prof. Agnieszka Kałamajska
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
adres E-mail: kalamajs@mimuw.edu.pl

Warszawa, 16 marca 2026

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym
pana doktora Adama Kubicy

1 Wstępne informacje o habilitancie

Pan doktor Adam Kubica ukończył wyższe studia w roku 2003 na wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskał z wyróżnieniem, w roku 2009, także na Uniwersytecie Warszawskim, na podstawie rozprawy *"Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne"*. Promotorem zarówno pracy magisterskiej, jak i rozprawy doktorskiej był profesor Piotr Rybka. Od 2009 roku do chwili obecnej pan Adama Kubica pracuje na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej jako adiunkt, przy czym w okresie 2004-2008 pracował on na stanowisku asystenta.

Zainteresowania badawcze pana dr. Adama Kubicy dotyczą teorii równań różniczkowych, w tym na nieregularnych obszarach, z pochodnymi ułamkowymi, odnoszącymi się do znanych modeli, w szczególności modelu Stefana.

Tematyką tą interesują się rozpoznani matematycy, na przykład Y. Giga, V. Voller, M. Yamamoto, R. Zacher, oraz promotor pracy magisterskiej i doktorskiej, P. Rybka.

Pan dr. Adam Kubica opublikował łącznie 18 prac, z czego szesć wchodzi w skład rozprawy habilitacyjnej, oraz pięć zostało opublikowane przed doktoratem. Prace włączone do dorobku habilitacyjnego to prace publikowane w bardzo dobrych i dobrych czasopismach o zasięgu międzynarodowym: Nonlinear Analysis: Real World Applications, Fractional Calculus and Applied Analysis, Journal of Integral Equations and Applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Mathematishe Annalen.

Wyniki były referowane na wielu konferencjach zagranicznych oraz podczas pobytów naukowach w ośrodkach zagranicznych.

Na co należy zwrócić uwagę, cztery spośród wyminionych artykułów są opublikowane wraz z ówczas doktorantką/magistrantką panią K. Ryszewską, co świadczy o bardzo dużej samodzielności badawczej habilitanta, oraz umiejętności współpracy z młodymi matematykami. Indeks Hirsha pana Kubicy wynosi 7.

2 Omówienie i ocena rozprawy habilitacyjnej

Na rozprawę habilitacyjną *" Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji"* składa się cześć prac: [H1]-[H6] wymienionych w autoreferacie:

[H1] A. Kubica, P. Rybka, K. Ryszewska, Weak solutions of fractional differential equations in non cylindrical domains, Nonlinear Anal. Real World Appl. 36 (2017), 154–182;

[H2] A. Kubica, M. Yamamoto, Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coeffcients, Fract. Calc. Appl. Anal. 21 (2018), no. 2, 276–311;

[H3] A. Kubica, K. Ryszewska, Fractional diffusion equation with distributed-order Caputo derivative, J. Integral Equations Appl. 31 (2019), no. 2, 195–243;

[H4] A. Kubica, K. Ryszewska, Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo derivative J. Math. Anal. Appl. 465 (2018), no. 1, 75–99.;

[H5] A. Kubica, K. Ryszewska, A self-similar solution to time-fractional Stefan problem Math. Methods Appl. Sci. 44 (2021), no. 6, 4245–4275;

[H6] A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative Math. Ann. 390 (2024), no. 2, 2513–2592.

Są to przeważnie prace obszerne i bogate od strony technicznej. Stanowią one spójny ciąg sukcesywnie rozwijanych tematów.

Przejdę do bardziej szczegółowego omówienia dorobku habilitanta.

Omówienie wyników rozprawy

Wyzwaniem ogólnym było zagadnienie typu Stefana z ułamkowymi pochodnymi cząstkowymi typu Caputo - operatorem nielokalnym, będącym wariantem pochodnej ułamkowej.

Praca [H1] to pierwsza praca z tej serii, napisana wspólnie z dawnym promotorem, Piotrem Rybką, oraz panią Katarzyną Ryszewską, piszącą doktorat pod opieką pana dr. Kubicy. Omijając z konieczności metody klasyczne oparte na regularyzacji Yosidy, uwzględniając trudności zwiazane z nieregularnością obszaru, oraz z analizą pochodnej Caputo, uzyskano potrzebne oszacowania appriori, w oparciu o metody typu Galerkina. Doprowadziło to do

- sformułowania twierdzenia o istnieniu i regularności słabych rozwiązań dla zagadnienia
$$D_s^\alpha u(x,t) = u_{x,x}(x,t) + f(x,t), \text{dla } 0 < x < s(t), 0 < t < T,$$

gdzie:

– $D_s^\alpha u(x,t)$ to rodzaj pochodnej Caputo, uzależnionej od funkcji $s(t)$ pewnego typu, uwzględniającej tzw. efekt pamięci,

– dane są odpowiednie warunki brzegowo początkowe, oraz warunki zadane na wykresie $(s(t), t)$,

– obszar nie jest cylindryczny;

- narzędzi wygodnych do dalszch badań, w tym propozycji przestrzeni Banacha pasującej do dalszej analizy zagadnień Stefana z pochodną ułamkową Caputo.

W pracy [H2] było analizowane zagadnienie szersze

$$D^\alpha u = Lu + f$$

(po lewej stronie widzumy pochodną czasową, po prawej operator zadany na obszarze) z ogólnym operatorem jednostajnie eliptycznym L, gdzie $D^\alpha u = \partial^\alpha(u - u_0)$, ∂^α to pochodna Caputo, natomiast u_0 to zadana funkcja. Wiadomo było, że przy zadanym u_0 istnieje rozwiazanie, lecz nie było znane, czy u_0 to warunek początkowy dla powyższego zagadnienia. Zasadniczym pytaniem było zatem badanie ciągłości w zerze dla zagadnenia. Twierdzenie 1.2 w [H2] ustosunkowuje się do: istnienia, jednoznaczności, oszacowań appriori, oraz ciągłości w zerze rozwiązań, dając pozytywną odpowiedź na postawione pytanie. Ponadto wskazana została właściwa przestrzeń funkcyjna dla rozwiązań. Zastosowano bardzo ciekawe metody, oparte na metodzie Galerkina i analizie zagadnień własnych. Jest to rozwinięcie niektórych pomysłów z pracy [H1]. Za bardzo ciekawe narzędzie uważam wynik ze Stwierdzenia 6.10 (Proposition 6.10) wyrażający całkę z $D^\alpha w \cdot w$ przez normę $'w'$ w przestrzeni typu Slobodeckiego. Praca zawiera także wyniki o regularności rozwiązań.

