Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75
00-662 Warszawa
za pośrednictwem
Rady Doskonałości Naukowej
pl. Defilad 1
00-901 Warszawa
(Pałac Kultury i Nauki, p. XXIV, pok. 2401)

dr Adam Kubica
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75
00-662 Warszawa

Wniosek

z dnia 14.07.2025r.

o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie *nauk ścisłych i przyrodniczych* w dyscyplinie *matematyka*.

Określenie osiągnięcia naukowego będącego podstawą ubiegania się o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji

Wnioskuję – na podstawie art. 221 ust. 10 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce – aby komisja habilitacyjna podejmowała uchwałę w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w głosowaniu **jawnym**.

Zostałem poinformowany, że: Administratorem w odniesieniu do danych osobowych pozyskanych w ramach postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest Przewodniczący Rady Doskonałości Naukowej z siedzibą w Warszawie (pl. Defilad 1, XXIV piętro, 00-901 Warszawa). Kontakt za pośrednictwem e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl , tel. 22 656 60 98 lub w siedzibie organu. Dane osobowe będą przetwarzane w oparciu o przesłankę wskazaną w art. 6 ust. 1 lit. c) Rozporządzenia UE 2016/679 z dnia z dnia 27 kwietnia 2016 r. w związku z art. 220 - 221 oraz art. 232 – 240 ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku - Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, w celu przeprowadzenie postępowania o nadanie stopnia doktora habilitowanego oraz realizacji praw i obowiązków oraz środków odwoławczych przewidzianych w tym postępowaniu. Szczegółowa informacja na temat przetwarzania danych osobowych w postępowaniu dostępna jest na stronie www.rdn.gov.pl/klauzula-informacyjna-rodo.html

Z poważaniem

Adam Kubica

Załączniki:

1. Dane kontaktowe wnioskodawcy.
2. Odpis dyplomu nadania stopnia doktora nauk matematycznych.
3. Autoreferat
4. Wykaz osiągnięć naukowych stanowiących znaczny wkład w rozwój dyscypliny matematyka.
5. Cztery oświadczenia współautorów.
6. Nośnik danych „pendrive" z kompletem dokumentów.

Autoreferat

1. **Imię i nazwisko:** Adam Kubica
2. **Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:**
   - stopień naukowy doktora nauk matematycznych w dyscyplinie matematyka, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, 2009, tytuł rozprawy doktorskiej:
     Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych,
     promotor: prof. dr hab Piotr Rybka, *wyróżnienie*
   - tytuł magistra matematyki: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, 2003, tytuł pracy magisterskiej:
     Równanie Poissona na obszarze wielokątnym z mieszanymi warunkami brzegowymi,
     promotor: prof. dr hab Piotr Rybka
3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych**
   - od 1.10.2009 **adiunkt**,
     Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej
   - 1.10.2008 – 30.09.2008 **asystent**,
     1/2 etatu, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej
   - od 1.10.2005 **asystent/starszy wykładowca**
     1/2 etatu, Instytut Matematyki i Kryptologii Wojskowej Akademii Technicznej
   - 1.01.2004 – 30.06.2004, **asystent**,
     Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk
4. **Wskazanie osiągnięcia** wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595 ze zm.):

   Rozprawa habilitacyjna zatytułowana

   Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji

   składa się z cyklu 6 prac:

[H1] A. Kubica, P. Rybka, K. Ryszewska, *Weak solutions of fractional differential equations in non cylindrical domains*,
Nonlinear Anal. Real World Appl. 36 (2017), 154–182.

[H2] A. Kubica, M. Yamamoto, *Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients*,
Fract. Calc. Appl. Anal. 21 (2018), no. 2, 276–311.

[H3] A. Kubica, K. Ryszewska, *Fractional diffusion equation with distributed-order Caputo derivative*,
J. Integral Equations Appl. 31 (2019), no. 2, 195–243.

[H4] A. Kubica, K. Ryszewska, *Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo derivative*
J. Math. Anal. Appl. 465 (2018), no. 1, 75–99.

