

Politechnika Warszawska

Plac Politechniki 1

00-661 Warszawa

za pośrednictwem:

Rady Doskonałości Naukowej

pl. Defilad 1

00-901 Warszawa

(Pałac Kultury i Nauki, p. XXIV, pok 2401)

dr inż. Bartosz Kołodziejek
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75
00-662 Warszawa

Wniosek

z dnia 21.04.2021

o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie *nauk ścisłych i przyrodniczych* w dyscyplinie *matematyka*.

Określenie osiągnięcia naukowego będącego podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego: cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Asymptotyka ogonów rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego.

Wnioskuje – na podstawie art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 ze zm.) – aby komisja habilitacyjna podejmowała uchwałę w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w głosowaniu **jawnym**.

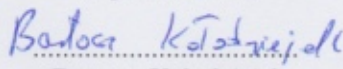
Zostałem poinformowany, że:

Administratorem w odniesieniu do danych osobowych pozyskanych w ramach postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest Przewodniczący Rady Doskonałości Naukowej z siedzibą w Warszawie (pl. Defilad 1, XXIV piętro, 00-901 Warszawa).

Kontakt za pośrednictwem e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl, tel. 22 656 60 98 lub w siedzibie organu. Dane osobowe będą przetwarzane w oparciu o przesłankę wskazaną w art. 6 ust. 1 lit. c) Rozporządzenia UE 2016/679 z dnia z dnia 27 kwietnia 2016 r. w związku z art. 220 - 221 oraz art. 232 - 240 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, w celu przeprowadzenia postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego oraz realizacji praw i obowiązków oraz środków odwoławczych przewidzianych w tym postępowaniu.

Szczegółowa informacja na temat przetwarzania danych osobowych w postępowaniu dostępna jest na stronie www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html

Z poważaniem,


Bartosz Kołodziejek

Załączniki

1. Dane kontaktowe wnioskodawcy
2. Odpis dyplomu nadania stopnia doktora nauk matematycznych
3. Autoreferat
4. Wykaz osiągnięć naukowych, stanowiących znaczny wkład w rozwój dyscypliny matematyka
5. Trzy oświadczenia współautorów
6. Dwa nośniki danych "pendrive" z kompletem dokumentów.

AUTOREFERAT

Bartosz Kołodziejek

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

Spis treści

1	Imię i nazwisko.	3
2	Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.	3
3	Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.	3
4	Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).	4
4.1	Tytuł	4
4.2	Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe	4
4.3	Omówienie osiągnięcia	4
4.3.1	Wstęp	4
4.3.2	Afiniczne równania punktu stałego	5
4.3.3	Praca [H1]	8
4.3.4	Praca [H2]	12
4.3.5	Praca [H3]	17
4.3.6	Praca [H4]	23
4.3.7	Praca [H5]	26
4.4	Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe	29
5	Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.	31
5.1	Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora.	31
5.2	Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej.	33
6	Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.	36
7	Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.	37
7.1	Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną.	37
7.2	Doświadczenie dydaktyczne.	37
7.3	Opieka naukowa nad studentami.	37
8	Literatura	38

1 Imię i nazwisko.

Bartosz Kołodziejek

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.

- stopień naukowy doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka,
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2015,
tytuł rozprawy doktorskiej: *Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych*,
promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.
- dyplom magistra matematyki,
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2010,
tytuł pracy magisterskiej: *Rozkład Wisharta na stożku Lorentza*,
promotor: prof. dr hab. Jacek Wesołowski.
- dyplom magistra fizyki,
Wydział Fizyki Technicznej Politechniki Warszawskiej, 2009,
tytuł pracy magisterskiej: *Modelowanie przejść fazowych w stali*,
promotor: prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński.

3 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- **od 2015** adiunkt,
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska.

- 4 Omówienie osiągnięcia, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2020 r. poz. 85 z późn. zm.).

4.1 Tytuł

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Asymptotyka ogonów rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego

4.2 Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.*, 27(2) (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.*, 50(4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.*, 23 (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten’s and Grincevičius–Grey’s assumptions, *Stoch. Process. Their Appl.*, 130(3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli*, 25(4B) (2019), 3939–3977.

4.3 Omówienie osiągnięcia

4.3.1 Wstęp

Przedstawiana rozprawa dotyczy badań własności rozwiązań tzw. stochastycznych równań punktu stałego, czyli równań postaci

$$X \stackrel{d}{=} \Psi(X), \quad X \text{ oraz } \Psi \text{ są niezależne}, \quad (1)$$

gdzie X jest rzeczywistą zmienną losową, Ψ jest losową funkcją Lipschitzowską, a $\stackrel{d}{=}$ oznacza równość według rozkładu. Z tego typu równaniami nierozdzielnie powiązane są tzw. iterowane funkcje losowe [22] (ang. *iterated random functions*, znane również jako *iterated function systems*), będące ważną klasą łańcuchów Markowa. Podstawowym przykładem takich równań jest *równanie afiniczne*, czyli

$$X \stackrel{d}{=} AX + B, \quad (A, B) \text{ oraz } X \text{ są niezależne}, \quad (2)$$

gdzie (A, B) jest pewnym wektorem losowym. Będziemy również rozważali *równanie maksymalne*, czyli

$$X \stackrel{d}{=} \max\{AX, B\}, \quad (A, B) \text{ oraz } X \text{ są niezależne}. \quad (3)$$

Ponieważ główna część osiągnięcia naukowego dotyczy równania afinicznego, dalej skupimy się na opisie (2), przy czym teoria stojąca za ogólnym równaniem (1), jak i szczególnymi przypadkami (2) i (3) jest bardzo podobna.

Podstawowym problemem w tej teorii jest badanie własności rozkładu X spełniającego (2) dla zadanej pary (A, B) . Równania tego typu pojawiają się w zastosowaniach w rozmaitych naukach stosowanych (patrz [12] oraz referencje w [54, 24]). W szczególności, w 2003r. R. Engle został uhonorowany nagrodą Nobla z ekonomii za wyniki dotyczące procesów ARCH-GARCH, czyli podstawowych przykładów opisywanych przez teorię równań (2). Trudność w analizie własności rozwiązań tych równań wynika między innymi z faktu, że stosunkowo niewiele jest znanych jawnych rozwiązań, tzn. jawnych opisów rozkładów trójki (A, B, X) spełniających (2).

Powiemy, że rozkład zmiennej losowej X jest rozwiązaniem (2), jeśli zmienne losowe A , B oraz X mogą zostać skonstruowane na jednej przestrzeni probabilistycznej tak, by X oraz wektor (A, B) były niezależne oraz zmienne losowe X i $AX + B$ miały takie same rozkłady. Będziemy czasem nadużywać terminologii i mówić, że to zmienna losowa X , a nie jej rozkład, jest rozwiązaniem (2).

Warunki konieczne i dostateczne na skończoność momentów oraz funkcji generujących momenty zmiennej losowej X są w pełni opisane [2, 14]. Podobnie, wiele wiadomo o możliwych typach rozkładów X (jeśli $\mathbb{P}(A = 0) = 0$, to są czysto dyskretne, absolutnie ciągłe albo singularne, [2]) oraz ich nośnikach, [12, §2.5]. Dla iterowanych funkcji losowych znane są centralne twierdzenia graniczne, wielkie odchylenia oraz zachowanie ekstremów. Powyższe wyniki oraz wiele innych (w szczególności uogólnienie (2) do sytuacji, gdy X i B są wektorami, a A jest macierzą kwadratową) zebrane zostały w monografiach [12] oraz [37].

Kolejnym problemem rozważanym w teorii, a rozwijanym przez habilitanta, jest badanie ogona dystrybucyjnego (dalej będziemy mówili po prostu o ogonie) rozwiązania X , czyli funkcji $x \mapsto \mathbb{P}(X > x)$. W ogólnym przypadku nie jest możliwe znalezienie efektywnego opisu tej funkcji. Z punktu widzenia zastosowań, informacja o asymptocie ogona przy końcu nośnika X (zwykle $+\infty$) często jest wystarczająca. Szukamy zatem jawnej funkcji f , zależnej tylko od rozkładu (A, B) , dla której mamy $\mathbb{P}(X > x) \sim f(x)$, gdzie dla dowolnych funkcji rzeczywistych f, g piszemy $f(x) \sim g(x)$, jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/g(x) = 1$. Wielość mechanizmów, w jakich rozkład (A, B) wpływa na asymptotykę ogona X jest zaskakująco duża. W szczególności, analiza (2) przy założeniach prowadzących do lekkoogonowego rozkładu X ([28, 36, 35], [H1, H2]) jest fundamentalnie różna od przypadku ciężkoogonowego ([41, 43, 44, 27, 32], [H3, H4]). Dlatego dowody tych twierdzeń oparte są na zasadniczo innych metodach. Dodatkowo struktura zależności wektora (A, B) odgrywa znacznie większą rolę w przypadku lekkoogonowym. Ponadto, w przypadku lekkoogonowym zwykle szuka się asymptotyki logarytmu ogona, czyli jawnej funkcji f , dla której $\log \mathbb{P}(X > x) \sim f(x)$.

Zanim przejdziemy do opisu prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego, wprowadzimy podstawy teorii dotyczącej równania afinicznego.

4.3.2 Afiniczne równania punktu stałego

Przez (A_n, B_n) będziemy oznaczać wektory losowe o takim samym rozkładzie jak (A, B) , przy czym rozkład wektora (A, B) będzie się zmieniać w zależności od kontekstu.

Niech $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych kopii wektora (A, B) , a ciąg $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ losowych przekształceń afinicznych $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniujmy poprzez

$$\Psi_n(t) = A_n t + B_n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.$$

Oczywiście, $(\Psi_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem i.i.d. Niech X_0 będzie zmienną losową niezależną od ciągu $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$. Zdefiniujemy

$$X_n := \Psi_n(X_{n-1}) = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \geq 1. \quad (4)$$

Jest to tzw. rekursja w przód. Wtedy $(X_n)_{n \geq 1}$ jest łańcuchem Markowa oraz poprzez iterację (4) można pokazać, że dla $n \geq 0$ zachodzi

$$X_n = \left(\sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=k+1}^n A_j \right) + X_0 \prod_{i=1}^n A_i$$

przy konwencji $\prod_{i=k}^m A_i = 1$ gdy $m < k$. Zdefiniujemy kolejny ciąg przekształceń afinicznych, startujący z $S_0 = \text{id}$, zadany przez rekursję w tył,

$$S_n(t) = S_{n-1} \circ \Psi_n(t) = S_{n-1}(A_n t + B_n), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Poprzez iterację powyższego równania otrzymujemy

$$S_n(t) = \left(\sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \right) + t \prod_{i=1}^n A_i. \quad (6)$$

Po odpowiednim przenumowaniu elementów ciągu $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ łatwo zauważyć, że

$$X_n \stackrel{d}{=} S_n(X_0), \quad n \geq 0. \quad (7)$$

Jak widać, rozkłady ciągów $(X_n)_{n \geq 0}$ oraz $(S_n(X_0))_{n \geq 0}$ są ze sobą silnie powiązane, jednak ich trajektorie są fundamentalnie różne. Ciąg $(X_n)_{n \geq 0}$ jest ergodyczny oraz odwiedza wszystkie zbiory dodatniej miary $\mathbb{P}_X$ nieskończenie wiele razy, podczas gdy ciąg $(S_n(X_0))_{n \geq 0}$ zbiega p.n. (prawie na pewno). Do takich ciągów ma zastosowanie prosta, lecz bardzo użyteczna zasada opisana w [46]. Zasada ta jest znacznie ogólniejsza, ale tutaj prezentujemy ją w sformułowaniu przystosowanym do naszego problemu. *Jeśli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ ciąg zmiennych losowych $(S_n(t))_{n \geq 0}$ zbiega p.n. do granicy S , która to granica nie zależy od t , to rozkład S jest jedynym rozwiązaniem (2). Ponadto, ciąg $(X_n)_{n \geq 0}$ zbiega według rozkładu do S dla dowolnego X_0 (niezależnego od $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$).*

Z postaci (6) wynika, że jedynym kandydatem na granicę ciągu $(S_n(t))_{n \geq 0}$, która nie zależy od t , jest szereg

$$S := \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j.$$

Żeby zrozumieć warunki przy jakich powyższy szereg jest zbieżny p.n., rozważmy najpierw przypadek $\mathbb{P}(A = 0) > 0$. Wtedy zmienna losowa $N = \inf\{n \geq 1 : A_n = 0\}$ jest momentem stopu względem filtracji naturalnej ciągu $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$. Ponadto, $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$ oraz dla $n \geq N$ zachodzi

$$S_n(t) = \sum_{k=1}^N B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j = S.$$

Wynika stąd, że warunek $\mathbb{P}(A = 0) > 0$ zapewnia zbieżność p.n. ciągu $(S_n(t))_{n \geq 1}$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ oraz, że granica nie zależy od t . Naturalnie nie jest to warunek konieczny. Warunki konieczne i dostateczne dla zbieżności prawie na pewno szeregu S zostały podane w [29], jednak dokładna ich postać nie jest istotna z perspektywy niniejszego opisu. Istotne jest natomiast, że warunkiem dostatecznym tej zbieżności jest

$$\mathbb{E}[\log(|A|)] \in [-\infty, 0) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[\max\{\log(|B|), 0\}] < +\infty. \quad (8)$$

W szczególności, jeśli $\mathbb{E}[\log(|A|)] < 0$, to z mocnego prawa wielkich liczb mamy $A_1 \cdots A_n \rightarrow 0$ p.n.

Jeśli istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $Ac + B = c$ p.n., to $X = c$ jest jedynym rozwiązaniem (2). Rozwiązania stałe są jednak nieinteresujące i zwykle wykluczane przez założenie warunku

$$\mathbb{P}(Ac + B = c) < 1 \text{ dla każdego } c \in \mathbb{R} \quad (9)$$

lub innego, który go implikuje.

Podsumowując, przy założeniu (8), proponujemy trzy sposoby na studiowanie obiektu naszych badań: następujące warunki są równoważne

- X jest rozwiązaniem (2) lub równoważnych równań całkowych
typu $\mathbb{E}[f(X)] = \mathbb{E}[f(AX + B)]$ dla odpowiedniej klasy funkcji f , (10)

- $X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j$, (11)

- X jest granicą według rozkładu ciągu $(X_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowanego w (4)
lub równoważnie rozkładem stacjonarnym łańcucha Markowa $(X_n)_{n \geq 1}$. (12)

Każdy z powyższych opisów zmiennej losowej X dostarcza innych technik do badania jej własności, co było intensywnie wykorzystywane w pracach habilitanta. Z uwagi na interpretację ubezpieczeniową sumy (11), zmienna losowa X nazywana jest czasem *perpetuitę*.

Główne rozróżnienie mechanizmów odpowiedzialnych za asymptotykę ogona zmiennej losowej X wynika z warunków

- $\mathbb{P}(|A| > 1) > 0$, (13)

- $\mathbb{P}(|A| \leq 1) = 1$. (14)

Wiadomo, że jeśli (13) oraz (9) są spełnione, to X ma ciężkie ogony dla dowolnego B , [28, Theorem 4.1]. Co za tym idzie, jeśli rozkład X jest niezdegenerowany oraz ma wszystkie momenty skończone, to zachodzi (14).

Ważną klasą rozwiązań równania afinicznego są wykładnicze funkcjonały procesów Lévy'ego [6]: niech η będzie procesem Lévy'ego z dodatnim dryfem oraz niech T będzie skończonym momentem stopu względem filtracji naturalnej $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ procesu η . Wtedy mamy

$$\int_0^\infty e^{-\eta_s} ds = e^{-\eta_T} \int_0^\infty e^{-\eta'_s} ds + \int_0^T e^{-\eta_s} ds$$

gdzie $\eta'_t := \eta_{T+t} - \eta_T$, $t \geq 0$. Z mocnej własności Markowa dla procesów Lévy'ego, proces η' jest niezależny od $\mathcal{F}_T$ oraz ma taki sam rozkład jak η . Tym samym, dla $X \stackrel{d}{=} \int_0^\infty e^{-\eta_s} ds$ tożsamość (2) zachodzi z $(A, B) = (e^{-\eta_T}, \int_0^T e^{-\eta_t} dt)$. Należy jednak podkreślić, że nie każde rozwiązanie równania afinicznego jest wykładniczym procesem Lévy'ego.

4.3.3 Praca [H1]

Habibitant w swoich pracach [H1, H2] kontynuował badania prowadzone przez Goldiego i Grübela [28] oraz Hitczenkę i Wesołowskiego [36] oraz samego Hitczenkę [35]. Będziemy rozważali równanie (2) w sytuacji (14), kiedy B ma rozkład nadwykładniczy (w szczególności o ograniczonym nośniku).

Na potrzeby sformułowania wyników niezbędne jest przytoczenie podstawowych pojęć z zakresu analizy wypukłej [50] oraz teorii funkcji regularnie zmieniających się [7].

Dla funkcji $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiujemy jej *wypukłe sprzężenie* (albo transformatę Legendre’a-Fenchela) poprzez $f^*(x) = \sup_{z>0} \{zx - f(z)\}$ dla $x > 0$. Wiadomo, że funkcja f^* jest wypukła, niemalejąca oraz półciągła z dołu. Ponadto, jeśli f jest wypukła i półciągła z dołu, to zachodzi $(f^*)^* = f$. Wynik ten jest znany jako Twierdzenie Fenchela-Moreau.

Dodatnią funkcję mierzalną L , zdefiniowaną w otoczeniu $+\infty$, nazywamy *wolnozmiennającą się*, jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1, \quad \text{dla każdego } \lambda > 0. \quad (15)$$

Dodatnia funkcja mierzalna f , zdefiniowana w otoczeniu $+\infty$, jest *regularnie zmieniająca się z indeksem* $\rho \in \mathbb{R}$, jeśli $f(x) = x^\rho L(x)$ dla pewnej funkcji wolnozmiennającej się L . Zbiór funkcji regularnie zmieniających się z indeksem ρ oznaczamy przez $\mathcal{R}_\rho$. Klasa funkcji Γ składa się z niemalejących, prawostronnie ciągłych funkcji, dla których istnieje mierzalna funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, taka że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x + ug(x))}{f(x)} = e^u, \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R}.$$

Funkcje ze zbioru Γ są tzw. *szybko zmieniające się* (ang. *rapidly varying*, oznaczane przez $\mathcal{R}_\infty$) w tym znaczeniu, że $f(\lambda x)/f(x) \rightarrow +\infty$ gdy $x \rightarrow +\infty$ dla wszystkich $\lambda > 1$. Klasa ta w sposób naturalny pojawia się w teorii wartości ekstremalnych przy badaniu rozkładów max-stabilnych w obszarze przyciągania rozkładu Gumbela [26].