W pracy [H3] zamiast pochodnej Caputo D^α rozważane zostało jej uśrednienie po $\alpha \in (0,1)$ względem miary $\mu(\alpha)d\alpha$, co jest uzasadniowe przez modele inżynierskie. Jest to tak zwana pochodna rozproszona. Występowała ona wsześniej w wielu pracach, lecz przy szczególnych założeniach. Ma ona interpretację jako przesunięta pochodna dla splotu z pewnym jądrem k, znanym w szczególnej postaci w przypadku klasycznych uśrednień. Obserwacja doprowadziła do analizy szerokiej klasy jąder całkowych, wprowadzonych przez R. Zachera w 2009 roku, tak zwanych jąder PC. Dalsza analiza jest poświęcona zastosowaniom PC jąder do rownań ewolucyjnych z pochodną Caputo na obszarach niecylindrycznych. Pozwoliło to uprościć niekóre znane wcześniej wyniki dla równań ewolucyjnych z pochodną rozproszoną Caputo, oraz udowodnić twierdzenia o istnieniu, regularności, jednoznaczności rozwiązań, oraz oszacowań appriori dla takich zagadnień.

Uważam analizę za bardzo pomysłową, ciekawą i precyzyjną.

Praca [H4] odnosi się bo badania zaniku rozwiązań dla zagadnień parabolicznych z pochodną rozproszoną Caputo. Ponadto duży wkład pracy został włożony w klarowne metody weryfikacji założeń (a nie tylko zakładanie, że są one spełnione), oraz w intepretację rozwiązań. Na przykład, w Twierdzeniu 2 rozwiązanie jest wypisane w postaci całki, a nie szeregu, co można łatwiej uzyskać. To ułatnia dalszą analizę. Głowne wyniki uwzględniają także operatory eliptyczne ze współczynnikami zależnymi od czasu i odnoszą się do zanikania logarytmicznego oraz potęgowego rozwiązań. Za bardzo ciekawy wynik uważam Stwierdzenie 3, gdzie pojawiły się interesujące tożsamości całkowe, wiążące funckję, w, oraz pochodne rozproszone Caputo w całkach.

W pracy [H5] zaproponowano zmodyfikowany model ułamkowy zagadnienia Stefana, przy pewnych szczególnych założeniach. Zakłada się między innymi, że funkcja strumienia jest wyrażona przy pomocy pochodnej Caputo oraz pochodnej po zmiennej x. Analizowane były zagadnienia samopodobne dla zagadnienia i ich asymptotyka, w tym przeprowadzono analizę zbieżności rozwiązań samopodobnych dla zagadnień z pochodnymi ułamkowymi ze względu na zbieżność parametru różniczkowania do 1. Jak się okazało, prowadzi to do rozwiązań dla klasycznego równania Stefana.

Jest to bardzo ciekawy wynik, potwieredzający precyzję i powagę badań.

Obszerna praca [H6] poświęcona jest analizie nierowności Harnacka i Hölderowskiej ciągłości rozwiązań. Są to ważne i ciekawe wyniki, odnoszące się do słabej nierówności Harnacka, z której wyprowadza się Hölderowską ciągłość.

3 Ocena pozostałego dorobku Habilitanta

Pozostałe publikacje, nie włączone w skład habilitacji dotyczyły:

- analizy efektu Berga (prace wspólne z Piotrem Rybką);
- regularności rozwiązań zagadnienia Naviera Stokesa (m. in. przy wspólpracy z Milanem Pokornym i Wojciechem Zajączkowskim);
- modelowi turbulencji Kołmogorowa (przy wspólpracy z młodym matematykiem. T. Kosewskim piszącym wówczas pracę doktorską pod opieką dr. Kubicy);
- teorii ułamkowych rozwiązań równań cząstkowych.

Dorobek pozostały świadczy o szerokich zainteresowaniach badawczych i umiejętności współpracy.

4 Pozostałe informacje

Pan doktor Adam Kubica uczestniczył w grantach, odbył wiele prestiżowych wizyt naukowych, na przykład na zaproszenie profesora Y. Gigi i M. Yamamoto (Uniwersytet w Tokio), M. Pokornego (Uniwersytet Karola w Pradze), czy G. Galdiego (Uniwersytet w Pittsburgu, USA). Wypromował on dwojkę doktorantów, oraz jest promotorem w przewodzie doktorskim. Był także promotorem wielu prac licencjackich i magisterskich. Ponadto prowadził bardzo wartościowe zajęcia dydaktyczne i warsztaty dla doktorantow, oraz organizował konferencje.

5 Podsumowanie

Całokształt badań uważam za bardzo ciekawy i poważny wkład do teorii równań różniczkownych cząstkowych dla zagadnień typu Stefana. Choć nie jestem specjalitką w tej dokładnie dziedzinie, jestem pod wrażeniem niezwykle prezycyjnego sawiania problemów, oraz bardzo precyzyjnego i konsekwentnego ich rozwiazywania, bogactwa trudnych technik, znajomości literatury, oraz samodzielności badawczej.

6 Konkluzja

Biorąc pod uwagę cenne osiągnięcia naukowe uzyskane w rozprawie habilitacyjnej, oraz te uzyskane poza rozprawą, uważam, że pan doktor Adam Kubica w pełni spełnia wymagania stawiane w ustawie o stopniach i tytułach naukowych.
Dlatego z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie doktora Adama Kubicy do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.
Dodatkowo wnoszę o wyrożnienie dorobku.

Z wyrazami szacunku,

Agnieszka Kałamajska

Uniwersytet Wrocławski

prof. dr hab. Grzegorz Karch
Uniwersytet Wrocławski, Instytut Matematyczny
pl. Grunwaldzki 2/4 , 50-384 Wrocław, Poland
+48 71 375 74 01, Grzegorz.Karch@math.uni.wroc.pl, http://karch.math.uni.wroc.pl

Wrocław, dnia 2 marca 2026 r.

Recenzja osiągnięć naukowych w postępowaniu o nadanie stopnia doktora habilitowanego doktora Adama Kubicy

1. **Przedstawienie danych o kandydacie**

- Stopień doktora: dr Adam Kubica uzyskał stopień doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka w 2009 roku na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.
- Rozprawa doktorska: Tytuł rozprawy to „Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych"; promotorem był prof. dr hab. Piotr Rybka, a praca została wyróżniona.
- Wcześniejsze postępowania: Dokumentacja nie zawiera informacji, aby kandydat ubiegał się uprzednio o nadanie stopnia doktora habilitowanego.
- Przebieg pracy naukowo-zawodowej:
  - Od 1.10.2009 r. – adiunkt na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.
  - 1.10.2008 – 30.09.2008 – asystent (1/2 etatu) w tej samej jednostce.
  - Od 1.10.2005 r. – asystent/starszy wykładowca (1/2 etatu) w Instytucie Matematyki i Kryptologii Wojskowej Akademii Technicznej.
  - 1.01.2004 – 30.06.2004 – asystent w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk.