[H5] A. Kubica, K. Ryszewska, *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*
Math. Methods Appl. Sci. 44 (2021), no. 6, 4245–4275.

[H6] A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative*
Math. Ann. 390 (2024), no. 2, 2513–2592.

Omówienie rozprawy:

Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji

Wprowadzenie

Inspiracją do podjęcia badań nad zagadnieniami zawierającymi ułamkowe pochodne była wizyta prof. V. Vollera, inżyniera z Uniwersytetu Minnesoty, zaproszonego przez prof. Piotra Rybkę na Wydział MIM UW w 2015 roku. Profesor Voller od wielu lat zajmował się zagadnieniem transportu energii cieplnej w niejednorodnych ośrodkach, badając zjawisko nietypowej dyfuzji (anomalous diffusion), które może być zaobserwowane np. w zagadnieniach topnienia. Aby przedstawić dokładniej zagadnienie nietypowej dyfuzji zacznijmy od rozważenia „typowej" dyfuzji (normal diffusion), w której strumień ciepła w ośrodku Ω jest proporcjonalny do minus gradientu temperatury, tj.

$$q(x,t) = -c\nabla T(x,t), \tag{1}$$

zwanym prawem Fouriera lub ogólniej, I prawem Ficka. Ograniczmy się do przypadku jednowymiarowego, przyjmując $c = 1$, czyli

$$q(x,t) = -T_x(x,t), \text{ gdzie } x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}. \tag{2}$$

Niech $V = (a,b)$ będzie przedziałem. Przyjmując zasadę zachowania energii cieplnej wnioskujemy, że zmiana temperatury w przedziale V jest równa różnicy strumieni na brzegu V, tj.

$$\frac{d}{dt}\int_V T(x,t)dx = q(a,t) - q(b,t). \tag{3}$$

Podstawiając (2) do powyższej równości, po zastosowaniu podstawowego twierdzenia rachunku całkowego otrzymujemy równanie przewodnictwa ciepła

$$T_t(x,t) - T_{xx}(x,t) = 0 \quad \text{w } \Omega.$$

Załóżmy, że Ω jest obszarem wypełnionym wodą, a z prawej strony (jesteśmy w 1D) granicę Ω stanowi lód, w którym przyjmujemy stałą, zerową temperaturę. Wtedy, na skutek ciepła zawartego w wodzie, lód będzie ulegał przemianie fazowej, ze stałej w ciekłą. Zatem topnienie lodu powoduje, że obszar Ω będzie się zmieniał w czasie, tj. $\Omega = \Omega(t)$. Jest to przykład zagadnienia ze swobodną powierzchnią, zwanym klasycznym, jednofazowym zagadnieniem Stefana. Oznaczmy położenie granicy woda/lód jako funkcję od czasu $x = s(t)$. Korzystając z zasady zachowania energii uwzględniającej ciepło utajone związane z przemianą fazową, po odcałkowaniu przez części, otrzymujemy tzw. *warunek Stefana*

$$\frac{d}{dt}s(t) = -T_x(s(t),t). \tag{4}$$

Dodając warunki brzegowe i początkowe otrzymujemy klasyczne, jednofazowe *zagadnienie Stefana*

$$\left\{\begin{array}{rcllr} T_t(x,t) - T_{xx}(x,t) & = & 0 & \text{w} & Q_s \\ T_x(0,t) & = & -h(t) & \text{dla} & t > 0 \\ T(s(t),t) & = & 0 & \text{dla} & t > 0 \\ T(x,0) & = & u_0(x) & \text{dla} & x \in (0,b) \\ \frac{d}{dt}s(t) & = & -T_x(s(t),t) & \text{dla} & t > 0 \\ s(0) & = & b & & \end{array}\right., \tag{5}$$