W [35] udowodniono, że jeśli $A \in [0, 1]$ p.n. oraz $B = b > 0$ p.n., to dla dostatecznie dużych x zachodzi

$$\frac{2 \log(2)}{b} x \log \mathbb{P} \left(A > 1 - \frac{b}{2x} \right) \leq \log \mathbb{P}(X > x) \leq \frac{1}{4b} x \log \mathbb{P} \left(A > 1 - \frac{2b}{x} \right).$$

Definiując

$$f(x) = -x \log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x), \quad x \geq 1, \quad (16)$$

powyższy ciąg nierówności można równoważnie zapisać następująco:

$$-\log(2) f \left(\frac{2x}{b} \right) \leq \log \mathbb{P}(X > x) \leq -2^{-1} f \left(\frac{x}{2b} \right).$$

Zauważmy, że z tej nierówności nie można wywnioskować dokładnej asymptotyki logarytmu ogona X (niezależnie od rozkładu A). Jeśli $f \in \mathcal{R}_r$ dla $r \in [1, +\infty)$, to powyższa nierówność implikuje, że

$$-2^r \log(2) \leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} \leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} \leq -\frac{1}{2^{r+1}}.$$

Z kolei, jeśli $f \in \mathcal{R}_\infty$, to lewa strona wynosi $-\infty$, a prawa 0. We wcześniejszej pracy [36] autorzy rozważali inną metodę dowodu górnego ograniczenia. Dzięki jej zastosowaniu byli (a raczej byliby, bo rozważali tylko szczególne przykłady, których zachowanie nie różni się istotnie od ogólnego przypadku) w stanie znaleźć dokładną asymptotykę funkcji $x \mapsto \log \mathbb{P}(X > x)$, gdy $r = 1$. Gdy $r \in (1, +\infty)$ w przykładach, które rozważali, dolne i górne ograniczenia były skończone, lecz różne. Gdy $r = +\infty$ ich wyniki były jeszcze słabsze: w zależności od wyboru funkcji porównującej, lewe ograniczenie było równe $-\infty$ lub prawe ograniczenie wynosiło 0.

Głównym osiągnięciem naukowym w pracy [H1] jest znalezienie dokładnej asymptotyki logarytmu ogona X w sytuacji zdegenerowanego rozkładu B , gdy f jest funkcją regularnie zmieniającą się, lub gdy f należy do klasy Γ . Zauważmy, że w tej szczególnej sytuacji A i B są niezależne. W pracy [H2] habilitant rozważał ogólną sytuację, czyli niezdegenerowanego rozkładu B oraz zależnych A i B .

Przy słabych założeniach, asymptotykę logarytmu ogona X można opisać w terminach logarytmu ogona zmiennej losowej $1/(1 - A)$, zob. (16). Głównym wynikiem pracy [H1] jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Theorem 4.1 w [H1]).

Założmy, że $\mathbb{P}(A \in [0, 1)) = 1$ oraz $\mathbb{P}(B = b) = 1$ dla pewnego $b > 0$. Niech X będzie rozwiązaniem (2) oraz niech f będzie funkcją zdefiniowaną w (16).

(i) *Jeśli $f \in \mathcal{R}_r$ dla $r \in (1, +\infty)$, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \left(\frac{r}{r-1} \right)^{r-1}.$$

(ii) *Jeśli $f \in \Gamma \subset \mathcal{R}_\infty$, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{r-1} = e.$$

(iii) *Jeśli $f \in \mathcal{R}_1$ oraz f jest wypukła w otoczeniu $+\infty$, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b)} = \lim_{r \rightarrow 1^+} \left(\frac{r}{r-1} \right)^{r-1} = 1.$$

Można pokazać, że założenie o wypukłości w punkcie (iii) powyższego twierdzenia można usunąć [55]. Jeśli $\mathbb{P}(A \leq a) = 1$ dla pewnego $a < 1$, to z (11) mamy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \leq \sum_{k=1}^{+\infty} a^{k-1} b < +\infty,$$

więc w tej sytuacji nie ma sensu mówić o asymptotyce ogona X w $+\infty$. Jeśli $\mathbb{P}(A \in [0, 1]) = 1$ oraz $\mathbb{P}(A = 1) \in (0, 1)$, to teza punktu (iii) powyżej pozostaje prawdziwa (wtedy $f(x/b) \sim -(x/b) \log \mathbb{P}(A = 1)$) [H1, Corollary 5.1]. Tym samym, otrzymujemy kompletny opis asymptotyki, gdy logarytmiczny ogon $1/(1 - A)$ jest funkcją regularnie zmieniającą się, $A \geq 0$ p.n. oraz $B = b > 0$ p.n.

Jeśli założenie $\mathbb{P}(A \in [0, 1)) = 1$ zastąpimy przez $\mathbb{P}(A \in (-1, 1)) = 1$ oraz przyjmiemy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x)}{\log \mathbb{P}(|A| > 1 - 1/x)} = 1,$$

to tezy Twierdzenia 1 pozostają prawdziwe [H1, §7].

Przy założeniu $\mathbb{P}(A \in [0, 1]) = 1$, asymptotyka ogona (a nie jej logarytmu) zmiennej losowej X jest znana w kilku bardzo szczególnych przypadkach. W szczególności, jeśli A^α ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ dla pewnej stałej $\alpha > 0$ oraz $B = 1$ p.n. [53]. Wtedy mamy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X > x)/\rho(x-1)$, gdzie ρ jest funkcją Dickmana–de Bruijna [21]. Inny przykład pochodzi z [14], gdzie rozważano założenia, przy których X ma taki ogon jak rozkład gamma, jednak w tych rozważaniach to rozkład B dominował nad A , co jest fundamentalnie innym mechanizmem niż opisywany tutaj.

Dowód Twierdzenia 1 opiera się na odrębnej analizie ograniczeń górnego na granicę górną oraz dolnego na granicę dolną wyrażenia $\log \mathbb{P}(X > x)/f(x/b)$ gdy $x \rightarrow +\infty$. Metody dowodowe obu ograniczeń, pierwotnie zaczerpnięte z prac [28, 36], zostały dalej rozwinięte w pracy [H2] dla sytuacji, gdy A i B są zależne. Będziemy je tutaj prezentowali w tej ogólniejszej formie. Metody te były zastosowane również w analizie ogonów tzw. transformat gładzących [1].

Górne ograniczenie

Dowód górnego oszacowania opiera się na idei nadrozwiązań, która pozwala zweryfikować czy dana funkcja ϕ majoryzuje funkcję generującą momenty zmiennej losowej X . Sformułowanie poniższego lematu pochodzi z [H2, Lemma 6.2] i jest ogólniejsze, niż to jest wymagane dla dowodu Twierdzenia 1. Wynik ten, w sytuacji $\mathbb{P}(B = 1) = 1$, został wyekstrahowany z dowodu [28, Theorem 3.1] przez Hitczenkę i Wesołowskiego w [36]. Wyjaśnienie pewnych nieścisłości z [36] znajduje się w [H1, 1179-1180].

Lemat 1 (Lemma 6.2 w [H2]).

Niech ϕ będzie funkcją rzeczywistą, taką że

$$\mathbb{E} \left[e^{zB + \phi(zA) - \phi(z)} \right] \leq 1 \quad (17)$$

dla dużych wartości z .

Jeśli X jest rozwiązaniem (2), to istnieje stała $c > 0$, taka że

$$\mathbb{E} \left[e^{zX} \right] \leq e^{\phi(z) + c} \quad (18)$$

dla dużych z .

Mając (18), górne ograniczenie na ogon X otrzymujemy poprzez zastosowanie wykładniczej nierówności Markowa: dla dostatecznie dużych z (powiedzmy, że dla $z > z_0$) i dla dowolnego $x > 0$ mamy

$$\mathbb{P}(X > x) \leq \frac{\mathbb{E} \left[e^{zX} \right]}{e^{zx}} \leq e^{\phi(z) - zx + c}.$$

Stąd,

$$\log \mathbb{P}(X > x) \leq c - \sup_{z > z_0} \{zx - \phi(z)\} = c - \phi^*(x),$$

przy czym ostatnia równość zachodzi dla dużych x , jeśli ϕ jest funkcją wypukłą.

Zatem, żeby pokazać, że dla pewnej funkcji wypukłej g zachodzi

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{g(x)} \leq -1, \quad (19)$$

wystarczy udowodnić, że dla $g_C^*(x) := Cg^*(x/C)$ oraz dowolnego $C \in (0, 1)$ zachodzi

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[e^{zB + g_C^*(zA) - g_C^*(z)} \right] < 1.$$

Rzeczywiście, zauważmy najpierw, że z definicji g_C^* oraz z wypukłości g mamy $(g_C^*)^*(x) = Cg(x)$. Zatem, z Lematu 1, dla dowolnego $C \in (0, 1)$ istnieje stała $c > 0$, taka że dla dużych x zachodzi

$$\frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{g(x)} \leq \frac{c - (g_C^*)^*(x)}{g(x)} = -C + \frac{c}{g(x)}.$$

Przykładając $\limsup_{x \rightarrow +\infty}$ do obu stron oraz korzystając z dowolności $C \in (0, 1)$ otrzymujemy (19).

Dolne ograniczenie

Ponownie zaprezentujemy tutaj nieco ogólniejsze podejście niż tego wymaga dowód Twierdzenia 1. Podejście to dopuszcza niezdegenerowany rozkład B oraz było wykorzystane również w dowodzie [H2, Theorem 5.1].

Rozważmy dwa ciągi liczbowe $(\delta_n)_{n \geq 1}$ oraz $(b_n)_{n \geq 1}$, przy czym zakładamy, że $\delta_n \in (0, 1)$ oraz $b_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $x_0 = 0$ zdefiniujemy rekurencyjnie ciąg $(x_n)_{n \geq 1}$ poprzez

$$x_n = (1 - \delta_n)x_{n-1} + b_n, \quad n \geq 1.$$

Wtedy, korzystając z (4) dla $X_0 = 0$, mamy $\mathbb{P}(X_1 > x_1) = \mathbb{P}(B_1 > b_1) \geq \mathbb{P}(A_1 > 1 - \delta_1, B > b_1)$ oraz dla $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n > x_n) &\geq \mathbb{P}(A_n X_{n-1} + B_n > (1 - \delta_n)x_{n-1} + b_n, A_n > 1 - \delta_n, B_n > b_n) \\ &\geq \mathbb{P}(X_{n-1} > x_{n-1}, A_n > 1 - \delta_n, B_n > b_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{n-1} > x_{n-1}) \mathbb{P}(A > 1 - \delta_n, B > b_n). \end{aligned}$$

W ostatniej równości korzystamy z faktu, że ciąg $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$ jest ciągiem i.i.d. oraz X_{n-1} jest $\sigma\{(A_k, B_k) : k \leq n-1\}$ -mierzalny. Zatem, dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathbb{P}(X_n > x_n) \geq \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k).$$

Korzystając z (11) oraz z (7), dla nieujemnych A_n i B_n otrzymujemy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \geq \sum_{k=1}^n B_k \prod_{j=1}^{k-1} A_j \stackrel{d}{=} X_n,$$

więc $\mathbb{P}(X > t) \geq \mathbb{P}(X_n > t)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Zatem

$$\log \mathbb{P}(X > x_n) \geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k). \quad (20)$$

W [H1] rozważano założenie $\mathbb{P}(B = b) = 1$ dla pewnego $b > 0$. Nieznacznie modyfikując powyższe rachunki dla $b_k = b$, $k = 1, \dots, n$, można pokazać, że

$$\log \mathbb{P}(X > x_n) \geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k) = - \sum_{k=1}^n \delta_k f(1/\delta_k),$$

gdzie funkcja f jest zdefiniowana w (16). Dalsza część dowodu dolnego ograniczenia opiera się na doborze odpowiedniego ciągu $(\delta_n)_{n \geq 1}$. W szczególności, biorąc $\delta_k = \delta \in (0, 1)$ dla $k = 1, \dots, n$, otrzymujemy nierówność Goldiego-Grübela ([28, (5.7)], [36, Proposition 1])

$$\mathbb{P} \left(X > b \sum_{k=1}^n (1 - \delta)^{k-1} \right) \geq \mathbb{P}(A > 1 - \delta)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nierówność ta pozwala znaleźć asymptotycznie optymalne dolne ograniczenie na logarytm ogona X w sytuacji, gdy funkcja $x \mapsto -\log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x)$ jest wolnozmienną się (czyli $f \in \mathcal{R}_1$), ale nie ogólnie [36].

4.3.4 Praca [H2]

W pracy [H2] rozważano równanie (2) przy ogólniejszych założeniach niż w pracy [H1]. Dopuszczono tam, by rozkład B nie był zdegenerowany do punktu. Jak się okaże, asymptotyka ogona X zależy nie tylko od brzegowych rozkładów A i B , ale również od struktury zależnościowej wektora (A, B) . Zaczynamy od opisu prostszej sytuacji (gdy A i B są niezależne), dla której habilitant wypracował nową metodę atakowania problemu. Dowód jest znacznie krótszy niż dowód głównego twierdzenia w [H1], które również dotyczyło niezależnych A i B (B miało zdegenerowany rozkład).

Niezależne A i B

Zauważmy, że (10) implikuje $\mathbb{E}[\exp(zX)] = \mathbb{E}[\exp(zAX)]\mathbb{E}[\exp(zB)]$, $z \in \mathbb{R}$. Korzystając z niezależności A , B oraz X , a także z warunkowania po A , otrzymujemy dla $\phi_X(z) = \mathbb{E}[\exp(zX)]$,

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{zAX} \mid A]]\mathbb{E}[e^{zB}] = \mathbb{E}[\phi_X(zA)]\mathbb{E}[e^{zB}]. \quad (21)$$

Funkcja ϕ_X jest charakteryzowana przez powyższe równanie całkowe oraz warunek $\phi_X(0) = 1$. Jak zostanie uzasadnione, znajomość asymptotyki funkcji $\log \phi_X$ jest równoważna znajomości asymptotyki logarytmu ogona X , o ile jedna z tych funkcji jest regularnie zmieniająca się z indeksem $\gamma > 1$. Poniższy wynik uogólnia punkt (i) Twierdzenia 1 na sytuację niezdegenerowanego B .

Twierdzenie 2.

Założmy, że A i B są niezależne oraz nieujemne p.n. Zdefiniujmy dwie funkcje

$$f(x) = -x \log \mathbb{P}(A > 1 - 1/x) \quad \text{oraz} \quad k(x) = -\log \mathbb{P}(B > x), \quad x \geq 1. \quad (22)$$

Niech ponadto $b_+ := \text{ess sup } B$ oraz X będzie rozwiązaniem (2).

(i) [H2, Theorem 3.1] *Jeśli $b_+ < +\infty$ oraz $f \in \mathcal{R}_r$ dla $r \in (1, +\infty)$, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{f(x/b_+)} = \left(\frac{r}{r-1} \right)^{r-1}. \quad (23)$$

(ii) [H2, Theorem 3.2] *Jeśli $b_+ = +\infty$, $f \in \mathcal{R}_r$ oraz $k \in \mathcal{R}_\alpha$ dla $r, \alpha \in (1, +\infty)$, to*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{(f^* \circ k^*)(x)} = \left(\frac{\alpha r}{(\alpha-1)(r-1)} \right)^{\frac{(\alpha-1)(r-1)}{\alpha+r-1}}, \quad (24)$$

gdzie

$$(f^* \circ k^*)^* \in \mathcal{R}_{\frac{\alpha r}{\alpha+r-1}}.$$

(iii) [H2, Theorem 4.1] Punkty (i) i (ii) pozostają prawdziwe, jeśli lewe strony równań (23) i (24) zastąpimy przez

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\log \mathbb{P}(X > x)}{h(x)},$$

gdzie

$$h(x) := \inf_{t \geq 1} \left\{ -t \log \mathbb{P} \left(\frac{1}{1-A} > t, B > \frac{x}{t} \right) \right\}. \quad (25)$$

Zauważmy, że warunek $f \in \mathcal{R}_r$ dla $r > 1$ implikuje, że $\mathbb{P}(A < 1) = 1$. Metoda dowodowa punktów (i) i (ii) Twierdzenia 2 nie pozwala na opis przypadku $r \in \{1, +\infty\}$.

Zauważmy, że równanie (21) można sprowadzić do

$$-\log \mathbb{E} \left[e^{\psi(zA) - \psi(z)} \right] = \log \mathbb{E}[e^{zB}], \quad (26)$$

gdzie $\psi = \log \phi_X$. Dowód opiera się na obserwacji, że dla nieznanej funkcji ψ zachodzi

$$-\log \mathbb{E} \left[e^{\psi(zA) - \psi(z)} \right] \sim -\log \mathbb{E} \left[e^{-z\psi'(z)(1-A)} \right], \quad z \rightarrow +\infty. \quad (27)$$

By udowodnić ten fakt wystarczy (21), własności rozkładu A oraz wypukłość i monotoniczność funkcji ψ .

W dalszej części dowodu korzystamy z dwóch klasycznych twierdzeń tauberowskich Kasahary oraz de Bruijna, które w [H2] zostały sformułowane w nowy sposób. Równoważność tych sformułowań jest nietrywialna [H2, §2.4 oraz §7]. Otrzymujemy z nich

$$\log \mathbb{E}[e^{zB}] \sim k^*(z) \quad \text{oraz} \quad -\log \mathbb{E}[e^{-z\psi'(z)(1-A)}] \sim (f^*)^{-1}(z\psi'(z)).$$

Równania (26) oraz (27) pozwalają zatem znaleźć asymptotykę funkcji ψ' . Z niej możemy odczytać asymptotykę ψ oraz ponownie skorzystać z Twierdzenia Kasahary, które implikuje

$$-\log \mathbb{P}(X > x) \sim \psi^*(x).$$

Zależne A i B - dolne ograniczenie

Punkt (iii) Twierdzenia 2 pokazuje, że jeśli A i B są niezależne, to funkcja h jest asymptotycznie porównywalna z logarytmem ogona X . Hipoteza badawcza postawiona przez habilitanta zakładała, że tak się dzieje również w sytuacji, gdy A i B nie są niezależne. Poniżej prezentujemy dolne ograniczenie na logarytmiczny ogon z funkcją h oraz jawną stałą. Stała ta zależy od indeksu γ funkcji $h \in \mathcal{R}_\gamma$ oraz od granicy w $+\infty$ funkcji t , którą wprowadzamy poniżej.