2. **Informacja o ocenianych osiągnięciach naukowych**

a. Tytuł osiągnięcia naukowego

Głównym osiągnięciem jest cykl 6 powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem: „Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji".

b. Opis osiągnięcia naukowego

Na podstawie załączonych dokumentów (autoreferatu oraz wykazu osiągnięć) można wskazać na kilka kluczowych obszarów, w których dr Adam Kubica uzyskał przełomowe wyniki naukowe. Jego badania koncentrują się głównie na równaniach ewolucyjnych z operatorami nielokalnymi w czasie, tzw. równaniach ułamkowej dyfuzji.

Oto szczegółowe rozwinięcie najważniejszych wyników:

- Rozwiązania w obszarach niecylindrycznych (ruchome brzegi)

W pracy [H1] (opublikowanej w *Nonlinear Analysis: Real World Applications*), dr Kubica wraz ze współautorami podjął problematykę równań z pochodną ułamkową Caputo w sytuacjach na zbiorach zmieniających się w czasie (obszary niecylindryczne). W pracy tej sformułowano definicję pochodnej ułamkowej na nietypowych obszarach i udowodniono istnienie oraz jednoznaczność słabych rozwiązań. Jest to wynik o dużym znaczeniu, ponieważ klasyczna teoria zazwyczaj zakłada stały w czasie obszar na którym rozważane jest równanie dyfuzji, co ograniczało zastosowania w modelowaniu zjawisk fizycznych z ruchomą granicą.

- Równania o rozproszonym rzędzie (distributed order)

Znaczna część osiągnięć (prace [H3], [H4], [H6]) dotyczy równań, w których zamiast jednej pochodnej rzędu α, występuje całka z pochodnych po różnych rzędach (tzw. operator o rozproszonym rzędzie).

- Analiza regularności: W ważnej pracy w prestiżowym *Mathematische Annalen* ([H6]) dr Kubica udowodnił ciągłość w sensie Höldera dla słabych rozwiązań tego typu równań. Jest to wynik o charakterze fundamentalnym (analogiczny do klasycznych wyników De Giorgi-Nasha-Mosera), który pozwala na badanie regularności rozwiązań przy bardzo ogólnych założeniach o współczynnikach.
- Malenie rozwiązań: W pracy [H4] autor zbadał, jak szybko rozwiązania dążą do zera w czasie. Wykazano, że tempo to zależy w sposób istotny od zachowania wagi (miary) rozproszonego rzędu w pobliżu zera.

3. Ułamkowe zagadnienie Stefana

Praca [H5] (opublikowana w *Mathematical Methods in the Applied Sciences*) dotyczy ułamkowego odpowiednika klasycznego zagadnienia Stefana, które modeluje przemiany fazowe (np. topnienie lodu).

- Wynik: Skonstruowano rozwiązanie samopodobne dla tego zagadnienia. Jest to jedno z pierwszych tego typu jawnych rozwiązań dla ułamkowego problemu Stefana, co ma kluczowe znaczenie dla testowania algorytmów numerycznych i zrozumienia dynamiki frontu przemiany fazowej w ośrodkach z „pamięcią”.

4. Równania z współczynnikami zależnymi od czasu

W pracy [H2] (współautorstwo z prof. M. Yamamoto) kandydat zbadał zagadnienia początkowo-brzegowe dla ułamkowych równań dyfuzji, w których współczynniki eliptyczne zależą od czasu.

- Wynik: Udowodniono poprawność postawienia problemu w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa. Wynik ten rozszerza teorię ułamkową na układy, w których właściwości ośrodka (np. przewodność) zmieniają się w trakcie trwania procesu dyfuzji.

5. Inne kierunki (Modelowanie turbulencji)

Poza głównym cyklem ułamkowym, dr Kubica zajmuje się również równaniami Naviera-Stokesa i modelami turbulencji. W wykazie osiągnięć widnieją prace z 2022 roku (współautor P. Kosewski) dotyczące dwurównaniowego modelu turbulencji Kołmogorowa, gdzie udowodniono istnienie rozwiązań lokalnych i globalnych (dla małych danych początkowych).

Podsumowując, wyniki dr. Kubicy łączą głęboką teorię analizy matematycznej (przestrzenie funkcyjne, teoria regularności) z problematyką modelowania procesów fizycznych charakteryzujących się anomalną dyfuzją i pamięcią, co czyni jego dorobek spójnym i wysoko ocenianym przez międzynarodowe środowisko naukowe.

b. Dane naukometryczne (stan na 15.07.2025 r.)

- Web of Science Core Collection: 312 cytowań (299 bez autocytowań), indeks Hirscha = 7.
- Scopus: 336 cytowań (322 bez autocytowań), indeks Hirscha = 8.

c. Liczba publikacji i najważniejsze czasopisma

Cykl habilitacyjny obejmuje 6 prac . Kandydat publikował w prestiżowych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, takich jak:

- *Mathematische Annalen*,
- *Nonlinear Analysis: Real World Applications*,
- *Fractional Calculus and Applied Analysis*,
- *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.

d. Rola kandydata w pracach współautorskich

Z oświadczeń współautorów wynika wiodąca rola dr. Kubicy w powstaniu większości prac:

- [H1]: Udział kandydata szacowany na ok. 70% (pozostali autorzy: prof. P. Rybka – 20%, dr K. Ryszewska – 10%).
- [H2]: Udział kandydata szacowany na ok. 70% (prof. M. Yamamoto – 30%).
- [H3], [H4], [H5]: Kandydat pełnił kluczową rolę, przy udziale dr K. Ryszewskiej wynoszącym odpowiednio 50%, 30% i 30%.
- [H6]: Współautorzy (Kubica, Ryszewska, Zacher) wnieśli równy wkład w powstanie pracy.

e. Ocena wkładu w rozwój dyscypliny

Osiągnięcie kandydata stanowi znaczący wkład w rozwój matematyki, w szczególności w zakresie teorii równań różniczkowych z pochodnymi ułamkowymi. Kluczowe rezultaty obejmują:

- Opracowanie definicji pochodnej Caputo w obszarach niecylindrycznych i konstrukcja słabych rozwiązań dla takich zagadnień .
- Uzyskanie twierdzeń o istnieniu i regularności rozwiązań dla równań ułamkowej dyfuzji z pochodnymi o rozproszonym rzędzie (distributed-order).
- Zbadanie asymptotyki i tempa zanikania rozwiązań w zależności od rzędu pochodnej.
- Udowodnienie ciągłości Höldera słabych rozwiązań w bardzo prestiżowej pracy opublikowanej w Math. Ann.