gdzie dane są nieujemne funkcje u_0, h i $b > 0$, natomiast Q_s oznacza zbiór $\{(x,t) : t > 0,\ 0 < x < s(t)\}$. Zatem niewiadomymi w zagadnieniu Stefana są funkcja temperatury $T(x,t)$ i brzeg swobodnej powierzchni opisany funkcją $s(t)$. Istnienie rozwiązań zagadnienia (5) jest dobrze znane (np. [2], [33], [12]). Ponadto, cechą charakterystyczną rozwiązań (5) jest to, iż tzw. *średnie kwadratowe przemieszczenie* (ang. mean squared displacement ozn. MSD) jest liniowe względem czasu. Ta własność jest definiująca dla typowej/normalnej dyfuzji. W szczególności, $s(t)$ jest proporcjonalne do $t^{\frac{1}{2}}$ ([46]). Jednakże, w niektórych eksperymentach fizycznych obserwujemy odmienną dynamikę, np. w przypadku przyrostu warstwy szronu granica styku różnych faz $s(t)$ jest proporcjonalna do $t^{0{,}655}$ ([37]). Więcej przykładów, gdy $s(t) \approx t^a$ dla $a \in (0, \frac{1}{2})$ (przypadek tzw. poddyfuzji (sub-diffision)) lub $s(t) \approx t^a$ dla $a > \frac{1}{2}$) (przypadek tzw. naddyfuzji (superdiffision)) można znaleźć w pracach [36], [45]. Okoliczność, iż $s(t) \approx t^a$ dla $a \neq \frac{1}{2}$, a ogólniej, nieliniowość MSD, jest cechą definiującą nietypową dyfuzję (anomalous diffusion). Obserwujemy ją w przypadku dyfuzji w ośrodkach niejednorodnych. Zatem zagadnienie typu (5) nie jest adekwatne do opisu zjawisk w wielu ośrodkach niejednorodnych. Powstaje zatem pytanie: jak zmodyfikować model, tak by opisywał nietypową dyfuzję (anomalous diffusion)? W pracy [31] Metzler i Klafter wskazują, iż rozszerzenie zagadnień poprzez wprowadzenie pochodnych ułamkowych pozwoli opisać szerszą klasę zjawisk. Tym tropem podążył prof. V. Voller i zaproponował w pracy [46] następujący model

$$\begin{cases} D^{\alpha}T(x,t) - T_{xx}(x,t) &= 0 \quad \text{w} \quad Q_s \\ T_x(0,t) &= -h(t) \quad \text{dla} \quad t>0 \\ T(s(t),t) &= 0 \quad \text{dla} \quad t>0 \\ T(x,0) &= u_0(x) \quad \text{dla} \quad x\in(0,b) \\ D^{\alpha}s(t) &= -T_x(s(t),t) \quad \text{dla} \quad t>0 \\ s(0) &= b \end{cases}, \tag{6}$$

gdzie pochodne czasowe układu (5) zostały zastąpione ułamkowymi pochodnymi Caputo rzędu $\alpha \in (0,1)$ względem czasu. Przy czym te ostatnie są zdefiniowane następująco: wpierw określamy całkę ułamkową Riemanna-Liouville'a

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau \quad \text{dla} \quad f\in L^1(0,T), \tag{7}$$

następnie pochodną Riemanna-Liouville'a (RL),

$$\partial^{\alpha}f(t) = \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}f(t)d\tau, \tag{8}$$

a w końcu pochodną Caputo

$$D^{\alpha}f(t) = \partial^{\alpha}[f(\cdot)-f(0)](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}[f(\tau)-f(0)]d\tau. \tag{9}$$

Pokrótce skomentujmy powyższe formuły. Otóż, całka ułamkowa jest w istocie ułamkową potęgą całki, tj. dla operatora całkowania