Z definicji funkcji h , zob. (25), wynika istnienie funkcji t , takiej że

$$h(x) = -t(x) \log \mathbb{P} \left(\frac{1}{1-A} > t(x), B > \frac{x}{t(x)} \right) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (28)$$

Funkcja t nie jest wyznaczona jednoznacznie. W szczególności można skonstruować przykład rozkładu (A, B) , gdzie funkcja

$$(1, x] \ni t \mapsto -t \log \left(\frac{1}{1-A} > t, B > \frac{x}{t} \right)$$

jest funkcją stałą [H2, Remark 4.2]. Ponieważ funkcja t z (28) nie jest wyznaczona jednoznacznie, jej granica w $+\infty$ również nie musi być wyznaczona jednoznacznie. W takiej sytuacji poniższy wynik jest prawdziwy dla wszystkich granic t_∞ , jakie może posiadać funkcja t .

Twierdzenie 3 (Theorem 5.1 w [H2]).

Założmy, że funkcja h zdefiniowana w (25) należy do $\mathcal{R}_\gamma$ z $\gamma \in [1, +\infty]$. Jeśli $\gamma = +\infty$, to zakładamy dodatkowo, że $h \in \Gamma \subset \mathcal{R}_\infty$. Przyjmijmy, że dla funkcji t , spełniającej (28), zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = t_\infty \in (1, +\infty].$$

Wtedy,

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h(x)} \geq -c_{t_\infty, \gamma}, \quad (29)$$

gdzie $c_{t, \gamma}$ jest dodatnią stałą zdefiniowaną poniżej: dla $t \in (1, +\infty)$ oraz $\gamma \in (1, +\infty)$, definiujemy

$$c_{t, \gamma} = \left[t \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \right\} \right]^{\gamma-1},$$

$$c_{t, 1} = c_{\infty, 1} = 1, \quad c_{\infty, \gamma} = \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^{\gamma-1}, \quad c_{t, \infty} = \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{1+t}, \quad c_{\infty, \infty} = e.$$

Metoda dowodowa, w zależności od przypadku, opiera się na podejściu zaprezentowanym wcześniej, tzn. prowadzącym do (20) lub na poniższej modyfikacji. Rozważmy ciągi liczbowe $(\delta_k)_{k \geq 1}$ oraz $(b_k)_{k \geq 1}$, $\delta_k \in (0, 1)$ i $b_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$, spełniające warunek

$$\sum_{k=1}^n (1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_{k-1}) b_k \geq x. \quad (30)$$

Zakładamy, że elementy tych ciągów jak i ich liczba n mogą być funkcjami zmiennej x . Na zbiorze $\bigcap_{k=1}^n \{A_k > 1 - \delta_k, B_k > b_k\}$ mamy

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} A_1 \cdots A_{k-1} B_k \geq \sum_{k=1}^n (1 - \delta_1) \cdots (1 - \delta_{k-1}) b_k.$$

Zatem (30) implikuje

$$\mathbb{P}(X > x) \geq \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n \{A_k > 1 - \delta_k, B_k > b_k\} \right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k). \quad (31)$$

Zaprezentujemy tutaj prosty przykład wykorzystania tej nierówności mający na celu zaprezentowanie głównej idei dowodu. Rozumowania przedstawione w [H2] są bardziej technicznie skomplikowane. Rozważmy $(\delta_k, b_k) = (1/t(y), y/t(y))$ dla $k = 1, \dots, n = \lceil t(y) \rceil$. Wtedy (30) sprowadza się do

$$(1 - (1 - t(y)^{-1})^{\lceil t(y) \rceil}) y \geq x.$$

Zauważmy, że dla $t \geq 1$ mamy $(1 - t^{-1})^{\lceil t \rceil} \leq (1 - t^{-1})^t \leq e^{-1}$. Jeśli $y = x/(1 - e^{-1})$, to powyższy warunek jest spełniony dla dowolnego x . Zatem, dla $y = x/(1 - e^{-1})$ i dowolnego x , (31) implikuje

$$\begin{aligned} \log \mathbb{P}(X > x) &\geq \sum_{k=1}^n \log \mathbb{P}(A > 1 - \delta_k, B > b_k) = \lceil t(y) \rceil \log \mathbb{P}\left(\frac{1}{1-A} > t(y), B > \frac{y}{t(y)}\right) \\ &= \frac{\lceil t(y) \rceil}{t(y)}(-h(y) + o(1)), \end{aligned}$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystano (28). Korzystając z faktu, że dla $t \geq 1$ mamy $\lceil t \rceil/t \leq 2$, otrzymujemy dla dowolnego $x \geq 0$,

$$\log \mathbb{P}(X > x) \geq -2h\left(\frac{x}{1 - e^{-1}}\right) + o(1).$$

Zauważmy, że nie wykorzystano powyżej żadnych własności asymptotycznych funkcji h oraz t .

Zależne A i B - górne ograniczenie

Górne ograniczenie dla zależnych A i B wydaje się być znacznie trudniejsze do badania. W pracy [H2] znaleziono górne ograniczenie równe dolnemu ograniczeniu tylko w szczególnych przypadkach: poza niezależnymi A i B również dla tzw. komonotonicznych A i B . Wyniki te pozwalają na wyprowadzenie ograniczeń górnych (w ogólności nieoptymalnych) dla dowolnej struktury zależności wektora (A, B) . Główny argument opiera się na poniższym lemacie.

Lemat 2 (Lemma 2.2 w [H2]).

Jeśli (A, B) i (A', B') są wektorami o takich samych rozkładach brzegowych oraz spełniającymi

$$\mathbb{P}(A \leq x, B \leq y) \leq \mathbb{P}(A' \leq x, B' \leq y), \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, \quad (32)$$

oraz X i X' są rozwiązaniami (2), odpowiadającymi (A, B) i (A', B') , to dla dowolnej wypukłej i monotonicznej funkcji f zachodzi

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(X')]. \quad (33)$$

Z uwagi na (33), naturalne jest studiowanie ekstremalnych w sensie częściowego porządku (32) struktur zależności wektorów (A, B) .

Niech F_A i F_B będą dystrybuantami rozkładów A i B . Zdefiniujmy dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\underline{F}(x, y) := \max\{F_A(x) + F_B(y) - 1, 0\} \quad \text{oraz} \quad \overline{F}(x, y) := \min\{F_A(x), F_B(y)\}.$$

Zauważmy, że $\overline{F}$ jest dystrybuantą wektora $(F_A^{-1}(U), F_B^{-1}(U))$, gdzie U ma rozkładu jednostajny na odcinku $[0, 1]$, a F_A^{-1} i F_B^{-1} są uogólnionymi odwrotnościami dystrybuant F_A i F_B . Podobnie, $\underline{F}$ jest dystrybuantą pary $(F_A^{-1}(U), F_B^{-1}(1-U))$. Ponadto zachodzi tzw. nierówność Fréchet-Hoeffdinga, czyli

$$\underline{F} \leq F_{(A,B)} \leq \overline{F}, \quad (34)$$

gdzie $F_{(A,B)}$ jest dowolną dystrybuantą wektora (A, B) . Podkreślmy, że wszystkie dystrybuanty dwuwymiarowe $\underline{F}$, $\overline{F}$ oraz $F_{(A,B)}$ mają takie same rozkłady brzegowe.

Powiemy, że A i B są *komonotoniczne*, jeśli $F_{(A,B)} = \overline{F}$ oraz że są *antymonotoniczne* (ang. *countermonotonic*), jeśli $F_{A,B} = \underline{F}$. Z (34) wynika, że rozkład komonotonicznych A i B jest maksymalny, a rozkład antymonotonicznych A i B jest minimalny w sensie częściowego porządku (32).

W dalszych rozważaniach ustalamy rozkłady brzegowe A i B i próbujemy zrozumieć jaki wpływ na asymptotykę ogona X ma struktura zależności wektora (A, B) . Oznaczmy

$$\gamma = \frac{\alpha r}{\alpha + r - 1}.$$

Niech X_{co} oznacza rozwiązanie (2) odpowiadające komonotonicznej parze (A, B) oraz niech h_{co} będzie funkcją h powiązaną z tą parą (25). Dalej, niech h_{ind} będzie funkcją h odpowiadającą niezależnym A i B . W (36) przyjmujemy, że zmienna losowa X jest rozwiązaniem (2), ale nie wiemy o strukturze zależności wektora (A, B) . W poniższym twierdzeniu założenie (35) dotyczy tylko rozkładów brzegowych A i B .

Twierdzenie 4 (Theorem 6.1 w [H2]).

Założmy, że dla funkcji f i k zdefiniowanych w (22) mamy

$$f \in \mathcal{R}_r, \quad r \in (1, +\infty), \quad \text{oraz} \quad k \in \mathcal{R}_\alpha, \quad \alpha \in (1, +\infty). \quad (35)$$

Niech X będzie rozwiązaniem (2). Wtedy zachodzi

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{co}(x)} \leq - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \quad (36)$$

Dla komonotonicznych A i B mamy

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X_{co} > x)}{h_{co}(x)} = - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \quad (37)$$

Dowód górnego ograniczenia (36) oparty jest na Lematach 1 i 2. Rozważamy najpierw (17) dla komonotonicznych A i B i funkcji ϕ_C , zdefiniowanej przez równość $\phi_C^* = Ch_{co}^*$. Wtedy z nierówności wykładniczej Markowa dla $z, x > 0$ mamy

$$\log \mathbb{P}(X > x) \leq \log \mathbb{E}[e^{zX}] - zx \stackrel{(33)}{\leq} \log \mathbb{E}[e^{zX_{co}}] - zx \stackrel{(18)}{\leq} \phi_C(z) - zx + c$$

gdzie w drugiej nierówności skorzystano z Lematu 2. Biorąc $\inf_z$ prawej strony, otrzymujemy $-(\phi_C^*)^* + c = -Ch_{co}(x) + c$. Biorąc następnie supremum po stałych C , dla których (17) jest spełnione otrzymujemy (36). Jeśli A i B są komonotoniczne, to (36) wraz z Twierdzeniem 3 implikują (37). Należy podkreślić, że główna trudność w tym dowodzie jest ukryta w badaniu zachodzenia (17).

Więcej można powiedzieć o sytuacji, gdy (A, B) dominują lub są dominowane (w sensie (32)) przez zmienne niezależne. Powiemy, że A i B są *ujemnie kwadrantowo zależne* (NQD), jeśli (32) zachodzi dla niezależnych A' i B' oraz że A' i B' są *dodatnio kwadrantowo zależne* (PQD), jeśli (32) zachodzi dla niezależnych A i B .

Przy założeniach Twierdzeń 4 i 5 mamy [H2, Theorem 4.1 (d)]

$$h_{ind}(x) \sim \frac{\alpha + r - 1}{\alpha - 1} \left(\frac{\alpha - 1}{r} \right)^{r/(\alpha+r-1)} h_{co}(x).$$

Twierdzenie 5 (Theorem 6.1 w [H2]).

Założmy, że (35) jest spełnione oraz X jest rozwiązaniem (2).

(i) Jeśli A i B są ujemnie kwadrantowo zależne, to

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \leq - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \quad (38)$$

(ii) Jeśli A i B są dodatnio kwadrantowo zależne, to

$$\begin{aligned} - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1} &\leq \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \mathbb{P}(X > x)}{h_{ind}(x)} \leq - \frac{\alpha - 1}{\alpha + r - 1} \left(\frac{r}{\alpha - 1} \right)^{r/(\alpha+r-1)} \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

4.3.5 Praca [H3]

Przedstawimy teraz pokrótce znane wyniki opisujące asymptotykę ogona X w tzw. sytuacji ciężkoogonowej, tworząc w ten sposób kontekst do wyników otrzymanych przez habilitanta. Być może najciekawszy (zarówno pod względem matematycznym jak i możliwych zastosowań), a na pewno najlepiej opisany przypadek dotyczy założenia typu Cramerowskiego na A , czyli sytuacji gdy istnieje stała $\kappa > 0$, dla której $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$. Oczywiście warunek ten stanowi przykład sytuacji ciężkoogonowej (13). Poniżej prezentujemy podstawowy wynik przy założeniu Cramerowskim w sformułowaniu Goldiego [27], który wcześniej rozważany był również przez Kestena [41] i Grincievičiusa [32]. Przez a_+ będziemy oznaczali $\max\{a, 0\}$.

Twierdzenie 6 (Kesten-Grincievičius-Goldie).

Założmy, że $A \geq 0$ p.n. Jeśli istnieje stała $\kappa > 0$, taka że $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$, $\mathbb{E}[|B|^\kappa] < +\infty$, $m_\kappa = \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$ oraz rozkład warunkowy $\log(A) \mid A > 0$ jest niearytmetyczny, to dla X spełniającego (2) zachodzi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\mathbb{E}[(AX + B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} \in [0, +\infty). \quad (40)$$

Rozkład prawdopodobieństwa nazywamy *niearytmetycznym*, jeśli jego nośnik nie jest zawarty w $d\mathbb{Z}$ dla dowolnego $d > 0$. Zauważmy, że warunki dostateczne (8) istnienia rozwiązania X są implikowane przez założenia $\mathbb{E}[|B|^\kappa] = 1$ i $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ (przypadek $\mathbb{P}(A = 1) = 1$ jest wykluczony przez założenie o niearytmetyczności rozkładu). Przy dodatkowym założeniu (9), prawa strona (40) jest ściśle dodatnia. Dowód powyższego Twierdzenia zwykle jest przeprowadzany za pomocą teorii odnowy [41, 32, 27]. Znane są jednak bardziej bezpośrednie argumenty, w których identyfikuje się istotne składniki sumy (11) [13, 10]. Twierdzenie to opisuje bardzo ciekawy mechanizm: ograniczone A i B mogą generować X o ciężkim ogonie, a asymptotyka tego ogona wynika z klastrowania dużych wartości iloczynów $(B_{n+1} \prod_{k=1}^n A_k)_{n \geq 1}$ w sumie (11). Przy założeniu $\mathbb{E}[|B|^\kappa] < +\infty$, rozkład B ma wkład w asymptotykę ogona X tylko poprzez stałą w (40) i w tym sensie można powiedzieć, że to rozkład A dominuje tutaj rozkład B .

Drugi wynik, istotny w kontekście omawianej pracy przypisywany jest parze Grincievičius-Grey [32, 31]. Rozważali oni założenia prowadzące do ciężkoogonowego X , w których wkład

do asymptotyki ogona X dominowany był przez B . Założenia poniższego twierdzenia dopuszczają oba reżimy na rozkład A , (13) oraz (14).

Przypomnijmy, że $\mathcal{R}_0$ jest klasą funkcji wolnozmieniających się.

Twierdzenie 7 (Grincievičius-Grey).

Założmy, że $A \geq 0$ p.n. Jeśli dla pewnych $\alpha, \varepsilon > 0$ oraz $L \in \mathcal{R}_0$ mamy $\mathbb{P}(B > x) = L(x)/x^\alpha$, $\mathbb{E}[A^\alpha] < 1$ oraz $\mathbb{E}[A^{\alpha+\varepsilon}] < +\infty$, to dla X spełniającego (2) zachodzi

$$\mathbb{P}(X > x) \sim \frac{1}{1 - \mathbb{E}[A^\alpha]} \mathbb{P}(B > x). \quad (41)$$

Zauważmy, że w obu powyższych twierdzeniach struktura zależności wektora (A, B) nie jest istotna, tzn. założenia dotyczą wyłącznie rozkładów brzegowych (A, B) . Struktura zależności (A, B) objawia się (albo czasem nawet nie) tylko w stałej, co jest typową obserwacją dla przypadków ciężkoogonowych (patrz również [23, 43, 19]). Przedmiotem naszych badań był przypadek mieszczący się niejako pomiędzy założeniami Twierdzeń 6 i 7.

Rozważmy parę (A, B) spełniającą następujące założenia: dla pewnych stałych $\alpha, \kappa, \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A^\kappa] &= 1 \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty \\ \text{oraz} \quad &\text{rozkład warunkowy } \log(A) \mid A > 0 \text{ jest niearytmetyczny} \\ \text{oraz} \quad &\mathbb{P}(B > x) = L(x)x^{-\alpha} \text{ dla wolnozmieniającej się funkcji } L. \end{aligned} \quad (42)$$

Dla uproszczenia poniższej prezentacji rozważmy dodatkowo warunek $\mathbb{P}(B \geq 0) = 1$. Jeśli poza założeniami (42), spełniony jest jeden z poniższych dwóch warunków:

- $\alpha > \kappa$,
- $\alpha = \kappa$ i $\int_0^{+\infty} L(t)/t \, dt < +\infty$,

to mamy $\mathbb{E}[B^\kappa] = \kappa \int_0^{+\infty} t^{\kappa-1} \mathbb{P}(B > t) dt = \kappa \int_0^{+\infty} t^{\kappa-\alpha-1} L(t) < +\infty$, więc z Twierdzenia 6 otrzymujemy $x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \rightarrow c$ dla $c = \mathbb{E}[(AX + B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa] / (\kappa m_\kappa)$.

Jeśli $\alpha < \kappa$, to z kolei z Twierdzenia 7 uzyskujemy $x^\alpha \mathbb{P}(X > x) L(x) \rightarrow \tilde{c}$ dla $\tilde{c} = 1/(1 - \mathbb{E}[A^\alpha])$. Rzeczywiście, z nierówności Jensena mamy wtedy $\mathbb{E}[A^\alpha] < (\mathbb{E}[A^\kappa])^{\alpha/\kappa} = 1$.