4. Aktywność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna

- Aktywność międzynarodowa: Kandydat wygłaszał referaty na licznych konferencjach zagranicznych i krajowych, m.in. w Vancouver (2011), Gaecie (2009, 2012), Dreźnie (2010) oraz Levico Terme (2010).
- Działalność dydaktyczna: Realizowana nieprzerwanie od 2004 roku w kilku jednostkach naukowych (PW, WAT, IM PAN).

5. Konkluzja

Biorąc pod uwagę wysoką jakość naukową opublikowanych prac (w tym publikację w *Mathematische Annalen*), znaczący i udokumentowany wkład własny kandydata oraz wyraźny wpływ jego wyników na rozwój teorii równań ewolucyjnych z operatorami nielokalnymi, oceniam dorobek dr. Adama Kubicy jako w pełni spełniający wymogi stawiane w postępowaniu habilitacyjnym.

G. Karch

prof. dr hab. Grzegorz Karch

Warszawa, 07.04.2026 r.

Prof. dr hab. Jarosław Mederski,
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego
dr Adama Kubicy
w sprawie wniosku o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Pan dr Adam Kubica uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka w 2009 roku na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej na podstawie rozprawy *Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych*, przygotowanej pod kierunkiem prof. dr hab. Piotra Rybki. Rozprawa doktorska została wyróżniona przez Radę Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. Wcześniej uzyskał tytuł magistra matematyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego w 2003 roku. Po uzyskaniu stopnia doktora został zatrudniony na stanowisku adiunkta na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, gdzie aktualnie pracuje. Jest również zatrudniony na stanowisku asystenta/starszego wykładowcy w Wojskowej Akademii Technicznej. W 2004 roku pracował również jako asystent w Instytucie Matematycznym PAN.

Osiągnięciem naukowym stanowiącym podstawę wniosku habilitacyjnego dra Adama Kubicy jest rozprawa habilitacyjna zatytułowana:

Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji,

na którą składa się cykl 6 prac opublikowanych w latach 2017–2024:

[H1] A. Kubica, P. Rybka, K. Ryszewska, *Weak solutions of fractional differential equations in non cylindrical domains*, Nonlinear Analysis: Real World Applications 36 (2017), 154–182.

[H2] A. Kubica, M. Yamamoto, *Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients*, Fractional Calculus and Applied Analysis 21 (2018), no. 2, 276–311.

[H3] A. Kubica, K. Ryszewska, *Fractional diffusion equation with distributed-order Caputo derivative*, Journal of Integral Equations and Applications 31 (2019), no. 2, 195–243.

[H4] A. Kubica, K. Ryszewska, *Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo derivative*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 465 (2018), no. 1, 75–99.

[H5] A. Kubica, K. Ryszewska, *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Mathematical Methods in the Applied Sciences 44 (2021), no. 6, 4245–4275.

[H6] A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative*, Mathematische Annalen 390 (2024), no. 2, 2513–2592.

Prace opublikowane są w dobrych i bardzo dobrych czasopismach specjalistycznych i odnoszą się do spójnej oraz aktualnej tematyki badawczej, mieszczącej się na pograniczu teorii równań różniczkowych cząstkowych, analizy funkcjonalnej oraz matematycznego modelowania zjawisk nietypowej dyfuzji. Nietypowa dyfuzja pojawia się w ośrodkach niejednorodnych i jest intensywnie badana od ponad 20 lat, począwszy od pracy Metzlera i Klaftera, a potem Vollera. Dobór problematyki należy uznać za trafny i ambitny i należy do jednego z intensywnie rozwijanych kierunków współczesnej analizy. Powyższe prace są to wprawdzie w większości prace współautorskie, jednak z załączonych oświadczeń wynika, że wkład Habilitanta w ich powstanie był istotny.

Tematyka habilitacji dotyczy równań ułamkowej dyfuzji, w szczególności zagadnień ewolucyjnych z pochodną Caputo oraz jej uogólnieniami rzędu rozłożonego, a także problemów ze swobodną granicą związanych z ułamkowym zagadnieniem Stefana. Punktem wyjścia dla rozważań Habilitanta jest obserwacja, że klasyczne modele dyfuzji nie opisują adekwatnie zjawisk zachodzących w ośrodkach niejednorodnych, gdzie występuje tzw. nietypowa dyfuzja. W takich sytuacjach naturalnym narzędziem modelowania stają się pochodne ułamkowe, które uwzględniają efekt pamięci i pozwalają opisywać zjawiska poddyfuzji oraz naddyfuzji.

W pracy [H1] badane są słabe rozwiązania równań ułamkowych w obszarach niecylindrycznych. Jest to interesujący punkt wyjścia dla całego cyklu prac. Habilitant analizuje problem, w którym standardowe techniki stosowane dla obszarów cylindrycznych nie mogą być użyte wprost, między innymi ze względu na efekt pamięci związany z pochodną Caputo. W pracy tej zaproponowano odpowiednie sformułowanie pochodnej ułamkowej w obszarze niecylindrycznym, a następnie opracowano metodę konstrukcji słabych rozwiązań opartą na metodzie Galerkina. Wyniki tej pracy należy uznać za istotne i technicznie zaawansowane. Metoda konstrukcji rozwiązań została wykorzystana między innymi w kolejnych dwóch pracach [H2] i [H3].

Praca [H2] dotyczy zagadnień początkowo-brzegowych dla równań dyfuzji ułamkowej ze współczynnikami zależnymi od czasu. Problematyka ta jest ważna zarówno z punktu widzenia teorii, jak i zastosowań inżynieryjnych, ponieważ współczynniki zależne od czasu pojawiają się naturalnie w modelowaniu procesów zachodzących w zmieniającym się środowisku. Z przedstawionego omówienia wynika, że dr Kubica uzyskał rezultaty dotyczące dobrze postawionych zagadnień, analizując istnienie, jednoznaczność słabych rozwiązań zagadnienia (26) (numeracja według autoreferatu). Ponownie w tej pracy wykorzystuje się metodę Galerkina i zasadę Banacha o punkcie stałym. Warto zaznaczyć, że jest to praca napisana we współpracy z M. Yamamoto, znanym specjalistą w tej tematyce.

