rightarrow 0+$ i wolnozmienną się funkcji $L(x)$ w 0. Piszemy wtedy, że Y jest $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$. Pierwszy główny wynik pracy, mówi, że jeśli m.in. A i B są dodatnio kwadrantowo zależne oraz B jest $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$, to X jest $\text{IED}_L^\rho(\Lambda)$ dla jawnej stałej Λ . Drugim głównym wynikiem jest, że przy pewnych dodatkowych założeniach

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_n}{g(1/\log n)} = \Lambda^{1/\rho} \quad \text{p.n.},$$

gdzie g jest funkcją asymptotycznie odwrotną do funkcji $x \rightarrow x^\rho L(x)$.

Podsumowując, prace wchodzące w skład osiągnięcia naukowego są opublikowane w najlepszych (Ann. Appl. Prob.), bardzo dobrych (SPA, Beronulli) i solidnych (ECP, AAP) czasopismach. Zawarte wyniki są bardzo ciekawe a dowody czasami bardzo skomplikowane. Habilitant z pewnością wykazał się ogromną wiedzą z rachunku prawdopodobieństwa, analizy matematycznej i innych działów matematyki. Według mnie uzyskane wyniki wnoszą wiele do teorii równań rekurencyjnych. To te prace stanowią o sile złożonego wniosku, ponieważ cały pozostały dorobek pozostaje daleko w cieniu tych właśnie osiągnięć.

Ocena pozostałego dorobku naukowo-badawczego.

Ocena aktywności naukowej.

Habilitant jest autorem lub współautorem łącznie 16 publikacji, z czego 5 dotyczy wyników z doktoratu a 7 powstał po doktoracie i nie są częścią osiągnięcia naukowego. Skupię się na tych ostatnich.

W samodzielnej pracy [R1] opublikowanej w solidnym czasopiśmie Journal of Theoretical Probability dr Kołodziejek uogólnia prace Matsumato, Yora, Letaca i Wesołowskiego udowadniając własność Matsumato-Yora (wraz z jej odwrotną wersją) dla elementów losowych X i Y o wartościach w symetrycznych stożkach. Praca nie jest złożona technicznie, ale mi się bardzo podobała. Czytałem ją z ogromną przyjemnością. Badania były kontynuowane w samodzielnej pracy [R2] opublikowanej w przyzwoitym Journal of Mathematical Analysis and Applications oraz we wspólnej pracy [R3] z dr Pliszkiem opublikowanej w dobrym czasopiśmie REVSTAT-Statistical Journal.

W pracy [R4] napisanej wspólnie z Ishi i opublikowanej w Colloquium Mathematicum oraz w pracy [R5] napisanej wspólnie P. Graczykiem oraz H. Ishi opublikowanej w Probability and Mathematical Statistics, zbadano wykładnicze rodziny rozkładów Wisharta na jednorodnym stożku. Współautorzy potwierdzają, że [R4] jest wynikiem wspólnej pracy zaś zasadnicza część pracy [R5] (z wyłączeniem Proposition 5.1 oraz Sekcji 7.1), została przygotowana przez habilitanta zaś rachunki w dowodach głównych wyników pracy, czyli Theorem 5.1 oraz Theorem 6.1, a także Proposition 7.1 i Theorem 7.2, zostały przeprowadzone przez habilitanta wspólnie z prof. Ishi. Obie prace mają charakter raczej techniczny a główny pomysł obu artykułów jest raczej transparentny.

Praca [R6] napisana wspólnie z M. Piccioni i G. Letacem i opublikowana ESAIM-Probability and Statistics udowadnia bardzo ładną charakterystykę rozkładu gaussowskiego. Mianowicie, jeśli t jest parametrem służącym do wykładniczej zamiany miary P_t , i $b + \sigma^2 t$ jest kwantylem rzędu α dla P_t , to miara wyjściowa musi być gaussowska.

Wreszcie samodzielna praca [R7] opublikowana Statistics and Probability Letters identyfikuje asymptotykę lewego ogona miary odnowy dla błędzenia losowego na prostej. Rezultat jak i użyta technika raczej nie zaskakują.

W pozostałym łącznym dorobku nie ma prac opublikowanych w najlepszych czasopismach matematycznych. Mimo tego znajduję wśród nich bardzo ładne wyniki (zwłaszcza te dotyczące twierdzeń charakteryzacyjnych). Co więcej, wszystkie te prace są napisane nie tylko z dużą dbałością o precyzję matematyczną (w szczególności nie zauważyłem żadnych błędów merytorycznych), ale też z dużą uwagą położoną na stronę edycyjną. Liczba prac też nie jest imponująca. To jednak zdaje się być już standardem, który się przyjął w ostatnim dziesięcioleciu w okresie pośpiesznych habilitacji.