Do pełnego opisu tej ciężkoogonowej sytuacji brakuje przypadku „pomiędzy”, czyli

- $\alpha = \kappa$ i $\int_0^{+\infty} L(t)/t \, dt = +\infty$.

Zauważmy, że przy tych założeniach stałe c i $\tilde{c}$ wybuchają. Należy się zatem spodziewać istotnie innego typu asymptotyki oraz mechanizmu za nią stojącego, niż te opisane przez Twierdzenia 6 i 7. Przy tych założeniach, analiza ogona rozwiązania równania (1), gdy losowa Lipschitzowska funkcja Ψ spełnia warunek

$$\max\{Ax, B\} \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \quad x \in \mathbb{R} \text{ p.n.} \quad (43)$$

była tematem prac [H3] i [H4].¹

W literaturze rozważanych było kilka innych twierdzeń, w których badano ogon rozwiązania (2) gdy któreś z założeń Twierdzenia 6 nie było spełnione. Poniżej prezentujemy główne założenia, przy których znana jest asymptotyka ogona.² Pierwsze trzy punkty dotyczą sytuacji, gdy rozkład warunkowy $\log(A) \mid A > 0$ jest niearytmetyczny:

¹W rzeczywistości w Theorem 1.3 w [H4] rozważano nieznacznie ogólniejsze ograniczenia na Ψ .

²W każdym z tych wyników potrzebne są jeszcze dodatkowe, często bardzo techniczne, założenia.

- (a) $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$, $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] = +\infty$, $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$ [43] i $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$ [39],
- (b) $\mathbb{E}[A^\kappa] < 1$, $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$, $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$ [43],
- (c) $\mathbb{E}[A^\kappa] < 1$, $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$, $\mathbb{E}[B^{\kappa+\varepsilon}] = +\infty$ oraz $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$ [19],
- (d) $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$, $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$, $\mathbb{E}[B^\kappa] < +\infty$, rozkład warunkowy $\log(A) \mid A > 0$ jest arytmetyczny [44].

Dowody twierdzeń w pracach [43, 44] opierają się na podejściu zaprezentowanym przez Goldiego [27], czyli na *uwikłanym równaniu odnowy* (ang. *implicit renewal theory*). W pracy [39] znaleziono asymptotykę uciętego momentu X (a nie ogona), tzn. funkcji $x \mapsto \mathbb{E}[X^\kappa I_{X \leq x}]$, gdy $x \rightarrow +\infty$. Metoda dowodowa jest jednak zupełnie inna niż w [27], ponieważ oparty jest na wielokrotnym zastosowaniu tauberowskiego Twierdzenia Karamaty. Dowód [19] z kolei ideologicznie jest bardzo blisko oryginalnemu dowodowi Twierdzenia 7.

Metodologia Goldiego [27] została wykorzystana również w pracach [H3] i [H4] i z tego względu wyprowadzimy ją poniżej. Opiszemy jej główne założenia, a następnie podkreślimy podstawowe różnice i problemy, które pojawiają się przy naszych założeniach, a które nie występowały w [27]. Przyjęte przez nas założenia wymagały istotnych zmian w dowodzie w stosunku do [27].

W pierwotnym zamyśle obie prace [H3] i [H4] stanowiły jedną całość i tak też można je rozpatrywać. Motywacja do powstania tych prac pochodzi z [20], gdzie rozważano wektorową (w $\mathbb{R}^2$) wersję równania (2), gdy A jest pewną szczególną macierzą 2×2 górną trójkątną. Problem znalezienia asymptotyki ogonów rozkładów brzegowych wektora X jest wtedy bardzo zbliżony do problemu, który rozważamy tutaj.

Praca [H3] dotyczy równania maksymalnego (3). W pracy [H4] analizowano równanie afiniczne (2) oraz, z wykorzystaniem wyników z [H3], analizowano ogólne równanie (1), gdy Ψ spełnia (43). Należy tutaj podkreślić, że analiza rozwiązania równania maksymalnego jest bardzo zbliżona do analizy równania afinicznego. W szczególności, jeśli (8) jest spełnione, to wiemy, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie (3) oraz zachodzi $X \stackrel{d}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \{B_n \prod_{j=1}^{n-1} A_j\}$. Co więcej, Goldie w [27] również badał ogon rozwiązania równania maksymalnego tą samą metodą co równania afinicznego. Przy innych założeniach równania maksymalne oraz powiązane z nimi zaburzone błędzenia losowe były analizowane m.in. w [3] oraz [49]. Przejdziemy teraz do opisu metodologii Goldiego.

Uwikłane równanie odnowy

Przy założeniu $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$ miara borelowska zdefiniowana przez

$$\mu_A(\cdot) = \mathbb{E}[A^\kappa \mathbf{1}_{\log(A) \in \cdot}] \quad (44)$$

jest probabilistyczna. Pierwszy moment miary μ_A wynosi $\int_{\mathbb{R}} t \mu_A(dt) = \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)]$. Wartość ta jest dodatnia, być może nieskończona. Wynika to ze ścisłej wypukłości funkcji $[0, +\infty) \ni \alpha \mapsto \mathbb{E}[A^\alpha]$ (gdy rozkład A nie jest jednopunktowy) oraz z faktu, że funkcja ta przyjmuje wartość 1 w punktach $\alpha = 0$ i $\alpha = \kappa$. Zatem jej pochodna w κ , równa właśnie $\mathbb{E}[A^\kappa \log(A)]$, jest ściśle dodatnia.

W dalszych rozważaniach X jest rozwiązaniem (2) lub (3). Zdefiniujmy dwie funkcje rzeczywiste:

$$f(x) = e^{\kappa x} \mathbb{P}(X > e^x) \quad \text{oraz} \quad \psi(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{P}(X > e^x) - \mathbb{P}(AX > e^x)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (45)$$

przy czym będziemy rozważać funkcję ψ , gdy A i X są niezależne. Wtedy

$$\begin{aligned} f(x) &= \psi(x) + e^{\kappa x} \mathbb{P}(AX > e^x) = \psi(x) + e^{\kappa x} \mathbb{E} \left[\mathbb{P} \left(X > e^{x - \log(A)} \mid A \right) \right] \\ &= \psi(x) + \mathbb{E}[A^\kappa f(x - \log A)] = \psi(x) + \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A(dz). \end{aligned}$$

W trzeciej równości powyżej skorzystano z niezależności A i X oraz z definicji funkcji f . Jest to tzw. równanie odnowy z niewiadomą funkcją f . Od klasycznej sytuacji odróżnia je fakt, że funkcja ψ również nie jest znana oraz jest silnie związana z funkcją f . Co zaskakujące, nie przeszkadza to w badaniu asymptotycznych własności f .

Poprzez iterację powyższego równania otrzymujemy dla $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) \mu_A^{*k}(dz) + \int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A^{*n}(dz),$$

gdzie μ_A^{*n} jest n -krotnie splecioną ze sobą miarą μ_A oraz $\mu_A^{*0} = \delta_0$. Pokażemy teraz, że drugi składnik prawej strony powyższego równania punktowo zbiega do zera, gdy $n \rightarrow +\infty$. Z nierówności Markowa mamy $f(x) \leq \mathbb{E}[X^{\kappa-\varepsilon}] e^{\varepsilon x}$ dla $x \in \mathbb{R}$ i $\varepsilon \in (0, \kappa)$, przy czym z (11) szybko wynika, że $\mathbb{E}[X^{\kappa-\varepsilon}] < +\infty$ dla $\varepsilon \in (0, \kappa)$. Stąd

$$\int_{\mathbb{R}} f(x - z) \mu_A^{*n}(dz) \leq \mathbb{E}[X^{\kappa-\varepsilon}] \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon(x-z)} \mu_A^{*n}(dz) = \mathbb{E}[X^{\kappa-\varepsilon}] \mathbb{E}[A^{\kappa-\varepsilon}]^n e^{\varepsilon x} \rightarrow 0,$$

gdy $n \rightarrow +\infty$. Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ otrzymujemy zatem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) \mu_A^{*k}(dz) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x - z) H_{\mu_A}(dz), \quad (46)$$

gdzie

$$H_{\mu} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^{*n}$$

jest tzw. *miarą odnowy* dla miary probabilistycznej μ .

Fundamentalnym wynikiem w teorii odnowy jest Twierdzenie Blackwella, które mówi, że jeśli $m_{\mu} := \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \in (0, +\infty]$ oraz rozkład μ jest niearytmetyczny, to dla każdego $t > 0$ zachodzi [8]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H_{\mu}((x, x + t]) = \frac{t}{m_{\mu}}. \quad (47)$$

Istnieje również wersja powyższego wyniku dla miar arytmetycznych. Zauważmy, że założenie o niearytmetyczności rozkładu warunkowego $\log(A) \mid A > 0$ implikuje, że miara μ_A również jest niearytmetyczna. Dalej będziemy rozważali sytuację, gdy miary μ i μ_A są niearytmetyczne. Twierdzenie Blackwella implikuje tzw. *kluczowe twierdzenie o odnowie* (ang. *Key Renewal Theorem*), które pozwala znajdować granice przy $x \rightarrow +\infty$ wyrażeń typu $\int_{\mathbb{R}} g(x - t) H_{\mu}(dt)$. O funkcji g zakłada się wtedy, że jest *bezpośrednio całkowalna w sensie Riemanna* (d.R.i., ang. *directly Riemann integrable*), tzn. jej górne i dolne sumy Riemanna

na całej (nieograniczonej) dziedzinie zbiegają do tej samej skończonej granicy, gdy średnica podziału zbiega do zera. W takiej sytuacji otrzymujemy [4, Theorem 4.2]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} g(x-t) H_{\mu}(dt) = \frac{1}{m_{\mu}} \int_{\mathbb{R}} g(t) dt.$$

W Twierdzeniu 6 założono $\mathbb{E}[|B|^{\kappa}] < +\infty$. Warunek ten implikuje, że funkcja ψ jest całkowalna, ale nie wszystkie funkcje całkowalne są d.R.i. Problem ten omija się poprzez zastosowanie tzw. operatora gładzącego $f \mapsto \hat{f}: t \mapsto \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} f(x) dx$. Operator ten przeprowadza funkcje całkowalne na funkcje d.R.i. [27, Lemma 9.2]. Przykładając go do obu stron (46) otrzymujemy

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(t-z) H_{\mu_A}(dz).$$

Zatem jeśli $\mathbb{E}[|B|^{\kappa}] < +\infty$, to kluczowe twierdzenie o odnowie implikuje, że

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{f}(t) = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} x \mu_A(dx)} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(x) dx = \frac{1}{\mathbb{E}[A^{\kappa} \log(A)]} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx.$$

Łatwo pokazać, że prawa strona powyższej równości jest tożsama prawej stronie (40). Ostatecznie, elementarny argument tauberowski [27, Lemma 9.3] implikuje, że

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{f}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\kappa} \mathbb{P}(X > x),$$

co kończy dowód Goldiego.

W pracach [H3] i [H4] rozważano warunek $\mathbb{E}[B_+^{\kappa}] = +\infty$, który implikuje, że funkcja ψ nie jest całkowalna, więc powyższy argument musi być odpowiednio dostosowany. W naszym podejściu regularyzacja równania (46) nie jest potrzebna. Przy dodatkowym założeniu $\mathbb{P}(B > x) = L(x)/x^{\kappa}$, $L \in \mathcal{R}_0$, zdefiniujemy dwie funkcje rzeczywiste

$$\psi_B(x) := e^{\kappa x} \mathbb{P}(B > e^x) = L(e^x) \quad \text{oraz} \quad \psi_0(x) := \psi(x) - \psi_B(x). \quad (48)$$

Wtedy (46) sprowadza się do

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} L(e^{x-z}) H_{\mu_A}(dz) + \int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz). \quad (49)$$

Jeśli X jest rozwiązaniem równania maksymalnego (3), to można pokazać, bez odwoływania się do kluczowego twierdzenia o odnowie, że $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz)$ ma skończoną granicę oraz ją znaleźć, zob. dowód [H3, Theorem 4.2]. W takiej sytuacji pozostaje badanie asymptotyki dominującego składnika, czyli $\int_{\mathbb{R}} L(e^{z-x}) H_{\mu_A}(dz)$.

Poniższe twierdzenia są głównym technicznym wynikiem dotyczącym teorii odnowy w pracy [H3]. Twierdzenia te pozwalają znaleźć asymptotykę pierwszego (punkt (i) poniżej) i drugiego (punkt (ii)) rzędu dominującego składnika prawej strony (49).

Powiemy, że rozkład μ jest *silnie niekratowy* (ang. *strongly non-lattice*), jeśli

$$\limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{itz} \mu(dt) \right| < 1.$$

Twierdzenie 8.

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa, dla którego $m_{\mu} = \int_{\mathbb{R}} x \mu(dx) \in (0, +\infty)$, oraz niech L będzie funkcją wolnozmieniającą się, dla której $\int_1^{+\infty} L(t)/t dt = +\infty$.

(i) [H3, Theorem 3.1] *Jeśli rozkład μ jest niearytmetyczny, to*

$$\int_{(0,x]} L(e^{x-z}) H_\mu(dz) \sim \frac{1}{m_\mu} \int_1^{\exp(x)} \frac{L(t)}{t} dt.$$

(ii) [H3, Theorem 3.2 oraz komentarz pod jego sformułowaniem] *Założmy, że rozkład μ jest silnie niekratowy. Przypuśćmy, że dla $\varepsilon, r > 0$ mamy $\int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon t} \mu(dt) < +\infty$ oraz $\mu((-\infty, x]) = o(e^{rx})$. Wtedy*

$$\int_{\mathbb{R}} L(e^{x-z}) H_\mu(dz) = \frac{1}{m_\mu} \int_0^{\exp(x)} \frac{L(t)}{t} dt + O(L(e^x)). \quad (50)$$

Założenie o silnej niekratowości pozwala skorzystać z wyników [52], gdzie przy pewnych dodatkowych założeniach zachodzi

$$H_\mu((-\infty, x)) = \frac{x}{m_\mu} + c + o(e^{-rx}), \quad x \rightarrow \infty,$$

dla pewnych stałych $c, r > 0$. Warunkiem dostatecznym silnej niekratowości miary μ_A jest, by rozkład zmiennej losowej A posiadał nietrywialną składową absolutnie ciągłą względem miary Lebesgue’a [H3, Remark 4.3].

Wiadomo, że jeśli funkcja L jest wolnozmiennająca się, to funkcja $\tilde{L}: x \mapsto \int_1^x L(t)/t dt$ również jest wolnozmiennająca się oraz $\tilde{L}(x)/L(x) \rightarrow +\infty$ gdy $x \rightarrow +\infty$ [7, §3.0]. Oznacza to, że (50) opisuje asymptotykę drugiego rzędu.

Głównym probabilistycznym wynikiem pracy [H3] jest poniższe twierdzenie. Punkt (i) dotyczy asymptotyki pierwszego rzędu, a punkt (ii) asymptotyki drugiego rzędu ogona rozwiązania równania maksymalnego.

Twierdzenie 9 (Theorem 4.2 w [H3]).

Założmy, że

(A-1) $A \geq 0$ p.n. oraz że rozkład warunkowy $\log(A) \mid A > 0$ jest niearytmetyczny,

(A-2) istnieje stała $\kappa > 0$, dla której $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$, $m_\kappa := \mathbb{E}[A^\kappa \log(A)] < +\infty$,

(B-1) $L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x) \in \mathcal{R}_0$ oraz $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$.

Niech X będzie rozwiązaniem (3).

(i) *Jeśli istnieje stała $\eta \in (0, \kappa)$, dla której $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$, to*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt \sim \frac{1}{\kappa m_\kappa} \mathbb{E}[B_+^\kappa I_{B \leq x}].$$

(ii) *Jeśli $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$ dla $\varepsilon > 0$ oraz rozkład μ_A zdefiniowany w (44) jest silnie niekratowy, to*

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt - \frac{\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + O(L(x)).$$

Założenie $\mathbb{E}[A^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$ implikuje $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$ dla $\eta \in (0, \kappa)$, skąd z kolei mamy $\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa] < +\infty$.

4.3.6 Praca [H4]

Praca [H4] w głównej mierze dotyczy badania rozwiązań równania afinicznego (2). Uzyskane wyniki wspólnie z wynikami z [H3] dotyczącymi równania maksymalnego (3) są wykorzystywane do znalezienia asymptotyki ogona rozwiązań (1), gdy

$$\max\{Ax, B\} \leq \Psi(x) \leq Ax + B, \quad \text{p.n.}$$

Asymptotyka pierwszego rzędu

Jeśli X jest rozwiązaniem równania afinicznego, to możemy zdefiniować funkcje f i ψ tak samo jak w (45) dla równania maksymalnego i otrzymać (46) oraz (49). Jednak pokazanie, że funkcja ψ_0 jest d.R.i jest dla równania afinicznego dużo trudniejsze. Z tego względu zastosowano modyfikację podejścia Goldiego, zaczerpniętą z pracy [11]. Funkcje f oraz ψ zostały zdefiniowane wzorami

$$f(x) = e^{\kappa x} \mathbb{E}[g(e^{-x}X)] \quad \text{oraz} \quad \psi(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{E}[g(e^{-x}X)] - \mathbb{E}[g(e^{-x}AX)]), \quad x \in \mathbb{R},$$

gdzie g jest funkcją hölderowską aproksymującą indyktor $\mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x)$. Zdefiniujmy $\psi_B(x) = e^{\kappa x} \mathbb{E}[g(e^{-x}B)]$. Taka modyfikacja pozwala uniknąć technicznych trudności związanych z pokazaniem, że funkcja $\psi_0(x) := \psi(x) - \psi_B(x)$ (por. (48)) jest d.R.i. [H4, Proposition 4.3]. Żeby znaleźć asymptotykę funkcji f dla ustalonego g , konieczne jest udowodnienie odpowiedniego twierdzenia o odnowie. Przy założeniach punktu (i) Twierdzenia 8 oraz pewnych technicznych założeniach na funkcję g udowodniono, że [H4, Theorem 3.1]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\int_0^{\exp(x)} L(t)/t \, dt} \int_{\mathbb{R}} \psi_B(x-z) H_{\mu_A}(dz) = \frac{\kappa}{m_\kappa} \int_{[1,+\infty)} g(r) r^{-\kappa-1} dr.$$

Wynik ten ideowo jest bardzo zbliżony do Twierdzenia 8, jednak bardziej techniczny.