Prace [H3] i [H4] poświęcone są równaniom z rozproszoną pochodną Caputo. Rozproszony rząd pochodnej ma motywacje w eksperymentach, gdzie wyznacza się rozkład pochodnych zamiast konkretnej wartości. Jest to naturalne, ale zarazem nietrywialne rozszerzenie klasycznych modeli z pochodną jednego rzędu. W pracy [H3] analizowane jest równanie dyfuzji z pochodną rzędu rozproszonego, natomiast w pracy [H4] badane jest tempo zaniku rozwiązań odpowiedniego problemu typu parabolicznego. Należy podkreślić, że przejście od pochodnej jednego rzędu do rzędu rozproszonego prowadzi do istotnego wzrostu trudności analitycznych, a jednocześnie pozwala modelować znacznie szerszą klasę zjawisk. W mojej ocenie te dwie prace dobrze pokazują, że Habilitant nie ogranicza się do pojedynczego modelu, lecz konsekwentnie rozwija teorię w kierunku bardziej ogólnym i bardziej subtelnym matematycznie.

Praca [H5] dotyczy samopodobnego rozwiązania ułamkowego zagadnienia Stefana zaproponowanego przez Vollera. Jest to temat szczególnie ciekawy, ponieważ łączy klasyczne zagadnienia ze swobodną granicą z nowoczesną teorią pochodnych ułamkowych. Zagadnienie Stefana należy do klasycznych i ważnych problemów matematyki stosowanej, natomiast jego wersja ułamkowa wymaga opracowania nowych metod badawczych. W pracy [H5] Habilitant wykorzystuje przede wszystkim technikę analizy samopodobieństwa, konstruując rozwiązania samopodobne dla zmodyfikowanego modelu ułamkowego zagadnienia Stefana. Istotnym elementem tej pracy jest również ścisłe matematyczne wyprowadzenie rozważanego modelu, zbadanie własności otrzymanych rozwiązań oraz wykazanie zgodności z klasycznym zagadnieniem Stefana w granicy, gdzie parametr α dąży do 1. Uzyskanie rozwiązania samopodobnego w takim kontekście uważam za wartościowy rezultat, dobrze wpisujący się w główny nurt badań dra Kubicy.

Ostatnia praca [H6], opublikowana w prestiżowym czasopiśmie *Mathematische Annalen*, dotyczy słabej nierówności Harnacka i ciągłości Höldera słabych rozwiązań równań ewolucyjnych z pochodną czasową rzędu rozproszonego. Jest to, moim zdaniem, jedna z najmocniejszych pozycji w cyklu habilitacyjnym. Problematyka nierówności Harnacka i regularności rozwiązań jest fundamentalna w teorii równań różniczkowych cząstkowych i jej rozwinięcie na grunt równań z pochodnymi ułamkowymi ma duże znaczenie. Sam fakt publikacji w czasopiśmie tej klasy wskazuje na wysoki poziom uzyskanych rezultatów.

Cały cykl habilitacyjny jest spójny tematycznie i dobrze przemyślany. Rozpoczyna się od zagadnień dotyczących istnienia słabych rozwiązań w sytuacjach trudnych geometrycznie, następnie przechodzi do bardziej ogólnych modeli dyfuzji ułamkowej, a kończy się wynikami odnoszącymi się do regularności rozwiązań. Na podstawie prac [H1]–[H4] wyraźnie widać rozwój naukowy Habilitanta, polegający na stopniowym opanowywaniu coraz bardziej zaawansowanych i wymagających technik analitycznych. Prace te mają w dużej mierze charakter techniczny i opierają się o na metodach już znanych, jednak ich znaczenie polega na umiejętnym dostosowaniu tych narzędzi do nowych klas zagadnień, motywowanych również zastosowaniami. Pod względem matematycznym za najbardziej nowatorskie uważam dwie ostatnie prace cyklu, tj. [H5] oraz [H6]. Taki rozwój tematyki świadczy o osiągniętej dojrzałości naukowej Habilitanta oraz o umiejętności budowania własnej, konsekwentnie rozwijanej specjalizacji badawczej. Z tych względów cały przedstawiony cykl prac oceniam wysoko.

Pozostały dorobek naukowy dra Adama Kubicy również oceniam wysoko. Jego aktywność publikacyjna po uzyskaniu stopnia doktora jest wyraźna, systematyczna i zróżnicowana tematycznie. Obejmuje ona zarówno prace z zakresu klasycznych równań różniczkowych cząstkowych, dotyczące m.in. regularności rozwiązań równań Naviera–Stokesa, analizy osobliwości rozwiązań równania Laplace'a oraz modeli turbulencji, jak i publikacje poświęcone równaniom ułamkowym, które stanowią główny nurt późniejszych badań Habilitanta. Na uwagę zasługuje także monografia *Time-fractional differential equations—a theoretical introduction* Springer (2020) wspólna z K. Ryszewską oraz M. Yamamoto. Z przedstawionych wskaźników wynika, że według bazy Web of Science liczba cytowań prac dra Adama Kubicy wynosi 312, bez autocytowań 299, natomiast indeks Hirscha jest równy 7. Z kolei według bazy Scopus liczba cytowań wynosi 336, bez autocytowań 322, a indeks Hirscha 8. Są to bardzo dobre wskaźniki, świadczące o widoczności dorobku Habilitanta w międzynarodowym środowisku naukowym. Na pozytywną ocenę zasługuje również jego aktywność konferencyjna, udział w projektach badawczych oraz współpraca międzynarodowa z uznanymi ośrodkami naukowymi.

Na pozytywną ocenę zasługuje także aktywność dra Kubicy w projektach badawczych. Był wykonawcą w trzech grantach finansowanych przez MNiSW oraz NCN, dotyczących między innymi równań ośrodków ciągłych, dyfuzji anizotropowej w ewolucji powierzchni swobodnych oraz problemów nielokalnych w ewolucji międzyfazowej. Tematyka tych projektów pozostaje w ścisłym związku z jego zainteresowaniami naukowymi i dobrze wpisuje się w rozwój jego dorobku. Można wprawdzie zauważyć, że dotychczas Habilitant nie pełnił jeszcze roli kierownika własnego projektu badawczego, jednak biorąc pod uwagę jego wyraźny rozwój naukowy, aktywność publikacyjną oraz współpracę międzynarodową, można oczekiwać, że w niedługim czasie będzie z powodzeniem ubiegał się o własne granty i budował własny zespół badawczy.