Liczba cytowań według Web of Science (bez autocytowań) wynosi 13. Jest to wynik skrajnie niski, nawet jak na matematykę. Taki wynik może sugerować niszową tematykę badań. Z drugiej strony dla mnie zdecydowanie ważniejszy jest wkład intelektualny w dane badania naukowe niż wskaźniki bibliometryczne, punkty ministerialne czasopism, moda na tematy badawcze itp., a o wartości intelektualnej artykułów doktora Kołodziejka mam z kolei bardzo pozytywną opinię.

Udział w grantach.

Habilitant ma tutaj bardzo dobry dorobek. Był wykonawcą w 3 grantach: OPUS 3 o numerze 2012/05/B/ST1/00554, NCN OPUS 11 o numerze 2016/21/B/ST1/00005, NCBiR o numerze 208921/2013 oraz kierownikiem w prestiżowym grantie NCN SONATA 10 o numerze 2015/19/D/ST1/03107 oraz kierownikiem B+R w projekcie NCBiR o numerze POIR.01.01.01-00-0124/17. Bardzo mi się podoba aktywność na tym polu, a zwłaszcza to, że doktor Kołodziejek nie boi się zastosowań o czym sugerują granty z NCBiRu.

Wystąpienia na konferencjach i seminariach, pozycje posdoktoranckie.

Habilitant wygłosił 16 referatów, z czego trzy były na zaproszenie. Wśród

nich są tylko trzy referaty zagraniczne. To raczej bardzo słaby rezultat, tym bardziej zaskakujący ze względu na dużą ilość grantów, w których występował jako wykonawca czy też kierownik (grant Sonata). Można to tłumaczyć na wiele sposobów. Żadnen z nich nie jest korzystny dla habilitanta.

Habilitant miał też kilka bardzo krótkich wizyt naukowych. Część z nich odbyła się na dobrych lub bardzo dobrych uczelniach/instytutach badawczych takich jak Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics (Berlin, Niemcy), Nagoya University (Nagoja, Japonia), University of Angers (Angers, Francja), czy też York University (Toronto, Kanada). Wszystkie te wizyty były jednak krótkie. Habilitant spędził całe swoje dotychczasowe życie badacza w Polsce, w jednym ośrodku badawczym, co jest ogromną wadą jego dorobku. Wydaje mi się, że spędzenie co najmniej jednego roku w innym ośrodku badawczym niż tym, w którym obroniono doktorat, powinno być wymogiem w uzyskaniu habilitacji na najlepszych uczelniach w Polsce.

Ocena dorobku dydaktycznego, organizacyjnego i popularyzatorskiego.

Tutaj dorobek jest również znikomy. Dr Kołodziejek był recenzentem w mało lub średnio znaczących czasopismach oraz w Bernoulli, które jest bardzo wysoko oceniana (głównie wśród statystyków). Recenzji jest 11 i jest też jedna recenzja książki. Od 2018r. jest członkiem Komisji Rady Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej ds. Nagród i Odznaczeń.

Nie jest i nie był członkiem w jakimkolwiek Komitecie redakcyjnym czasopisma matematycznego.

Co parę lat otrzymywał nagrody Rektora za osiągnięcia naukowe.

Prowadził m.in. wykłady Rachunek prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej, Probabilistyka dla aktuariuszy. To na co można zwrócić baczniejszą uwagę, to fakt napisania skryptów do przedmiotów Rachunek Prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej oraz Modele grafowe w ramach Zadania 10 projektu NERW 2 prowadzonego na Politechnice Warszawskiej.

Był promotorem trzech prac magisterskich i dwóch licencjackich. To bardzo niski wynik.

Konkluzja.

Wobec powyższych uwag, uważam, że przedłożone *Osiągnięcia naukowe* stanowi istotny wkład w rozwój dziedziny. Ze względu na bardzo dużą aktywność w zdobywaniu grantów, nie mam negatywnej opinii dotyczącej pozostałej działalności badawczo-dydaktycznej. Autoreferat jest bardzo dobrze zredagowany a liczba błędów edytorskich jest mała. Dlatego popieram

wniosek o nadanie doktorowi Bartoszowi Kołodziejowi stopnia doktora habilitowanego w dyscyplinie matematyka.

Wrocław, dnia 30 styczeń 2022