W [H4, Theorem 4.1] znajdujemy asymptotykę f dla ustalonej funkcji g . Asymptotyka ta pozwala znaleźć asymptotykę ogona X , zob. dowód [H4, Theorem 1.1]. Poniżej prezentujemy podstawowy wynik otrzymany dla rozwiązań równania afinicznego (2).

Twierdzenie 10 (Theorem 1.1 w [H4]).

Założmy, że

- (A-1) $A \geq 0$ p.n. oraz że rozkład warunkowy $\log(A) \mid A > 0$ jest niearytmetyczny,
- (A-2) istnieje stała $\kappa > 0$, dla której $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$, $m_\kappa := \mathbb{E}[A^\kappa \log A] < +\infty$,
- (B-1) $L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x)$ jest wolnozmiennająca się oraz $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$,
- (AB-1) istnieje stała $\eta \in (0, \kappa) \cap (0, 1]$, dla której $\mathbb{E}[A^\eta B_+^{\kappa-\eta}] < +\infty$.

Jeśli X jest rozwiązaniem (2), to dla $x \rightarrow +\infty$ zachodzi

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim \frac{\mathbb{E}[B_+^\kappa I_{B \leq x}]}{\kappa m_\kappa} \sim \frac{1}{m_\kappa} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt. \quad (51)$$

Struktura zależności wektora (A, B) jest obecna tylko w bardzo słabym założeniu (AB-1). Ponadto, przy rozważanych założeniach, asymptotyka rozwiązania równania afinicznego (Twierdzenie 10) i maksymalnego (Twierdzenie 9) są takie same. Obserwacja ta może być po części wytłumaczona faktem, że w sumie (11) mamy do czynienia z rozkładami podwykładniczymi, dla których zachodzi tzw. zasada jednego dużego skoku (ang. *single big jump principle*). Pomimo, że składniki tej sumy są zależne, zasada ta nadal się tutaj stosuje.

Twierdzenia 9 i 10 implikują następujący wynik dla rozwiązań (1).

Twierdzenie 11 (Theorem 1.3 w [H4]).

Założmy, że założenia (A-1), (A-2), (B-1), (AB-1) z Twierdzenia 10 są spełnione. Jeśli funkcja Ψ spełnia nierówność (43) oraz X jest rozwiązaniem (1), to zachodzi (51).

Wersja Twierdzenia 10 została również udowodniona, w sytuacji, gdy A może przyjmować wartości ujemne. Wtedy założenie (A-1) jest zastępowane przez warunek $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$ oraz niearytmetyczności rozkładu warunkowego $\log(|A|) \mid A \neq 0$, a założenie (B-1) jest zmieniane na: dla $p \in [0, 1]$ oraz $L \in \mathcal{R}_0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(B > x) \sim p x^{-\kappa} L(x) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{P}(B < -x) \sim (1-p)x^{-\kappa} L(x) \quad \text{oraz} \quad \mathbb{E}[|B|^\kappa] = +\infty.$$

Wtedy jeśli $\mathbb{E}[|A|^{\kappa+\varepsilon}] < +\infty$ oraz X jest rozwiązaniem (2), to gdy $x \rightarrow +\infty$ [H4, Theorem 5.2]

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) \sim x^\kappa \mathbb{P}(X < -x) \sim \frac{1}{2\mathbb{E}[|A|^\kappa \log(|A|)]} \int_0^x \frac{L(t)}{t} dt.$$

Co zaskakujące, problem ten da się sprowadzić do sytuacji $A \geq 0$. Dokładniej, można pokazać, że jeśli X spełnia równanie (2) dla $\mathbb{P}(A < 0) > 0$, to X spełnia również równanie

$$X \stackrel{d}{=} \tilde{A}X + \tilde{B}, \quad (\tilde{A}, \tilde{B}) \text{ oraz } X \text{ są niezależne,}$$

gdzie $\mathbb{P}(\tilde{A} \geq 0) = 1$ [54, Lemma 2.1]. Rozkład wektora losowego $(\tilde{A}, \tilde{B})$ nie jest wyznaczony jednoznacznie, ale zawsze można wziąć

$$(\tilde{A}, \tilde{B}) = (A_1 \cdots A_N, B_1 + A_1 B_2 + \dots + A_1 \cdots A_{N-1} B_N),$$

gdzie $N = \inf\{n \in \mathbb{N} : A_n \geq 0\}$ jest skończonym momentem stopu [H4, §5]. Rozkład $\tilde{A}$ dziedziczy wiele własności z rozkładu A , w szczególności warunek $\mathbb{E}[|A|^\kappa] = 1$ łatwo implikuje $\mathbb{E}[\tilde{A}^\kappa] = 1$. Żeby analizować rozkład $\tilde{B}$, poczyniono bardzo prostą, lecz zaskakującą i, według naszej wiedzy, nigdzie nie odnotowaną w literaturze obserwację, że

$$\tilde{B} \stackrel{d}{=} A I_{A < 0} S + B, \quad (A, B) \text{ oraz } S \text{ są niezależne,}$$

gdzie S spełnia równanie afiniczne

$$S \stackrel{d}{=} A I_{A > 0} S + B, \quad (A, B) \text{ oraz } S \text{ są niezależne.}$$

Okazuje się, że przy rozważanych założeniach stosunkowo łatwo jest badać własności rozkładu S , ponieważ asymptotykę S opisuje Twierdzenie 7.

Asymptotyka drugiego rzędu

Żeby udowodnić asymptotykę wyższego rzędu dla ogona X niezbędny jest nie tylko dobry opis składnika dominującego $\int_{\mathbb{R}} \psi_B(x-z) H_{\mu_A}(dz)$, ale również reszty, czyli składnika $\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz)$, przy czym podejście przez funkcje hölderowskie wydaje się tutaj być za słabe. By dokładnie opisać tę resztę rozważano warunek gwarantujący większą regularność miary odnowy H_{μ_A} , niż ta wynikająca z dotychczas przyjętych założeń. W ramach prac znaleziono warunek, przy którym dla pewnej stałej $c > 0$ oraz $\beta \in (0, 1)$ zachodzi

$$H_{\mu_A}((x, x+h]) \leq c h^\beta, \quad x, h \geq 0.$$

Łatwo jest pokazać, że dla dowolnej miary μ o dodatnim pierwszym momencie oraz dowolnej stałej $\varepsilon > 0$ istnieje stała C , taka że $\sup_{x \in \mathbb{R}} H_\mu((x, x+h]) \leq C h$ dla $h > \varepsilon$. Jednak kluczowe były oszacowania dla małych h . Jeśli założymy, że dla pewnego $\beta \in (0, 1)$ mamy

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \geq 0} h^{-\beta} \mathbb{P}(x < \log(A) \leq x+h) < +\infty, \quad (52)$$

to zachodzi również

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \geq 0} h^{-\beta^*} \mu_A((x, x+h]) < +\infty$$

dla pewnego $\beta^* \in (0, \beta) \subset (0, 1)$ [H4, p. 1808]. Powyższy warunek implikuje z kolei istnienie stałej $\tilde{\beta} \in (0, \beta^*) \subset (0, 1)$, dla której mamy [H4, Lemma 2.1]

$$H_{\mu_A}((x, x+h]) \leq c \max\{h, h^{\tilde{\beta}}\}, \quad x, h \geq 0.$$

W [H4, Theorem 4.4] założono mocniejszy warunek niż (52), a mianowicie $\sup_{x \geq 0}$ zostało zastąpione przez $\sup_{x \in \mathbb{R}}$, co było podyktowane potrzebą wynikającą z szacowań w [H4, Lemma 4.7]. Dowód zaczyna się tak samo jak w przypadku dowodu Twierdzenia 9 punkt (ii), jednak jest dużo bardziej techniczny ze względu na fakt, że analiza równania afinicznego jest trudniejsza niż równania maksymalnego. Wynik ponownie opiera się na Twierdzeniu 8 punkt (ii).

Twierdzenie 12 (Theorem 4.4 w [H4]).

Założmy, że

(A-1') *$A \geq 0$ p.n. oraz że rozkład μ_A jest silnie niekratowy,*

(A-2') *istnieje stała $\kappa > 0$, dla której $\mathbb{E}[A^\kappa] = 1$,*

(A-3) *istnieje stała $\beta > 0$, dla której*

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{x \in \mathbb{R}} h^{-\beta} \mathbb{P}(x < \log(A) \leq x+h) < +\infty,$$

(A-4) *istnieje stała $\gamma > \kappa + \kappa^2/\beta$, dla której $\mathbb{E}[A^\gamma] < +\infty$,*

(B-1) *$L(x) := x^\kappa \mathbb{P}(B > x)$ jest wolnozmiennająca się oraz $\mathbb{E}[B_+^\kappa] = +\infty$.*

Jeśli X jest rozwiązaniem (2), to dla $x \rightarrow +\infty$ zachodzi

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} + \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + O(L(x)) + o(1). \quad (53)$$

Zauważmy, że założenia (A-2') oraz (A-4) implikują (A-2), a założenia (A-2') oraz (B-1) implikują (AB-1).

Zauważmy ponadto, że (53) bardzo przypomina tezę punktu (ii) Twierdzenia 9. Poniżej wytłumaczymy skąd biorą się różnice w opisie reszty w obu tych twierdzeniach. W dowodzie Twierdzenia 9 punkt (ii) wykazano, że gdy X jest rozwiązaniem równania maksymalnego, to dla $\psi_0(x) = e^{\kappa x} (\mathbb{P}(X > e^x) - \mathbb{P}(AX > e^x) - \mathbb{P}(B > e^x))$ zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz) = -\frac{\mathbb{E}[\min\{AX, B\}_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + o(L(e^x)).$$

Gdy X jest rozwiązaniem równania afinicznego to w dowodzie Twierdzenia 12 pokazano jedynie, że

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_0(x-z) H_{\mu_A}(dz) = \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa} + o(1),$$

gdzie w ogólności nie wiadomo czy reszta $o(1)$ jest rzędu $o(L(e^x))$.

Przypomnijmy, że przy (B-1) mamy $\int_0^x L(t)/t dt \rightarrow +\infty$. Jeśli $\liminf_{x \rightarrow +\infty} L(x) > 0$, to (53) implikuje

$$x^\kappa \mathbb{P}(X > x) = \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} + O(L(x)).$$

Jeśli z kolei $\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x) = 0$, to (53) sprowadza się do

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^\kappa \mathbb{P}(X > x) - \frac{\int_0^x L(t)/t dt}{m_\kappa} \right) = \frac{\mathbb{E}[(AX+B)_+^\kappa - (AX)_+^\kappa - B_+^\kappa]}{\kappa m_\kappa}.$$

4.3.7 Praca [H5]

Prace [H1]-[H4] dotyczyły badania asymptotyki ogona rozwiązania równań (1) w $+\infty$. Nośniki tych rozwiązań mogą być jednak ograniczone i zasadne jest wtedy pytanie o asymptotykę ogona przy brzegu tego nośnika. Uzasadnimy najpierw, że problem znalezienia asymptotyki przy skończonym brzegu nośnika (lewym lub prawym), w przypadku równania afinicznego może być zawsze sprowadzony do badania lewego ogona w 0^+ . Niech X będzie rozwiązaniem (2), dla którego $x_0 := \text{ess sup}(X) < +\infty$ oraz powiedzmy, że jesteśmy zainteresowani asymptotyką ogona przy prawym końcu nośnika, tzn. funkcji $\mathbb{P}(X > x)$ dla $x \rightarrow x_0^-$. Problem ten jest równoważny badaniu asymptotyki funkcji $x \mapsto \mathbb{P}(\tilde{X} < x)$ dla $x \rightarrow 0^+$, gdy $\tilde{X} := x_0 - X$. Rzeczywiście, w tej sytuacji jasne jest, że zmienna losowa $\tilde{X}$ jest nieujemna p.n. oraz spełnia równanie afiniczne

$$\tilde{X} \stackrel{d}{=} A\tilde{X} + \tilde{B}, \quad (A, \tilde{B}) \text{ oraz } \tilde{X} \text{ są niezależne,}$$

gdzie $\tilde{B} := x_0(1-A) - B$. Jeśli $x_1 := \text{ess inf}(X) > -\infty$ i jesteśmy zainteresowani lewym ogonem X przy x_1^+ , to łatwo zauważyć, że zmienna losowa $\hat{X} := X - x_1$ jest nieujemna p.n. oraz również spełnia równanie afiniczne. Zauważmy ponadto, że jeśli zmienne losowe A i B są nieujemne p.n., to zmienna losowa X spełniająca (2) również jest nieujemna p.n. (11). Zaczniemy od szeregu definicji.

Niech $\mathcal{R}_0(0^+)$ będzie klasą funkcji wolnozmiennających się w 0^+ , tzn. nieujemnych funkcji mierzalnych zdefiniowanych w otoczeniu 0^+ , spełniających $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(tx)/L(x) = 1$ dla dowolnego $t > 0$. Jasne jest, że jeśli $L \in \mathcal{R}_0$, to $x \mapsto L(1/x) \in \mathcal{R}_0(0^+)$. Powiemy, że zmienna losowa B jest *IED* (tzn. posiada *Inverse Exponential Decay*), jeśli dla $\lambda \geq 0$ i $\rho > 0$ oraz funkcji $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$ zachodzi

$$\mathbb{P}(B < x) = e^{-\frac{\lambda + o(1)}{x^\rho L(x)}}, \quad x \rightarrow 0^+. \quad (54)$$

Takie zmienne losowe oznaczamy przez $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$. Pierwszą istotną obserwacją w pracy [H5] jest spostrzeżenie, że jeśli X_i jest $\text{IED}_L^\rho(\lambda_i)$ dla $i = 1, 2$ oraz X_1 i X_2 są niezależne, to [Theorem 3.10, H5]

$$X_1 + X_2 \text{ jest } \text{IED}_L^\rho \left(\left(\lambda_1^{1/(1+\rho)} + \lambda_2^{1/(1+\rho)} \right)^{1+\rho} \right).$$

Dowód tego faktu opiera się na tauberowskim Twierdzeniu de Bruijna. Powyższy wynik przy dodatkowych założeniach został następnie w pracy uogólniony na nieskończone sumy (Sekcja 4), procesy ARMA o stałych współczynnikach (Seksje 5 i 6) oraz rozwiązania równań afinicznych (Seksja 7). Ograniczymy się tutaj do prezentacji wyników z Sekcji 7, ponieważ jest to sekcja bezpośrednio powiązana z problemem będącym główną motywacją pracy (o którym dalej), a także najciekawsza matematycznie.

Przypomnijmy, że zmienne losowe A i B są dodatnio kwadrantowo zależne (PQD), jeśli

$$\mathbb{P}(A > x, B > y) \geq \mathbb{P}(A > x)\mathbb{P}(B > y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 13 (Theorem 7.6 w [H5]).

Założmy, że (8) jest spełnione, A i B są nieujemne oraz dodatnio kwadrantowo zależne. Jeśli

$$B \text{ jest IED}_L^\rho(\lambda), \tag{55}$$

dla $\rho > 0$, $\lambda \geq 0$ i $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$ oraz X jest rozwiązaniem (2), to

$$X \text{ jest IED}_L^\rho(\Lambda),$$

dla

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\left(1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}\right)^{1+\rho}}, \tag{56}$$

gdzie $a_- := \text{ess inf}(A)$.

Dowód powyższego twierdzenia jest stosunkowo podobny do dowodu punktów (i) i (ii) Twierdzenia 2 z pracy [H2]. Opiera się on na analizie asymptotyki transformaty Laplace'a X i odpowiednim twierdzeniu tauberowskim. Zdefiniujemy

$$\psi_X(z) := -\log \mathbb{E}[\exp(-zX)] \quad \text{ i } \quad \psi_B(z) := -\log \mathbb{E}[\exp(-zB)].$$

Wtedy z (10) mamy dla $z > 0$

$$\begin{aligned} e^{-\psi_X(z)} &= \mathbb{E}[e^{-zX}] = \mathbb{E}[e^{-z(AX+B)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{-z(AX+B)} \mid A, B]] \\ &= \mathbb{E}[e^{-zB} \mathbb{E}[e^{-zAX} \mid A, B]] = \mathbb{E}[e^{-\psi_X(zA)-zB}], \end{aligned} \tag{57}$$

gdzie skorzystano z niezależności X i (A, B) .

Przy założeniu (55) asymptotyka funkcji ψ_B wynika z tauberowskiego twierdzenia de Bruijna. Można z niego wywnioskować, że nieujemna zmienna losowa B jest IED_L^ρ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\psi_B(z) \sim (f^*)^\leftarrow(z), \quad z \rightarrow +\infty, \tag{58}$$

gdzie $f(x) = \lambda x^{\rho+1}/L(1/x)$, f^* jest wypukłym sprzężeniem funkcji f oraz $g := (f^*)^\leftarrow$ jest dowolną funkcją spełniającą $f^*(g(x)) \sim x \sim g(f^*(x))$, gdy $x \rightarrow \infty$.³

Głównym krokiem w dowodzie Twierdzenia 13 jest pokazanie, że (57) oraz (58) implikują

$$\psi_X(z) \sim \frac{1}{1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}} \psi_B(z) \sim \frac{1}{1 - a_-^{\rho/(1+\rho)}} (f^*)^\leftarrow(z), \quad z \rightarrow +\infty.$$

³Prezentujemy tutaj sformułowanie twierdzenia de Bruijna z [H2, Theorem 2.4].

Mając powyższą asymptotyczną równoważność, możemy zastosować odwrotną implikację twierdzenia de Bruijna by otrzymać tezę twierdzenia.

Drugi z ważnych wyników pracy [H5] dotyczy twierdzenia o dolnej obwiedni ciągu $(X_n)_{n \geq 0}$ zdefiniowanego w (4).

Twierdzenie 14 (Theorem 7.8 w [H5]).