Dorobek dydaktyczny dra Adama Kubicy oceniam bardzo wysoko. Prowadził zajęcia z wielu podstawowych i zaawansowanych przedmiotów matematycznych, takich jak równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, analiza zespolona, analiza funkcjonalna oraz analiza matematyczna. Ponadto prowadził warsztaty dla doktorantów obejmujące między innymi teorię półgrup, teorię interpolacji, teorię regularności, ewolucyjne równania całkowe, metody słabej zbieżności oraz przestrzenie Besova. Na szczególne wyróżnienie zasługuje również jego opieka nad pracami dyplomowymi: 21 obronionymi pracami licencjackimi oraz 6 obronionymi pracami magisterskimi. Jest to dorobek dydaktyczny wyraźnie ponadprzeciętny. Wysoką jakość pracy dydaktycznej potwierdzają także otrzymane nagrody, w tym kilkukrotne wyróżnienia *Złota Kreda* za prowadzenie zajęć dydaktycznych oraz nagrody rektorskie za osiągnięcia naukowe. Na szczególną uwagę zasługuje również pełnienie roli promotora pomocniczego w trzech przewodach doktorskich w latach 2017–2024.

Przedstawiony autoreferat jest obszerny, rzeczowy i dobrze napisany. Autor nie ogranicza się do suchego zestawienia wyników, lecz przedstawia motywacje, tło matematyczne oraz logiczny rozwój badanej problematyki. Dzięki temu czytelnik może prześledzić zarówno znaczenie rozważanych problemów, jak i miejsce uzyskanych rezultatów w szerszym kontekście teorii równań różniczkowych cząstkowych z pochodnymi ułamkowymi. W mojej opinii świadczy to o dużej dojrzałości naukowej autora. Najwyżej oceniam wyniki z prac [H5] i [H6], gdzie nowe techniki zostały zaprezentowane i uzyskano najciekawsze wyniki.

Uważam, że rozprawa przedstawiona przez Pana dra Adama Kubicę jest interesująca i dotyczy aktualnego oraz intensywnie rozwijanego obszaru współczesnej analizy. Szczególnie wysoko oceniam spójność tematyczną cyklu, dobre osadzenie rozważanych problemów w kontekście matematycznym i aplikacyjnym, a także techniczną dojrzałość uzyskanych wyników. Habilitant wykazał, że potrafi rozwijać nowoczesną tematykę badawczą, uzyskiwać wartościowe rezultaty i publikować je w dobrych i bardzo dobrych czasopismach międzynarodowych.

Stwierdzam, że osiągnięcia naukowe przedstawione w rozprawie habilitacyjnej oraz pozostały dorobek naukowy dra Adama Kubicy są na wysokim poziomie i w pełni spełniają wymagania stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego.

Wnoszę o dopuszczenie Pana dra Adama Kubicy do dalszych etapów postępowania habilitacyjnego.

Jarosław Mederski

Jarosław Mederski

Recenzja osiągnięcia habilitacyjnego dra Adama Kubicy

Łukasz Płociniczak
Katedra Matematyki Stosowanej, Wydział Matematyki,
Politechnika Wrocławska

26 stycznia 2026

1 Sylwetka habilitanta

Pan dr Adam Kubica pracuje jako adiunkt na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej. W tej jednostce, w 2009 roku, obronił doktorat (z wyróżnieniem) pod kierunkiem prof. Piotra Rybki. Tytuł rozprawy: *Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych*. Wcześniej, niedługo po uzyskaniu dyplomu magisterskiego, pracował również przez pół roku jako asystent w Instytucie Matematyki PAN.

2 Omówienie osiągnięć włączonych do habilitacji

Habilitant jako swoje osiągnięcie habilitacyjne przedstawił cykl sześciu prac, powiązanych tytułem „Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji". Prace te zostały opublikowane w dobrych, a nawet bardzo dobrych czasopismach matematycznych. Na szczególną uwagę zasługuje artykuł opublikowany w *Mathematische Annalen*. Wszystkie prace są współautorskie, a stosowne oświadczenia zostały dołączone do wniosku. Wkład habilitanta w powstanie tych artykułów można ocenić jako równy lub nieznacznie dominujący (o ile taka ocena ma sens w matematyce). Niemniej jednak cykl przedstawionych prac wygląda bardzo solidnie. Przejdę teraz do szczegółowego opisu osiągnięć pod kątem znaczenia w matematyce.

Częścią wspólną dorobku habilitanta jest równanie ewolucyjne dla $u = u(x,t)$ postaci

$$\partial_t^\alpha u = Lu + f, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad t \in (0,T), \quad \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

gdzie L jest liniowym operatorem eliptycznym działającym w zmiennej przestrzennej, a f jest funkcją źródła. Najważniejszym składnikiem tego równania jest pochodna ułamkowa typu Caputo, zdefiniowana dla dowolnej funkcji $y \in AC([0,T])$ przez

$$\partial_t^\alpha y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} y'(s)\, ds, \quad \alpha \in (0,1).$$

Zauważmy, że operator ten zawiera w sobie zarówno elementy różniczkowania, jak i całkowania w czasie, co czyni go operatorem nielokalnym - bierze pod uwagę całą historię procesu. Jest to istotne i niebanalne uogólnienie klasycznej pochodnej całkowitej, mające jednocześnie solidne motywacje fizyczne (habilitant w autoreferacie przedstawia przyjemny kontekst równań dyfuzji anomalnej). Dlatego też uważam, że ścisłe rozważania dotyczące równań postaci (1) są w pełni uzasadnione i ważne dla rozwoju matematyki.

W pracy [H1] rozważane jest pewne uproszczone zagadnienie typu Stefana (granica między fazami jest dana z góry) dla badanego równania ułamkowej dyfuzji w jednym wymiarze przy stałych współczynnikach. Pomimo uproszczeń zadanie pozostaje wysoce nietrywialne i istotne dla zrozumienia zachowania się frontu przemiany fazowej. Głównym wynikiem pracy jest konstrukcja słabego rozwiązania badanego zagadnienia. Zadanie to wiąże się z szeregiem trudnych problemów: m.in. z uwagi na niecylindryczny obszar oraz nielokalność operatora Caputo. Pokonanie tych trudności wymagało opracowania odpowiedniej, nowej techniki dowodowej, nieopierającej się wyłącznie na klasycznych pomysłach stosowanych dla równań lokalnych. W szczególności autor stosuje połączenie regularyzacji Yosidy oraz metody Galerkina, aby skonstruować słabe rozwiązanie. Największą trudnością na tym etapie jest otrzymanie oszacowań a priori na rozwiązanie. Jednym z ciekawszych wyników pośrednich, zasługujących na szczególną uwagę, jest uogólnienie elementarnej równości

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y(t)^2\right) = y(t)\frac{dy}{dt},$$

na przypadek ułamkowy z występującym wyrażeniem $u \cdot \partial_t^\alpha u$. Jest to kluczowy rezultat potrzebny do uzyskania oszacowań od dołu na wspomniany iloczyn; trudność polega na współistnieniu operatora nielokalnego i wartości funkcji (która jest lokalna). Zastosowane techniki prowadzą do głównego twierdzenia o istnieniu w pracy [H1]. Szczególnie cenne jest przy tym założenie jedynie stosunkowo słabej regularności warunków brzegowych i początkowych.