Założmy, że A i B są dodatnio kwadrantowo zależne, $\mathbb{P}(A \in [0, \beta]) = 1$ dla pewnego $\beta \in (0, 1)$ oraz $\mathbb{E}[\max\{\log(B), 0\}^s] < +\infty$ dla każdego $s > 0$. Jeśli B jest $\text{IED}_L^\rho(\lambda)$ dla $\rho > 0$, $\lambda \geq 0$ oraz $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$, to dla ciągu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanego w (4) dla $X_0 = 0$ mamy

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{g(1/\log(n))} = \Lambda^{1/\rho} \quad \text{p.n.},$$

gdzie Λ jest zdefiniowana w (56), a g jest funkcją asymptotycznie odwrotną do funkcji $x \mapsto x^\rho L(x)$.

Dowód Twierdzenia 14 korzysta z opisu ogona rozkładu stacjonarnego ciągu $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, zob. (12), otrzymanego w Twierdzeniu 13. Dla $c > 0$ zdefiniujmy ciąg zdarzeń $(A_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$ wzorem

$$A_n(c) := \left\{ \frac{X_n}{g(1/\log(n))} \leq c \Lambda^{1/\rho} \right\}$$

Korzystając z Lematów Borela-Cantellego pokazano, że z prawdopodobieństwem 1 dla dowolnego $c \in (0, 1)$ zdarzenia $(A_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$ zachodzą skończenie wiele razy, a dla $c > 1$ zachodzą nieskończenie wiele razy.

Główną motywacją do powyższych badań były prace nad procesami stochastycznymi typu Fleminga-Viota [15]. Okazuje się, że procesy tego typu, blisko związane z procesami gałązkowymi, czasami mogą być opisane teorią równań afinicznych. Następujący proces jest właśnie takim przykładem: rozważmy dwie cząstki w $\mathbb{R}_+^1$ poruszające się zgodnie z niezależnymi ruchami Browna startującymi z tego samego punktu w $(0, \infty)$; w momencie, gdy jedna z cząstek uderzy w 0, zostaje zabita, a druga cząstka rozdziela się na dwie cząstki, poruszające się dalej zgodnie z niezależnymi ruchami Browna; ten schemat jest powtarzany. Niech T_n będzie n -tym momentem uderzenia cząstki w 0, a Y_n położeniem dalszej cząstki w momencie T_n . Można wtedy pokazać bezpośrednim rachunkiem, że ciąg $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zadany wzorem dla $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \frac{Y_{n-1}^2}{Y_n^2}, \quad B_n = \frac{T_n - T_{n-1}}{Y_n^2}, \quad Y_0 = 1, \quad T_0 = 0$$

jest ciągiem i.i.d., a dla $X_n = T_n/Y_n^2$ w sposób trywialny zachodzi (4) z $X_0 = 0$, zob. [16, §7]. Podkreślmy, że rozkład wektora (A, B) dla tego szczególnego procesu nie spełnia założeń Twierdzeń 13 i 14. Twierdzenia których założenia obejmują ten przypadek zawarte są w pracy [16], będącej kontynuacją [H5].

Wedle naszej wiedzy, Twierdzenie 14 jest pierwszym tego typu wynikiem otrzymanym dla ciągu $(X_n)_{n \geq 0}$ i otwiera ono drogę do wielu nowych hipotez. W szczególności, przy założeniach na (A, B) rozważanych w pracach [H1] i [H2] powinno być możliwe znalezienie jawnej funkcji g oraz stałej C , dla których

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{g(n)} = C \in (0, \infty) \quad \text{p.n.}$$

4.4 Opis wkładu habilitanta w osiągnięcie naukowe

Prace [H1] i [H2] są samodzielne.

Praca [H3]:

- Zarówno sformułowania jak i dowody głównych technicznych wyników pracy, czyli twierdzeń o odnowie Theorem 3.1 i Theorem 3.3 stanowią indywidualny wkład habilitanta.
- Dowód punktu (i) Theorem 4.2 został przeprowadzony wspólnie z prof. E. Damek przy porównywalnym wkładzie autorów.
- Sformułowanie oraz dowód asymptotyki drugiego rzędu, czyli punktu (ii) Theorem 4.2, są samodzielnym dziełem habilitanta.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H4]:

- Podstawowy wynik dotyczący równania afinicznego, czyli Theorem 1.1 (wraz ze standardowymi konsekwencjami Corollary 1.2, Theorem 1.3 i Theorem 1.4), jest wspólny, a wkład współautorów w jego powstanie jest porównywalny. Zastosowanie funkcji hölderowskich w dowodzie Theorem 1.1 (idea zaczerpnięta z [11]) pochodzi od prof. E. Damek.
- Sformułowanie twierdzenia o odnowie Theorem 3.1 i jego dowód są zasadniczo dziełem habilitanta. Prof. E. Damek miała wkład w pokazanie, że drugi składnik równania (58) szacuje się przez (59).
- Do wkładu habilitanta należy również wypracowanie założenia na rozkład A prowadzącego do wyższej regularności miary odnowy H_{μ_A} (Lemma 2.1), co pozwoliło na wykonywanie szacowań w Theorem 4.4 i Lemma 4.7.
- Sekcja 5 o znakowanym A (w tym sformułowania i dowody Theorem 5.2, Theorem 5.3, oraz Theorem 5.4) jest efektem samodzielnej pracy habilitanta.
- Sformułowanie i dowód Twierdzenia o asymptotyce drugiego rzędu Theorem 4.4 (a także sformułowanie i dowód wyniku pomocniczego, czyli Lemma 4.7) zostały wypracowane przez habilitanta. Prof. E. Damek miała wkład w szacowania na stronach 1809-1810.
- Sformułowania i dowody Proposition 4.3 oraz Lemma 7.1 są autorstwa prof. E. Damek.
- Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.

Praca [H5]:

- Głównym wkładem habilitanta jest zauważenie, że wszystkie wyniki w pracy mogą być rozważane przy ogólniejszych założeniach. Zanim habilitant dołączył do projektu, Definition 1.1 oraz cała praca dotyczyły tylko sytuacji $\rho = 1$ oraz $L = 1$. Uogólnienie na sytuację $\rho > 0$ oraz $L \in \mathcal{R}_0(0^+)$ spowodowało przeformułowanie wszystkich wyników w pracy z wyłączeniem Sekcji 8, która dotyczy konkretnego przykładu. Kluczowe spostrzeżenie jest zawarte w sformułowaniu Theorem 3.10, które mówi, że klasa IED_L^ρ jest

zamknięta ze względu na operację splotu. Obserwacja ta jest w pracy następnie rozszerzana na nieskończone sumy (Theorem 4.4 i Theorem 4.7), procesy ARMA (Theorem 6.2 i Theorem 6.3) oraz rozwiązania równań afinicznych (Theorem 7.6). Dodatkowo, wyniki te są wykorzystywane do udowodnienia twierdzeń typu prawo iterowanego logarytmu (Theorem 6.3 dla procesów ARMA oraz Theorem 7.8 dla ciągu (4)).

- Obecne dowody Theorem 3.10 oraz Theorem 7.6 pochodzą w pełni od habilitanta. Dzięki wykorzystaniu tuberowskiego Twierdzenia de Bruijna, dowody te są znacznie krótsze niż wcześniejsze i to pomimo faktu, że dotyczą ogólniejszej sytuacji.
- W przypadku równań afinicznych (Sekcja 7) habilitant zauważył, że założenie o niezależności A i B może zostać osłabione do dodatniej kwadrantowej zależności.
- Zdecydowana większość pracy redakcyjnej została wykonana przez dr. T. Tadicia. Prof. K. Burdzy sprawował opiekę merytoryczną nad projektem.

5 Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

5.1 Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora.

Wszystkie publikacje habilitanta wydrukowane przed doktoratem wchodziły w skład rozprawy doktorskiej. Tematycznie można je podzielić na dwa nurty:

- Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych - [P1], [P3], [P4],
- Równania funkcyjne na stożkach symetrycznych - [P2], [P5].

[P1] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason's theorem. *Studia Math.* 217 (2013), no. 1, 1–17.

[P2] B. Kołodziejek, Multiplicative Cauchy functional equation on symmetric cones. *Aequ. Math.* 89 (2015), no. 4, 1075–1094.

[P3] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones without invariance of the "quotient". *J. Theor. Probab.* 29 (2016), no. 2, 550–568.

[P4] B. Kołodziejek, Characterization of beta distribution on symmetric cones. *J. Multivar. Anal.* 143 (2016), 414–423.

[P5] B. Kołodziejek, The generalized fundamental equation of information on symmetric cones. *Aequ. Math.* 90 (2016), no. 5, 917–933.

Problem charakteryzacji rozkładów prawdopodobieństwa może być zdefiniowany następująco. Powiedzmy, że pewna rodzina $\mathcal{F}$ rozkładów prawdopodobieństwa posiada pewną własność $\mathcal{P}$. Powiemy, że własność $\mathcal{P}$ charakteryzuje rodzinę $\mathcal{F}$ wtedy i tylko wtedy, gdy rozkłady posiadające własność $\mathcal{P}$ należą do rodziny $\mathcal{F}$. Niezależnościowe charakteryzacje dotyczą własności określonych przez warunek niezależności przekształceń niezależnych zmiennych losowych: rozważmy niezależne zmienne losowe (X, Y) , bijekcję ψ działającą na nośniku wektora (X, Y) oraz zdefiniujmy wektor losowy $(U, V) = \psi(X, Y)$. Powiemy, że (X, Y) spełnia własność niezależności $\mathcal{P}$, jeśli zmienne losowe U i V są niezależne.

Charakteryzacje niezależnościowe mają stosunkowo długą historię. Do najbardziej znanych charakteryzacji niezależnościowych należy charakteryzacja (Kaca-)Bernsteina rozkładu normalnego [40, 5]: *jeśli X i Y są niezależne i niezdegenerowane, to składowe wektora $(U, V) = (X + Y, X - Y)$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y mają rozkład normalny o tej samej wariancji*. Innym przykładem znanej charakteryzacji jest charakteryzacja Lukacsa: *jeśli X i Y są niezależne, nieujemne i niezdegenerowane, to składowe wektora $(U, V) = (X + Y, X/(X + Y))$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y mają rozkłady gamma o tym samym parametrze skali*. Charakteryzacja Lukacsa została uogólniona na zmienne losowe o wartościach w stożku macierzy dodatnio określonych $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ przez Olkina i Rubina w pracy [48], gdzie charakteryzowano uogólnienie rozkładu gamma na $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$, tzw. rozkład Wisharta. Zauważmy, że istnieje wiele możliwości zdefiniowania analogu ilorazu macierzy (jako działania wewnętrznego w $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$). Mierzalne przekształcenie $\mathbf{g}: \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \mapsto \text{GL}(r; \mathbb{R})$, spełniające warunek $\mathbf{g}_\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_\mathbf{x}^\top = I_r$ dla dowolnego $\mathbf{x} \in \text{Sym}(r; \mathbb{R})$, nazywamy *algorytmem dzielenia*. Podstawowymi przykładami algorytmów dzielenia są $\mathbf{g}_\mathbf{x} = \mathbf{x}^{-1/2}$ oraz $\mathbf{g}_\mathbf{x} = t_\mathbf{x}^{-1}$, gdzie $t_\mathbf{x}$ jest macierzą dolną trójkątną z rozkładu Choleskiego macierzy $\mathbf{x} = t_\mathbf{x} \cdot t_\mathbf{x}^\top$.

Bijekcja określona na $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \times \text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$, uogólniająca przekształcenie Lukacsa została zdefiniowana wzorem

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{g}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{g}_{\mathbf{x}+\mathbf{y}}^\top) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (59)$$

Olkin i Rubin w swojej pracy zakładali dodatkowo, że rozkład „ilorazu” $\mathbf{v}$ jest niezmienniczy na obroty, tzn. dla dowolnej macierzy ortogonalnej $\mathbf{o}$ zachodzi $\mathbf{v} \stackrel{d}{=} \mathbf{o} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{o}^\top$. Wynik ten został później rozszerzony na tzw. stożki symetryczne przez Casalis i Letaka [18]. Stożki symetryczne stanowią naturalne uogólnienie stożka macierzy symetrycznych dodatnio określonych $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ [25].

Bobecka i Wesołowski rozważali przekształcenie (59) dla $\mathbf{g}_{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{-1/2}$ oraz pokazali, że założenie o niezmienniczości ilorazu nie jest potrzebne do charakteryzacji rozkładu Wisharta [9]. Ich dowód opierał się na rozwiązaniu powiązanego z problemem równania funkcyjnego na nieznane gęstości. Zakładali oni jednak dużą regularność nieznanymi gęstości. W pracy [P1] istotnie osłabiłem te założenia regularnościowe, a w pracy [P3] rozważałem przekształcenie (59) dla dowolnego algorytmu dzielenia $\mathbf{g}$ oraz udowodniłem, że własność niezależności $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ charakteryzuje uogólnione rozkłady Wisharta, tzw. rozkłady $\mathbf{w}$ -Wisharta, gdzie $\mathbf{w}_{\mathbf{x}} = \mathbf{g}_{\mathbf{x}}^{-1}$ jest tzw. algorytmem mnożenia. Prace te zostały dostrzeżone przez Olkina, „*Fifty years later, Ingram was delighted to see a resurgence of interest in this result, which has been extended to random positive definite matrices with generalized Wishart and Riesz distributions on symmetric cones (Jordan algebras) (e.g. [P3]) and homogeneous cones*” [34].

Gęstość rozkładów $\mathbf{w}$ -Wisharta jest opisywana przez tzw. funkcje $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego, które rozważałem w [P2]. Są to funkcje spełniające następujące równanie funkcyjne

$$f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}).$$

Jasne jest, że $f(\mathbf{x}) = \det(\mathbf{x})^\alpha$ jest funkcją $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego dla dowolnego algorytmu mnożenia $\mathbf{w}$, ale dla szczególnych $\mathbf{w}$ (np. dla macierzy dolnej trójkątnej z rozkładu Choleskiego) funkcję $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego mogą przyjmować inną, ogólniejszą postać. Przedstawione w pracy rozważania są w pełni ogólne i nie wymagają żadnych założeń regularnościowych na nieznane funkcje.

W pracy [51] udowodniono następującą charakteryzację rozkładu beta: *Jeśli X i Y są niezależnymi, niezdegenerowanymi zmiennymi losowymi o wartościach w $(0, 1)$, to zmienne losowe $U = 1 - XY$ oraz $V = (1 - X)/(1 - XY)$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy X i Y mają rozkład beta z odpowiednimi parametrami.* Prace [P4] i [P5] dotyczą uogólnienia tej charakteryzacji na rozkłady o nośnikach w stożku macierzowym lub ogólniej, stożku symetrycznym. Niech $\mathcal{D} = \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}) \cap (I - \text{Sym}_+(r; \mathbb{R}))$ będzie odpowiednikiem przedziału $(0, 1)$ w stożku $\text{Sym}(r; \mathbb{R})$. Rozważmy bijekcję $\psi: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$ zadaną przez

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top, \tilde{g}_{I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top} \cdot (I - \mathbf{x}) \cdot \tilde{g}_{I - \mathbf{w}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{x}}^\top}^\top \right),$$

gdzie $\mathbf{w}$ jest pewnym algorytmem mnożenia, $\mathbf{g}$ jest pewnym algorytmem dzielenia, a I jest macierzą identycznościową. Jak pokazano w [P4], przy założeniu istnienia ciągłych gęstości niezależnych, niezdegenerowanych zmiennych losowych $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ o wartościach w $\mathcal{D}$, niezależność składowych wektora $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ charakteryzuje pewne uogólnione rozkłady beta. Gdy nic nie założymy o postaci algorytmów mnożenia i dzielenia, to gęstości tych rozkładów, podobnie jak w przypadku rozkładów $\mathbf{w}$ -Wisharta, zadane są przez funkcje $\mathbf{w}$ -Cauchy’ego rozważane w pracy [P2]. Charakteryzacja przedstawiona w pracy [P4] w dużej mierze opiera się

na wynikach pracy [P5], gdzie rozważano uogólnienia fundamentalnego równania informacji, czyli znaleziono ogólną postać ciągłych funkcji $f, g, h, k: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniających

$$f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{g}_{I-\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \mathbf{g}_{I-\mathbf{x}}^\top) = h(\mathbf{y}) + k(\tilde{\mathbf{g}}_{I-\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_{I-\mathbf{x}}^\top)$$

dla $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}^2: \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{D}\}$, gdzie $\mathbf{g}$ i $\tilde{\mathbf{g}}$ są dwoma algorytmami dzielenia spełniającymi pewne warunki regularnościowe.

5.2 Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej.

Publikacje po doktoracie, które nie weszły w skład rozprawy habilitacyjnej, można podzielić na następujące trzy nurty tematyczne:

- a) Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych.
- b) Naturalne rodziny wykładnicze oraz rozkład Wisharta na stożkach jednorodnych.
- c) Teoria odnowy.

a) *Niezależnościowe charakteryzacje rozkładów prawdopodobieństwa na stożkach symetrycznych.*

[R1] B. Kołodziejek, The Matsumoto-Yor property and its converse on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* 30 (2017), no. 2, 624–638.

[R2] B. Kołodziejek, A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), no. 2, 976–986.

[R3] B. Kołodziejek, A. Piliszek, Independence characterization for Wishart and Kummer random matrices, *REVSTAT-Stat. J.* 18(3) (2020), 357–373.

Powyższy ciąg prac jest kontynuacją tematyki z doktoratu, czyli niezależnościowych charakteryzacji na stożkach macierzowych i ogólniej, stożkach symetrycznych. Otrzymane wyniki stanowią uogólnienia [45]. W kolejnych pracach rozważano następujące przekształcenia zachowujące niezależność charakteryzowanych rozkładów (praca [R1] dotyczyła charakteryzacji rozkładu Wisharta oraz macierzowego rozkładu GIG), a prace [R2] i [R3] dwóch niepowiązanych bezpośrednio ze sobą charakteryzacji rozkładów Wisharta oraz macierzowego rozkładu Kummera):

$$\begin{aligned}\psi_{[R1]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x}^{-1} - (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1}), \\ \psi_{[R2]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left(\mathbf{x} + \mathbf{y}, (I + (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1})^{1/2} \cdot (I + \mathbf{x}^{-1})^{-1} \cdot (I + (\mathbf{x} + \mathbf{y})^{-1})^{1/2} \right), \\ \psi_{[R3]}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left((I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2}, \right. \\ &\quad \left. \left(I + (I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2} \right)^{1/2} \cdot \mathbf{x} \cdot \left(I + (I + \mathbf{x})^{-1/2} \cdot \mathbf{y} \cdot (I + \mathbf{x})^{-1/2} \right)^{1/2} \right).\end{aligned}$$

Wspólnym i jedynym technicznym założeniem prac [R1]-[R3] jest istnienie ciągłych gęstości charakteryzowanych rozkładów.

b) *Naturalne rodziny wykładnicze oraz rozkład Wisharta na stożkach jednorodnych.*

- [R4] H. Ishi, B. Kołodziejek, Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones, *Colloq. Math.* 158(1) (2019), 45–57.
- [R5] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, Wishart laws and variance function on homogeneous cones, *Probab. Math. Stat.* 39(2) (2019), 337–360.
- [R6] M. Piccioni, B. Kołodziejek, G. Letac, Location and scale behaviour of the quantiles of a natural exponential family, *ESAIM-Prob. Stat.* 24 (2020), 244–251.