W pracy [H2] habilitant wraz ze współautorem bada dalsze niuanse równań z pochodnymi Caputo na obszarach parabolicznych przy operatorze L o zmiennych współczynnikach w wielu wymiarach:

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = Lu + f, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = 0, & \text{na } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Techniki wypracowane w [H1] zostają tutaj rozwinięte i zastosowane do uzyskania mocnego wyniku o istnieniu i jednoznaczności dla powyższego zagadnienia. W szczególności habilitant pokazuje, że słabe rozwiązanie istnieje w $W^\alpha(u_0; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$, gdzie, jak zwykle w jego pracach, zakłada się bardzo słabe wymagania co do regularności współczynników. Ponownie wykorzystane są oszacowania od dołu na iloczyn pochodnej Caputo i wartości funkcji, metoda Galerkina oraz twierdzenie Banacha. Co ciekawe, gdy $\alpha > 1/2$ rozwiązanie okazuje się być ciągłe aż do $t = 0$ włącznie i wówczas można rozumieć warunek początkowy w sensie klasycznym. Nie jest to oczywiste dla równań ułamkowych, co autor ilustruje w autoreferacie kilkoma przykładami. Kolejnym ważnym wynikiem [H2] jest twierdzenie o podnoszeniu regularności rozwiązań, gdy współczynniki są odpowiednio gładkie. Obecność operatora nielokalnego znacząco komplikuje rozumowanie i wymaga niestandardowych podejść. W mojej opinii wyniki pracy [H2] są jednymi z fundamentalnych rezultatów w teorii równań różniczkowych cząstkowych z pochodną Caputo. Od dłuższego czasu środowisko oczekiwało ścisłych i optymalnych twierdzeń dotyczących istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań tych zagadnień.

Prace [H3], [H4] i [H6] dotyczą równań z pochodną Caputo o tzw. rozproszonym rzędzie (ang. *distributed order*), tj.

$$\partial_t^{(\mu)} u(t) = \int_0^1 D^\alpha u(t)\, \mu(\alpha)\, d\alpha, \tag{2}$$

gdzie μ jest zadaną wagą (gęstością) określającą udział poszczególnych rzędów pochodnej ułamkowej. Rozważanie takich operatorów ma sens fizyczny — zwykle trudno jest eksperymentalnie ustalić dokładnie jeden stały rząd α, a naturalniejsze jest przyjęcie pewnego rozkładu μ. W pracy [H3] zawarto wyniki dotyczące równania parabolicznego z operatorem rozproszonym: głównym rezultatem jest eleganckie twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności (oraz kilka wyników regularnościowych). Jak w pracach [H1] i [H2], wypracowana metoda dowodowa okazuje się bardzo ogólna i może być zastosowana do równań z operatorami rozproszonymi. Istotną częścią pracy było ustalenie warunków na rozkład μ, gwarantujących dobrze postawione zagadnienie. Okazuje się, że założenia są bardzo słabe:

$$\mu \in L^1(0,1), \quad \mu \geq 0, \quad \mu \not\equiv 0. \tag{3}$$

Ma to związek z teorią jąder klasy $\mathcal{PC}$, którą habilitant z powodzeniem stosuje w rozważaniach.

W artykule [H4] habilitant bada tempo zaniku rozwiązań równania (2) dla dużych czasów. Wiadomo, że w przypadku klasycznej dyfuzji rozwiązania na ograniczonych dziedzinach zanikają wykładniczo szybko, a niedawne prace wskazywały, że dyfuzja anomalna często daje potęgowe tempo zaniku. Naturalne było pytanie, jak wygląda to dla rozproszonego rzędu. Habilitant wraz z K. Ryszewską wykazali (przy znacznie słabszych założeniach niż w wcześniejszych pracach), że: jeśli nośnik μ dochodzi do zera, to zanik może być logarytmiczny; w przeciwnym wypadku zanik ma charakter potęgowy. W obu przypadkach zanik jest relatywnie powolny. Intuicja jest taka, że gdy nośnik μ zawiera bardzo małe rzędy, ich wkład kumuluje efekt powolnego (logarytmicznego) zaniku (małe $\alpha \to$ wolna dynamika). Najważniejszym rezultatem autorów jest uzyskanie optymalnych oszacowań na normę rozwiązania przy założeniach (3). Ponadto rozważane równanie było bardzo ogólne - autorzy poradzili sobie również z sytuacją, gdy współczynniki operatora eliptycznego zależą od czasu, co zwykle generuje dodatkowe trudności.

W pracy [H6] habilitant wraz ze współautorami rozważa bardzo ogólne równania ewolucyjne: operator eliptyczny spełnia jedynie założenia o ograniczoności współczynników, natomiast ewolucja w czasie jest opisywana przez (2), gdzie miara odpowiadająca μ może zawierać atomy Diraca. Z punktu widzenia zastosowań oznacza to, że pewne rzędy pochodnej Caputo mogą być dominujące, podczas gdy dla innych znamy jedynie przedział ich występowania. To uogólnienie powoduje szereg trudności, z których główna to brak odpowiedniego skalowania (ogólna postać miary nie posiada przyjemnej symetrii). Wymaga to podejścia odmiennego od standardowych technik literaturowych i prowadzi przez dowód słabej nierówności typu Harnacka dla rozwiązań, a następnie przez pokazanie ich C^{β}-ciągłości Höldera. Habilitant słusznie zauważa, że (klasyczna) nierówność Harnacka nie zachodzi dla dyfuzji z pochodną Caputo w wymiarach większych niż 1 (wynik dotyczący pochodnej rozproszonej został udowodniony przez K. Ryszewską i R. Zachera). Praca [H6] jest bardzo interesująca, złożona i zawiera wyniki wysoce nietrywialne - artykuł liczy około 80 stron i ukazał się w *Mathematische Annalen*, co świadczy o dużym kunszcie technicznym, bogatym warsztacie oraz dogłębnym rozumieniu literatury przez habilitanta.