Niech V będzie rzeczywistą przestrzenią liniową oraz niech Ω będzie wypukłym, regularnie otwartym (tzn. $\Omega = \text{Int } \overline{\Omega}$) zbiorem w V niezawierającym prostej. Powiemy, że Ω jest *stożkiem jednorodnym* w V , jeśli liniowa grupa automorfizmów $G(\Omega) = \{g \in \text{GL}(V) : g\Omega = \Omega\}$ działa tranzytywnie na Ω , tzn. gdy dla dowolnych $x, y \in \Omega$ istnieje $g \in G(\Omega)$, taka że $y = gx$. Z jednej strony stożki jednorodne są bardzo eleganckim i abstrakcyjnym obiektem. Z drugiej strony, dzięki reprezentacji Ishiego [38], na stożki jednorodne można patrzeć jak na konkretne rodziny macierzy symetrycznych.

Letac w swojej pracy [47] scharakteryzował rodzinę rozkładów Wisharta na $\text{Sym}_+(r; \mathbb{R})$ jako jedyną naturalną rodzinę wykładniczą na $\text{Sym}(r; \mathbb{R})$ niezmienniczą ze względu na działanie $x \mapsto a \cdot x \cdot a^\top$ dla $a \in \text{GL}(r; \mathbb{R})$. Jak zauważył Letac w [47], naturalną strukturą, na której można rozważać tego typu charakteryzacje, są właśnie stożki jednorodne. W [R4] udowodniono, że miara Riesza może zostać scharakteryzowana jako miara generująca naturalną rodzinę wykładniczą, która jest niezmiennicza ze względu na działanie grupy trójkątnej, tzn. przekształcenia $x \mapsto t \cdot x \cdot t^\top$, gdzie t pochodzi z grupy trójkątnej.

Wiadomo, że funkcja wariancji naturalnej rodziny wykładniczej, charakteryzuje tę rodzinę jednoznacznie. W pracy [R5] rozważano naturalną rodzinę wykładniczą scharakteryzowaną przez własność niezmienniczości w pracy [R4] oraz znaleziono postać jej funkcji wariancji. Uogólniono w ten sposób wyniki [33] ze stożków symetrycznych na stożki jednorodne. W dowodach korzystano z reprezentacji macierzowej stożków jednorodnych [38].

Praca [R6] dotyczy charakteryzacji rodzin wykładniczych, jednak nie jest powiązana bezpośrednio z [R4] i [R5]. Rozważano w niej naturalne rodziny wykładnicze na $\mathbb{R}$. Scharakteryzowano rodzinę rozkładów normalnych oraz gamma przez zachowanie kwantyla odpowiednich rozkładów. Załóżmy, że $F = \{P_t : t \in T\}$ będzie naturalną rodziną wykładniczą, gdzie $P_t(dx) = e^{tx} P_0(dx) / \int_{\mathbb{R}} e^{ty} P_0(dy)$. Przyjmijmy, że dla $\alpha \in (0, 1)$ funkcja f_α spełnia

$$P_t((-\infty, f_\alpha(t))) \leq \alpha \leq P_t((-\infty, f_\alpha(t)]), \quad \forall t \in T.$$

Innymi słowy, $f_\alpha(t)$ jest kwantylem rzędu α rozkładu prawdopodobieństwa P_t . Hipoteza badawcza była następująca: *znajomość funkcji f_α dla ustalonego $\alpha \in (0, 1)$ charakteryzuje jednoznacznie rodzinę F .* Udało się udowodnić powyższą hipotezę w dwóch szczególnych przypadkach: gdy funkcja $f_\alpha(t) = t$ dla $t \in T = \mathbb{R}$ oraz gdy $f_\alpha(t) = t^{-1}$ dla $t \in T = (0, \infty)$. W pierwszym z tych dwóch przypadków charakteryzowana jest rodzina rozkładów normalnych, a w drugim rodzina rozkładów gamma. Dowody obu tych przypadków opierają się na równaniu Choquet-Deny.

c) *Teoria odnowy.*

[R7] B. Kołodziejek, The left tail of renewal measure. *Stat. Probab. Lett.* 129 (2017), 306–310.

Przypomnijmy, że jeśli μ jest miarą probabilistyczną, to jej miarą odnowy nazywamy nieograniczoną miarę $H_\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{*n}$. Fundamentalnym wynikiem w teorii odnowy jest Twierdzenie Blackwella (47). Wiadomo, że jeśli $m_\mu := \int_{\mathbb{R}} t \mu(dt) > 0$ oraz $\int_{(-\infty, 0]} t^2 \mu(dt) < \infty$, to $H_\mu((-\infty, x)) < \infty$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ [42]. W tej sytuacji $\lim_{x \rightarrow +\infty} H_\mu((-\infty, -x)) = 0$. Przedmiotem badań [R7] była asymptotyka lewego ogona H_μ , tzn. funkcji $x \mapsto H_\mu((-\infty, -x))$ gdy $x \rightarrow +\infty$. Dowody dotychczasowych wyników były przeprowadzane metodami analitycznymi [52, 17]. Wyniki otrzymane w [R7] opierają się na zamianie miary, którą przedstawimy poniżej. Rozważmy sytuację, gdy $\mu((-\infty, 0)) > 0$ oraz funkcja $g(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t} \mu(dt)$ jest skończona dla pewnego $\theta > 0$. Zdefiniujemy

$$\kappa = \sup\{\theta > 0: g(\theta) < 1\} \quad \text{oraz} \quad \rho = g(\kappa). \quad (60)$$

Zdefiniujemy miarę borelowską ν wzorem $\nu(B) = \frac{1}{\rho} \int_B e^{-\kappa t} \mu(dt)$ dla borelowskich B . Przy założeniu (60), ν jest miarą probabilistyczną o ściśle dodatnim pierwszym momencie. Korzystając z faktu, że $\mu^{*n}(B) = \rho^n \int_B e^{-\kappa t} \nu^{*n}(dt)$, otrzymujemy dla $x > 0$,

$$H_\mu((-\infty, -x)) = \int_{(x, \infty)} e^{-\kappa t} H_\nu^{(\rho)}(dt) = \kappa e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{-\kappa h} H_\nu^{(\rho)}((x, x+h]) dh,$$

gdzie $H_\nu^{(\rho)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \nu^{*n}$. Jeśli $\rho = 1$, to $H_\nu^{(\rho)} = H_\nu$ jest miarą odnowy dla ν . Powyższa równość oznacza, że asymptotyka lewego ogona H_μ może zostać opisana przez twierdzenie typu Blackwella dla innej miary odnowy.

6 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

Habilitant odbył następujące staże w zagranicznych i krajowych ośrodkach akademickich:

- a) 04-14.IV.2019 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- b) 09-17.II.2019 - York University, Toronto, Kanada, współpraca z prof. H. Massam,
- c) 17.III-10.IV.2017 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- d) 26-30.IX.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- e) 15-22.VII.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- f) 25-30.III.2016 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- g) 05-15.VII.2015 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- h) 08-15.XI.2015 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- i) 07-10.XII.2009 - Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Niemcy, *Visiting Scientist*.

Wyjazdy a)-h) miały charakter wyjazdów w ramach współpracy naukowej. Efektem tych wyjazdów są współautorskie prace naukowe:

- Manuskrypt [30] (obecnie w recenzji) o problemie selekcji modelu w klasie gaussowskich modeli grafowych niezmienniczych na działanie grupy permutacji - wyjazdy a) i b),
- Prace [H3] i [H4] - wyjazdy d) i e),
- Praca [R4] - wyjazd h),
- Praca [R5] - wyjazdy c), f) oraz g).

Współpraca z prof. Ishim oraz prof. Graczykiem ma już charakter współpracy stałej. Obecnie pracujemy nad kontynuacją badań rozpoczętych w [30]. Ponadto, wraz z prof. Graczykiem oraz prof. M. Bogdan pracujemy nad powiązaniem metody SLOPE z kolorowymi modelami grafowymi.

7 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

7.1 Międzynarodowe i krajowe nagrody za działalność naukową albo artystyczną.

- a) 2021 - Nagroda indywidualna II stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2019/20,
- b) 2019 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2017/18,
- c) 2017 - Nagroda indywidualna I stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w latach 2015/16,
- d) 2015 - Nagroda indywidualna III stopnia JM Rektora PW za osiągnięcia naukowe w roku 2014 (za wyróżnioną rozprawę doktorską),
- e) 2013 - Stypendium w ramach programu Marszałka Województwa Mazowieckiego „Rozwój nauki - rozwojem regionu” (za innowacyjne badania naukowe w obszarach uznanych za szczególnie istotne dla rozwoju województwa mazowieckiego),
- f) 2011 - Druga nagroda w *XLIV Konkursie na najlepszą pracę studencką z teorii prawdopodobieństwa i zastosowań matematyki*, Wrocław,
- g) 2010 - stypendium FIATa za najlepszą pracę dyplomową na Politechnice Warszawskiej, Wydział Fizyki Politechniki Warszawskiej.

7.2 Doświadczenie dydaktyczne.

- Prowadzone wykłady: *Rachunek prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej, Probabilistyka dla aktuariuszy* - wszystkie Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.
- Prowadzone ćwiczenia i laboratoria: *Rachunek prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej, Probabilistyka dla aktuariuszy, Rachunek prawdopodobieństwa I, Rachunek prawdopodobieństwa II, Przetwarzanie i analiza danych w systemie SAS* - wszystkie Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej; *Probabilistyka* - Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej; *Matematyka 2* - Wydział Instalacji Budowlanych, Hydrotechniki i Inżynierii Środowiska PW; *Matematyka 1, Matematyka 2, Matematyka 3* - Wydział Geodezji i Kartografii PW.
- Przygotowanie skryptów do przedmiotów *Rachunek Prawdopodobieństwa, Wstęp do Matematyki Finansowej* oraz *Modele grafowe* w ramach Zadania 10 (Modyfikacja programów studiów na kierunkach prowadzonych przez Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych) projektu NERW 2 (Nauka - Edukacja - Rozwój - Współpraca) Politechniki Warszawskiej.

7.3 Opieka naukowa nad studentami.

- Obronione 3 prace magisterskie oraz 2 prace licencjackie, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.

8 Literatura

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.* 27(2) (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.*, 50(4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.* 23 (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten’s and Grincevičius–Grey’s assumptions, *Stoch. Process. Their Appl.* 130(3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli* 25(4B) (2019), 3939–3977.
- [P1] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason’s theorem. *Studia Math.* 217 (2013), no. 1, 1–17.
- [P2] B. Kołodziejek, Multiplicative Cauchy functional equation on symmetric cones. *Aequ. Math.* 89 (2015), no. 4, 1075–1094.
- [P3] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones without invariance of the "quotient". *J. Theor. Probab.* 29 (2016), no. 2, 550–568.
- [P4] B. Kołodziejek, Characterization of beta distribution on symmetric cones. *J. Multivariate Anal.* 143 (2016), 414–423.
- [P5] B. Kołodziejek, The generalized fundamental equation of information on symmetric cones. *Aequ. Math.* 90 (2016), no. 5, 917–933.
- [R1] B. Kołodziejek, The Matsumoto-Yor property and its converse on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* 30 (2017), no. 2, 624–638.
- [R2] B. Kołodziejek, A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), no. 2, 976–986.
- [R3] B. Kołodziejek, A. Piliszek, Independence characterization for Wishart and Kummer random matrices, *REVSTAT-Stat. J.* 18(3) (2020), 357–373.
- [R4] H. Ishi, B. Kołodziejek, Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones, *Colloq. Math.* 158(1) (2019), 45–57.
- [R5] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, Wishart laws and variance function on homogeneous cones, *Probab. Math. Stat.* 39(2) (2019), 337–360.
- [R6] M. Piccioni, B. Kołodziejek, G. Letac, Location and scale behaviour of the quantiles of a natural exponential family, *ESAIM-Prob. Stat.* 24 (2020), 244–251.
- [R7] B. Kołodziejek, The left tail of renewal measure. *Stat. Probab. Lett.* 129 (2017), 306–310.

- [1] G. Alsmeyer and P. Dyszewski. Thin tails of fixed points of the nonhomogeneous smoothing transform. *Stochastic Process. Appl.*, 127(9):3014–3041, 2017.
- [2] G. Alsmeyer, A. Iksanov, and U. Rösler. On distributional properties of perpetuities. *J. Theoret. Probab.*, 22(3):666–682, 2009.
- [3] V. F. Araman and P. W. Glynn. Tail asymptotics for the maximum of perturbed random walk. *Ann. Appl. Probab.*, 16(3):1411–1431, 2006.
- [4] K. B. Athreya, D. McDonald, and P. Ney. Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains. *Ann. Probab.*, 6(5):788–797, 1978.
- [5] S. N. Bernstein. On a property which characterizes a gaussian distribution. *Proc. Leningrad Polytech. Inst.*, 217:21–22, 1941.
- [6] J. Bertoin and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.
- [7] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [8] D. Blackwell. Extension of a renewal theorem. *Pacific J. Math.*, 3:315–320, 1953.
- [9] K. Bobecka and J. Wesołowski. The Lukacs-Olkin-Rubin theorem without invariance of the “quotient”. *Studia Math.*, 152(2):147–160, 2002.
- [10] D. Buraczewski and E. Damek. A simple proof of heavy tail estimates for affine type Lipschitz recursions. *Stochastic Process. Appl.*, 127(2):657–668, 2017.
- [11] D. Buraczewski, E. Damek, Y. Guivarc’h, A. Hulanicki, and R. Urban. Tail-homogeneity of stationary measures for some multidimensional stochastic recursions. *Probab. Theory Related Fields*, 145(3-4):385–420, 2009.
- [12] D. Buraczewski, E. Damek, and T. Mikosch. *Stochastic models with power-law tails*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, [Cham], 2016. The equation $X = AX + B$.
- [13] D. Buraczewski, E. Damek, T. Mikosch, and J. Zienkiewicz. Large deviations for solutions to stochastic recurrence equations under Kesten’s condition. *Ann. Probab.*, 41(4):2755–2790, 2013.
- [14] D. Buraczewski, P. Dyszewski, A. Iksanov, and A. Marynych. On perpetuities with gamma-like tails. *J. Appl. Probab.*, 55(2):368–389, 2018.
- [15] K. Burdzy, R. Hołyst, and P. March. A Fleming-Viot particle representation of the Dirichlet Laplacian. *Comm. Math. Phys.*, 214(3):679–703, 2000.
- [16] K. Burdzy, B. Kołodziejek, and T. Tvrtko. Stochastic fixed-point equation and local dependence measure. *arXiv:2004.01850*, pages 1–31, 2020.

- [17] H. Carlsson. Remainder term estimates of the renewal function. *Ann. Probab.*, 11(1):143–157, 1983.
- [18] M. Casalis and G. Letac. The Lukacs-Olkin-Rubin characterization of Wishart distributions on symmetric cones. *Ann. Statist.*, 24(2):763–786, 1996.
- [19] E. Damek and P. Dyszewski. Iterated random functions and regularly varying tails. *J. Difference Equ. Appl.*, 24(9):1503–1520, 2018.
- [20] E. Damek and J. Zienkiewicz. Affine stochastic equation with triangular matrices. *J. Difference Equ. Appl.*, 24(4):520–542, 2018.
- [21] N. G. de Bruijn. The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 15:25–32, 1951.
- [22] P. Diaconis and D. Freedman. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 41(1):45–76, 1999.
- [23] P. Dyszewski. Iterated random functions and slowly varying tails. *Stochastic Process. Appl.*, 126(2):392–413, 2016.
- [24] P. Embrechts and C. M. Goldie. Perpetuities and random equations. In *Asymptotic statistics (Prague, 1993)*, Contrib. Statist., pages 75–86. Physica, Heidelberg, 1994.
- [25] J. Faraut and A. Korányi. *Analysis on symmetric cones*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994. Oxford Science Publications.
- [26] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Ann. of Math. (2)*, 44:423–453, 1943.
- [27] C. M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Ann. Appl. Probab.*, 1(1):126–166, 1991.
- [28] C. M. Goldie and R. Grübel. Perpetuities with thin tails. *Adv. in Appl. Probab.*, 28(2):463–480, 1996.
- [29] C. M. Goldie and R. A. Maller. Stability of perpetuities. *Ann. Probab.*, 28(3):1195–1218, 2000.
- [30] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, and H. Massam. Model selection in the space of gaussian models invariant by symmetry. *arXiv:2004.03503*, pages 1–34, 2020.
- [31] D. R. Grey. Regular variation in the tail behaviour of solutions of random difference equations. *Ann. Appl. Probab.*, 4(1):169–183, 1994.
- [32] A. K. Grincevičius. One limit distribution for a random walk on lines. *Litovsk. Mat. Sb.*, 15(4):79–91, 243, 1975.
- [33] A. Hassairi and S. Lajmi. Classification of Riesz exponential families on a symmetric cone by invariance properties. *J. Theoret. Probab.*, 17(3):521–539, 2004.
- [34] L. V. Hedges and M. D. Perlman. Obituary: Ingram Olkin. *Bernoulli News*, 23(2):11–14, 2016.

- [35] P. Hitczenko. On tails of perpetuities. *J. Appl. Probab.*, 47(4):1191–1194, 2010.
- [36] P. Hitczenko and J. Wesolowski. Perpetuities with thin tails revisited. *Ann. Appl. Probab.*, 19(6):2080–2101, 2009.
- [37] A. Iksanov. *Renewal theory for perturbed random walks and similar processes*. Probability and its Applications. Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.
- [38] H. Ishi. Matrix realization of a homogeneous cone. In *Geometric science of information*, volume 9389 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 248–256. Springer, Cham, 2015.
- [39] A. Jakubowski and Z. S. Szewczak. Truncated moments of perpetuities and a new central limit theorem for GARCH processes without Kesten’s regularity. *Stochastic Process. Appl.*, 131:151–171, 2021.
- [40] M. Kac. On a characterization of the normal distribution. *Amer. J. Math.*, 61:726–728, 1939.
- [41] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, 131:207–248, 1973.
- [42] H. Kesten and R. A. Maller. Two renewal theorems for general random walks tending to infinity. *Probab. Theory Related Fields*, 106(1):1–38, 1996.
- [43] P. Kevei. A note on the Kesten-Grincevičius-Goldie theorem. *Electron. Commun. Probab.*, 21:Paper No. 51, 12, 2016.
- [44] P. Kevei. Implicit renewal theory in the arithmetic case. *J. Appl. Probab.*, 54(3):732–749, 2017.
- [45] A. E. Koudou and P. Vallois. Independence properties of the Matsumoto-Yor type. *Bernoulli*, 18(1):119–136, 2012.
- [46] G. Letac. A contraction principle for certain Markov chains and its applications. In *Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984)*, volume 50 of *Contemp. Math.*, pages 263–273. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [47] G. Letac. A characterization of the Wishart exponential families by an invariance property. *J. Theoret. Probab.*, 2(1):71–86, 1989.
- [48] I. Olkin and H. Rubin. A characterization of the Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.*, 33:1272–1280, 1962.
- [49] Z. Palmowski and B. Zwart. Tail asymptotics of the supremum of a regenerative process. *J. Appl. Probab.*, 44(2):349–365, 2007.
- [50] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [51] V. Seshadri and J. Wesolowski. Constancy of regressions for beta distributions. *Sankhyā*, 65(2):284–291, 2003.

- [52] C. Stone. On moment generating functions and renewal theory. *Ann. Math. Statist.*, 36:1298–1301, 1965.
- [53] W. Vervaat. *Success epochs in Bernoulli trials (with applications in number theory)*. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1972. Mathematical Centre Tracts, No. 42.
- [54] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Adv. in Appl. Probab.*, 11(4):750–783, 1979.
- [55] K. Zimna. Thin tails of perpetuities. Master's thesis, Fac. Math. Information Sci., Warsaw Univ. Technology, 2019. Supervisor: B. Kołodziejek.

Bartosz Kołodziejek

Bartosz Kołodziejek

**Wykaz osiągnięć naukowych, stanowiących znaczny wkład
w rozwój dyscypliny matematyka**

Bartosz Kołodziejek

Politechnika Warszawska
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

I. INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH NAUKOWYCH ALBO ARTYSTYCZNYCH, O KTÓRYCH MOWA W ART. 219 UST. 1. PKT 2 USTAWY

Cykl pięciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Asymptotyka ogonów rozwiązań stochastycznych równań punktu stałego

Lista prac składających się na osiągnięcie naukowe:

- [H1] B. Kołodziejek, Logarithmic tails of sums of products of positive random variables bounded by one, *Ann. Appl. Probab.* 27(2) (2017), 1171–1189.
- [H2] B. Kołodziejek, On perpetuities with light tails, *Adv. Appl. Probab.* 50(4) (2018), 1119–1154.
- [H3] E. Damek, B. Kołodziejek, A renewal theorem and supremum of a perturbed random walk, *Electron. Commun. Probab.* 23 (2018), 1–13.
- [H4] E. Damek, B. Kołodziejek, Stochastic recursions: Between Kesten's and Grincevičius–Grey's assumptions, *Stoch. Process. Their Appl.* 130(3) (2020), 1792–1819.
- [H5] K. Burdzy, B. Kołodziejek, T. Tadić, Inverse Exponential Decay: Stochastic Fixed Point Equation and ARMA Models, *Bernoulli* 25(4B) (2019), 3939–3977.

Merytoryczny opis wkładu habilitanta w powstanie powyższych prac został opisany w Auto-referacie w Sekcji 4.4 oraz w załączonych oświadczeniach współautorów.

II. INFORMACJA O AKTYWNOŚCI NAUKOWEJ ALBO ARTYSTYCZNEJ

1. Wykaz opublikowanych monografii naukowych: *brak*.
2. Wykaz opublikowanych rozdziałów w monografiach naukowych: *brak*.
3. Informacja o członkostwie w redakcjach naukowych monografii: *brak*.
4. Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych.

Na dorobek habilitanta składa się 17 artykułów w czasopismach naukowych. Poniżej prezentujemy pozycje nie wymienione w punkcie I.

Publikacje przed uzyskaniem stopnia doktora:

- [P1] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones through Gleason's theorem. *Studia Math.* 217 (2013), no. 1, 1–17.
- [P2] B. Kołodziejek, Multiplicative Cauchy functional equation on symmetric cones. *Aequ. Math.* 89 (2015), no. 4, 1075–1094.
- [P3] B. Kołodziejek, The Lukacs-Olkin-Rubin theorem on symmetric cones without invariance of the "quotient". *J. Theor. Probab.* 29 (2016), no. 2, 550–568.
- [P4] B. Kołodziejek, Characterization of beta distribution on symmetric cones. *J. Multivar. Anal.* 143 (2016), 414–423.

- [P5] B. Kołodziejek, The generalized fundamental equation of information on symmetric cones. *Aequ. Math.* 90 (2016), no. 5, 917–933.

Publikacje po uzyskaniu stopnia doktora spoza rozprawy habilitacyjnej

- [R1] B. Kołodziejek, The Matsumoto-Yor property and its converse on symmetric cones. *J. Theor. Probab.* 30 (2017), no. 2, 624–638.
- [R2] B. Kołodziejek, A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018), no. 2, 976–986.
- [R3] B. Kołodziejek, A. Piliszek, Independence characterization for Wishart and Kummer random matrices, *REVSTAT-Stat. J.*, 18(3) (2020), 357–373.
- Do habilitanta zasadniczo należą wyniki dotyczące równań funkcyjnych z Sekcji 4, w szczególności kluczowy dla pracy dowód Proposition 4.2. Zdecydowana większość pracy redakcyjnej została wykonana przez dr Piliszek.*
- [R4] H. Ishi, B. Kołodziejek, Characterization of the Riesz Exponential Family on homogeneous cones, *Colloq. Math.* 158(1) (2019), 45–57.
- Dowód głównego wyniku pracy, czyli Theorem 3.8 został znaleziony podczas wspólnej pracy współautorów przy tablicy. Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez habilitanta.*
- [R5] P. Graczyk, H. Ishi, B. Kołodziejek, Wishart laws and variance function on homogeneous cones, *Probab. Math. Stat.* 39(2) (2019), 337–360.
- Zasadnicza część pracy (z wyłączeniem Proposition 5.1 oraz Sekcji 7.1), została przygotowana przez habilitanta. Rachunki w dowodach głównych wyników pracy, czyli Theorem 5.1 oraz Theorem 6.1, a także Proposition 7.1 i Theorem 7.2, zostały przeprowadzone przez habilitanta wspólnie z prof. Ishi. Proposition 5.1 oraz cały rozdział 7.1 są w pełni autorstwa prof. Ishi.*
- [R6] M. Piccioni, B. Kołodziejek, G. Letac, Location and scale behaviour of the quantiles of a natural exponential family, *ESAIM-Prob. Stat.* 24 (2020), 244–251.
- Na pracę składają się dwa nowe wyniki. Sformułowanie oraz dowód jednego z nich (Theorem 2) należą do habilitanta. Większość pracy redakcyjnej została wykonana przez prof. Piccioniego.*
- [R7] B. Kołodziejek, The left tail of renewal measure. *Stat. Probab. Lett.* 129 (2017), 306–310.

5. Wykaz osiągnięć projektowych, konstrukcyjnych, technologicznych: *brak*.

6. Wykaz publicznych realizacji dzieł artystycznych: *brak*.

7. Informacja o wystąpieniach na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych lub artystycznych, z wyszczególnieniem przedstawionych wykładów na zaproszenie i wykładów plenarnych.

Wystąpienia przed uzyskaniem stopnia doktora:

- a) (19-25.V.2013) „*The Olkin-Baker functional equation on symmetric cones*”, The 15th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Ustroń.
- b) (06-09.VI.2013) „*The Lukacs-Olkin-Rubin theorem without invariance in the “quotient”*”, German-Polish Joint Conference on Probability and Mathematical Statistics, Toruń.
- c) (19-23.V.2014) *Charakteryzacja macierzowego rozkładu beta* XIII Konferencja z Probabilistyki, Będlewo.
- d) (01-06.VII.2014) „*Characterizations of random matrix distributions*”, Random Matrix Theory: Foundations and Applications, Kraków.

Wystąpienia po uzyskaniu stopnia doktora:

- e) (17-23.V.2015) „*Fundamental equation of information on matrices*”, The 16th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Będlewo.
- f) (14-21.V.2016) „*Perpetuities with thin tails revisited once again*”, Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis, Będlewo.
- g) (30.V-03.VI.2016) „*Asymptotyka ogonów maksimum zaburzonego błędzenia losowego a teoria odnowy*’ XIV Konferencja z Probabilistyki, Będlewo.
- h) (28-31.III.2017) „*Wishart exponential families through matrix realization of homogeneous cone*”, Development of Matrix Analysis, Nagoja, Japonia.
- i) (24-28.VII.2017) „*Stochastic recursions: between Kesten’s and Grey’s assumptions*”, The 39th Conference on Stochastic Processes and their Applications (SPA 2017), Moskwa.
- j) (06-12.V.2018) „*On perpetuities with light tails*”, Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis, Będlewo (**wykład na zaproszenie**).
- k) (21-25.V.2018) „*Perpetuity o lekkich ogonach*”, XV Konferencja z Probabilistyki, Będlewo (**wykład na zaproszenie**).
- l) (17-20.IX.2018) „*Independence characterizations for Wishart and Kummer random matrices*”, Joint meeting of the Italian Mathematical Union, the Italian Society of Applied Mathematics and the Polish Mathematical Society, Wrocław.
- m) (16-18.XII.2018) „*A Matsumoto-Yor characterization for Kummer and Wishart random matrices*”, 10th International Conference on Computational and Methodological Statistics, Londyn, Anglia.
- n) (20-24.V.2019) „*Tails of perpetuities at finite endpoints of the support.*”, Probability and Analysis, Będlewo.
- o) (23-25.X.2019) „*Model selection in the class of Gaussian models invariant under a subgroup of the symmetric group*”, Graphical Models: Conditional Independence and Algebraic Structures, Monachium, Niemcy (**wykład na zaproszenie**).

- p) (26-30.IV.2021) „*Proces typu Fleminga-Viota i równanie $X \stackrel{d}{=} AX+B$* ”, XVI Konferencja z Probabilistyki, Będlewo.
8. Informacja o udziale w komitetach organizacyjnych i naukowych konferencji krajowych lub międzynarodowych, z podaniem pełnionej funkcji:
- a) Nazwa konferencji naukowej: *Independence and Conditional Aspects of Probability*,
Pełniona funkcja: komitet organizacyjny.
Konferencja pierwotnie miała odbyć się 28.IX-02.X.2020. Z powodu pandemii została przeniesiona najpierw na 01-06.VIII.2021, a następnie na 17-23.VII.2022.
9. Informacja o uczestnictwie w pracach zespołów badawczych realizujących projekty finansowane w drodze konkursów krajowych lub zagranicznych, z podziałem na projekty zrealizowane i będące w toku realizacji, oraz z uwzględnieniem informacji o pełnionej funkcji w ramach prac zespołów.
- a) Źródło finansowania: grant NCN OPUS 3 o numerze 2012/05/B/ST1/00554,
Tytuł: *Między probabilistyką klasyczną a niekomutatywną: kwadratowe harnessy i charakteryzacje*,
Okres: 2013-2016, projekt zakończony.
Pełniona funkcja w projekcie: *wykonawca*.
- b) Źródło finansowania: grant NCN SONATA 10 o numerze 2015/19/D/ST1/03107.
Tytuł: *Badanie asymptotyki ogonów rozwiązań losowych równań afinicznych*.
Okres: 2016-2018, projekt zakończony.
Pełniona funkcja w projekcie: *kierownik*.
- c) Źródło finansowania: grant NCN OPUS 11 o numerze 2016/21/B/ST1/00005.
Tytuł: *Warunkowe i niezależnościowe struktury miar probabilistycznych*.
Okres: 2016-2019, projekt zakończony.
Pełniona funkcja w projekcie: *wykonawca*.
- d) Źródło finansowania: grant NCBiR o numerze 208921/2013 POLON.
Tytuł: *Kompleksowe metody wyznaczania lokalizacji terminala sieci telefonii komórkowej przemieszczającego się w terenie otwartym i budynkach*,
Okres: 2014-2016, projekt zakończony.
Pełniona funkcja w projekcie: *wykonawca*.
- e) Źródło finansowania: grant NCBiR o numerze POIR.01.01.01-00-0124/17.
Tytuł: *Modelowanie ryzyka kredytowego w oparciu o dane dostępne w kanałach cyfrowych z wykorzystaniem zaawansowanych rozwiązań teorio-grafowych związanych z sieciami społecznościowymi*.
Okres: 2018-2020, projekt zakończony.
Pełniona funkcja w projekcie: *kierownik B+R*.
10. Członkostwo w międzynarodowych lub krajowych organizacjach i towarzystwach naukowych wraz z informacją o pełnionych funkcjach: *brak*.

11. Informacja o odbytych stażach w instytucjach naukowych lub artystycznych, w tym zagranicznych, z podaniem miejsca, terminu, czasu trwania stażu i jego charakteru.

- a) 07-10.XII.2009 - Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Niemcy, *Visiting Scientist*.
- b) 08-15.XI.2015 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- c) 05-15.VII.2015 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- d) 25-30.III.2016 - University of Angers, Angers, Francja, współpraca z prof. P. Graczykiem,
- e) 15-22.VII.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- f) 26-30.IX.2016 - Uniwersytet Wrocławski, Wrocław, współpraca z prof. E. Damek,
- g) 17.III-10.IV.2017 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi,
- h) 09-17.II.2019 - York University, Toronto, Kanada, współpraca z prof. H. Massam,
- i) 04-14.IV.2019 - Nagoya University, Nagoja, Japonia, współpraca z prof. H. Ishi.

Wyjazdy b)-i) odbywały się w ramach współpracy naukowej.

12. Członkostwo w komitetach redakcyjnych i radach naukowych czasopism wraz z informacją o pełnionych funkcjach: *brak*.

13. Informacja o recenzowanych pracach naukowych lub artystycznych, w szczególności publikowanych w czasopismach międzynarodowych.

- a) 1 recenzja: Bernoulli, Journal of Multivariate Analysis, Journal of Theoretical Probability, Forum Mathematicum, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Colloquium Mathematicum, Metrika, Demonstratio Mathematica, Applicationes Mathematicae,
- b) 2 recenzje: Statistics & Probability Letters,
- c) Recenzja książki: A. Hassairi, *Riesz Probability Distributions*, De Gruyter Series in Probability and Stochastics.

14. Informacja o uczestnictwie w programach europejskich lub innych programach międzynarodowych: *brak*.

15. Informacja o udziale w zespołach badawczych, realizujących projekty inne niż określone w pkt. II.9: *brak*.

16. Informacja o uczestnictwie w zespołach oceniających wnioski o finansowanie badań, wnioski o przyznanie nagród naukowych, wnioski w innych konkursach mających charakter naukowy lub dydaktyczny:

- a) Członek Komisji Rady Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej ds. Nagród i Odznaczeń - od 2018r.

III. INFORMACJA O WSPÓŁPRACY Z OTOCZENIEM SPOŁECZNYM I GOSPODARCZYM

Nie dotyczy.

IV. INFORMACJE NAUKOMETRYCZNE

1. Informacja o liczbie cytowań publikacji wnioskodawcy, z oddzielnym uwzględnieniem autocytowań:

- a) Web of Science: 37, w tym bez autocytowań: 13,
- b) Scopus: 40, w tym bez autocytowań: 10,
- c) ResearchGate: 64, w tym bez autocytowań: 28.

2. Informacja o posiadanym indeksie Hirscha:

- a) Web of Science: 3,
- b) Scopus: 4,
- c) ResearchGate: 5.

3. Informacja o punktacji Impact Factor oraz o liczbie punktów MNiSW.

Art.	Czasopismo	Rok publikacji	Impact factor ¹	Punkty MNiSW ²
[H1]	Ann. Appl. Probab.	2017	1.786	30 (140)
[H2]	Adv. Appl. Probab.	2018	0.822	25 (70)
[H3]	Electron. Commun. Probab.	2018	0.623	20 (100)
[H4]	Stoch. Process. Their Appl.	2020	1.414	100 (100)
[H5]	Bernoulli	2019	1.496	140 (140)
[P1]	Studia Math.	2013	0.630	25 (100)
[P2]	Aequ. Math.	2015	1.000	25 (70)
[P3]	J. Theor. Probab.	2016	0.854	20 (70)
[P4]	J. Multivar. Anal.	2016	0.901	25 (100)
[P5]	Aequ. Math.	2016	0.826	25 (70)
[R1]	J. Theor. Probab.	2017	0.883	20 (70)
[R2]	J. Math. Anal. Appl.	2018	1.188	40 (70)
[R3]	REVSTAT-Stat. J.	2020	0.667	70 (70)
[R4]	Colloq. Math.	2019	0.535	70 (70)
[R5]	Probab. Math. Stat.	2019	0.617	40 (40)
[R6]	ESAIM-Prob. Stat.	2020	0.515	70 (70)
[R7]	Stat. Probab. Lett.	2017	0.533	20 (70)
	Razem		15.29	765 (1420)

¹Impact factor z roku publikacji (lub najnowszy dostępny) na podstawie listy Journal Citation Reports.

²Punkty MNiSW zgodnie z rokiem opublikowania. W nawiasie punkty z wykazu MNiSW z 18.12.2019.