Na koniec wrócę do krótkiego omówienia pracy [H5], w której habilitant ponownie bada ułamkowe zagadnienie Stefana. Szczególnie spodobało mi się podejście autorów, które wniosło nowy model do literatury. Jak autor pokazuje, we wstępnych badaniach nielokalnego zagadnienia Stefana występowały trudności z wykazaniem wyższej regularności rozwiązań. Skłoniło to habilitanta do próby wyprowadzenia modelu w sposób ścisły z podstaw fizycznych. Doprowadziło to do kilku istotnych modyfikacji modelu, które następnie zostały potwierdzone przez innych badaczy. Dodatkowo w [H5] zbadano własności oraz istnienie rozwiązań samopodobnych otrzymanego modelu Stefana. Brak spodziewanej (i naturalnej) regularności rozwiązania doprowadził autora do ciekawych nowych rozważań i modeli - wszystko otrzymane w sposób matematycznie ścisły.

Podsumowując moją opinię o wynikach osiągnięcia habilitacyjnego dra Adama Kubicy, chciałbym wymienić następujące punkty.

1. Przede wszystkim uważam, że wyniki otrzymane przez habilitanta są trudne, istotne i potrzebne w obszarze badań równań parabolicznych z nielokalnymi operatorami w czasie. Długo zanim otrzymałem powołanie do napisania tej recenzji, znałem wiele prac dra Kubicy, ponieważ były one przydatne przy uzyskiwaniu moich własnych rezultatów.

2. Wyniki habilitanta dotyczące istnienia i jednoznaczności stanowią ważny fundament literatury dotyczącej liniowego równania subdyfuzji - to nie są wyniki przyczynkowe.

3. Jakość otrzymanych rezultatów jest bardzo wysoka. Niektóre z nich wymagały dużej sprawności technicznej, dokładności, znajomości literatury oraz cierpliwości.

Biorąc pod uwagę powyższe uwagi, oceniam osiągnięcie habilitacyjne dra Adama Kubicy bardzo wysoko.

3 Omówienie pozostałych osiągnięć

3.1 Badania naukowe

Baza Scopus podaje 19 opublikowanych prac, cytowanych łącznie niemal 250 razy. Uważam, że liczbowo jest to jak najbardziej wystarczające dla kandydata do habilitacji w matematyce. Autor publikuje w czasopismach o dużym prestiżu. Na szczególną uwagę zasługuje wydana wspólnie z K. Ryszewską oraz M. Yamamoto monografia *Time-Fractional Differential Equations*, zawierająca fundamentalne ujęcie teorii równań z ułamkowymi pochodnymi. Taka monografia jest potrzebna w literaturze, gdyż wiele dostępnych pozycji nie wykazuje tej samej dozy ścisłości czy podejścia z analizy funkcjonalnej. Sądzę, że ta pozycja trwale wpisze się w zestaw wartościowych źródeł przedmiotu.

Nie będę szczegółowo opisywał pozostałych prac pana dra Kubicy, a zaznaczę jedynie ich tematykę. W dorobku wyodrębnić można trzy główne obszary działalności. Pierwszy to analiza równań z pochodnymi ułamkowymi. Oprócz wymienionej monografii, habilitant jest autorem pracy, w której bardzo szczegółowo charakteryzuje przestrzeń obrazu całki ułamkowej działającej na L^2. Kolejnym obszarem jest mechanika płynów, gdzie bada warunkową regularność rozwiązań równań Naviera-Stokesa (w pracach z M. Pokornym oraz W. Zajączkowskim) oraz zagadnienia związane z turbulencją w kontekście teorii Kołmogorowa (ze swoim doktorantem P. Kosewskim). Ponadto habilitant opublikował wyniki pochodzące zarówno z pracy magisterskiej (równanie Poissona na obszarach wielokątnych), jak i z pracy doktorskiej (równania cząstkowe w przestrzeniach wagowych). Świadczy to o tym, że od początku swojej kariery prowadził badania na wysokim poziomie i w aktualnych tematach. Pozostały dorobek habilitanta oceniam również bardzo dobrze.

3.2 Pozostała działalność

Z uwagi na wymóg ustawowy mówiący o „istotnej aktywności naukowej realizowanej w więcej niż jednej uczelni", omówię współpracę habilitanta z matematykami z innych ośrodków. Pan dr Kubica wielokrotnie odwiedzał M. Yamamoto oraz Y. Gigę w Tokio - efektem tych podróży są ważne prace opublikowane wspólnie z nimi. Pozostałe wizyty naukowe odbyły się w Pradze (współpraca z M. Pokornym) oraz w Pittsburghu (współpraca z G. Galdi). Są to ośrodki najwyższej klasy, a współpraca z nimi z pewnością przyczyniła się do rozwoju umiejętności habilitanta. Oczywiście nie każdy miałby okazję pracować z takimi matematykami, co świadczy korzystnie o habilitancie. Pan dr Kubica regularnie prezentuje swoje rezultaty na międzynarodowych konferencjach - podczas ICIAM w Walencji organizował także minisympozjum. Uważam, że ustawowy wymóg aktywności na innych uczelniach jest spełniony.

Posiadanie habilitacji - czyli uzyskanie uprawnień do prowadzenia samodzielnej działalności naukowej - wiąże się m.in. z możliwością prowadzenia przewodów doktorskich. Habilitant udowodnił, że sprosta temu zadaniu. Dotychczas był promotorem pomocniczym w trzech przewodach, z czego dwa zakończyły się obroną. Warto podkreślić, że jego pierwszą doktorantką była K. Ryszewska, z którą habilitant stale współpracuje. Biorąc pod uwagę jakość uzyskanych wyników, jestem przekonany, że habilitant jest znakomicie przygotowany do prowadzenia doktorantów oraz wytyczania nowych i ważnych kierunków badań.

Na koniec tej części chciałbym pozytywnie ocenić działalność dydaktyczną habilitanta oraz jego udział w grantach (dotychczas głównie jako wykonawca; mam nadzieję, że w przyszłości uzyska finansowanie jako kierownik projektu).

4 Konkluzja

Biorąc pod uwagę wkład habilitanta w rozwój dziedziny jaką są nielokalne równania różniczkowe oraz pozostałe dokonania autora uznaję, że zadecydowanie spełnia on wymogi stawiane kandydatom do stopnia doktora habilitowanego. W szczególności uważam, że pan dr Adam Kubica spełnia wymagania podane w art. 219 ust. 1, 2 i 3 ustawy z dn. 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2021 r. poz. 478 z późn. zm.). **Wnioskuję zatem o dopuszczenie pana dra Adama Kubicy do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego.**

....

dr hab. inż. Łukasz Płociniczak, prof. PWr