$$If(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

można zdefiniować ułamkowe potęgi rzędu α dla $\alpha > 0$, a wtedy $(I)^{\alpha} = I^{\alpha}$ (patrz [30]). Z kolei pochodna Riemanna-Liouville'a ∂^{α} jest operatorem lewostronnie odwrotnym do I^{α}, tj. $\partial^{\alpha}I^{\alpha} = id$ na $L^1(0,T)$. Zatem dziedziną ∂^{α} jest obraz I^{α}, który, co jest faktem znanym, jest zadany przy pomocy interpolacji zespolonej odpowiednich przestrzeni (w przypadku przestrzeni L^2 wynik ten, wraz ze wszystkimi niezbędnymi faktami pomocniczymi, został przedstawiony w [23]). W końcu, pochodna Caputo jest pewną „regularyzacją" pochodnej RL, określoną tak, by D^{α} znikała na stałych funkcjach. Tutaj wskazanie dokładnej klasy funkcji, dla której (9) jest dobrze zdefiniowana, nie jest trywialne, jednakże, w wielu przypadkach wystarczy ograniczyć się do klasy funkcji absolutnie ciągłych, a wtedy formuła (9) może być zapisana następująco

$$D^{\alpha}f(t) = I^{1-\alpha}f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}f'(\tau)d\tau \quad \text{dla} \quad f\in AC. \tag{10}$$

Przejdźmy do omówienia prac [H1]-[H6].

Omówienie pracy [H1]

Praca [H1] stanowiła pierwszy krok w badaniu zagadnienia (6). Inspiracją tutaj było podejście do zagadnienia (5) przedstawione w [2], które składa się z następujących kroków:

(a) rozwiązanie (5)$_1$–(5)$_4$ w przypadku ustalonego $s(t)$,

(b) uzasadnienie odpowiedniej regularności rozwiązań (5)$_1$–(5)$_4$, w szczególności ciągłości aż do brzegu, by możliwe było zastosowanie słabej i mocnej zasady maksimum, a w końcu i lematu Hopfa,

(c) sformułowanie zagadnienia na punkt stały, którego rozwiązaniem jest swobodna powierzchnia $s(t)$.

Praca [H1] jest poświęcona konstrukcji słabych rozwiązań zagadnienia (6)$_1$–(6)$_4$ przy ustalonym $s(t)$, o którym zakładamy, że $s' \geq 0$. Na wstępie pojawiają się tu następujące trudności:

- obszar Q_s nie jest cylindryczny
- pochodna Caputo $D^\alpha T(x,t)$ uwzględnia wartości $T(x,\tau)$ dla $\tau < t$ (tzw. efekt pamięci), ale jednocześnie nie możemy „wyjść" poza

$$Q_{s,t} = \{(x,\tau): \ 0 < x < s(\tau), \ 0 < \tau < t\}.$$

Zatem w tej sytuacji pochodną Caputo definiujemy następująco

$$D_s^\alpha u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} u_t(x,\tau) d\tau & \text{gdy} \quad x \leq s(0) \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{s^{-1}(x)}^t (t-\tau)^{-\alpha} u_t(x,\tau) d\tau & \text{gdy} \quad x > s(0), \end{cases} \tag{11}$$

gdzie przyjmujemy, że $s^{-1}(x) = \max\{t: \ s(t) = x\}$ gdy $x > s(0)$ i $s^{-1}(x) = 0$ gdy $x \in [0, s(0)]$. Analogicznie wprowadzamy całkę ułamkową

$$I_s^\alpha u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(x,\tau) d\tau & \text{gdy} \quad x \leq s(0) \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{s^{-1}(x)}^t (t-\tau)^{\alpha-1} u(x,\tau) d\tau & \text{gdy} \quad x > s(0). \end{cases} \tag{12}$$

Wtedy otrzymujemy postać $D_s^\alpha u$ użyteczną w słabym sformułowaniu zagadnienia

$$D_s^\alpha u(x,t) = \frac{d}{dt} I_s^{1-\alpha} [u(x,t) - \widetilde{u}_0(x)].$$

W przypadku pochodnych rzędu całkowitego, zagadnienia w obszarach niecylindrycznych można sprowadzić stosowną zamianą zmiennych do zagadnienia w obszarze cylindrycznym. Jednakże w przypadku pochodnych rzędu ułamkowego, taka redukcja nie prowadzi do obiecującego zagadnienia i tym samym pomysł ten, od razu na wstępie, został zarzucony.

Konstrukcję słabych rozwiązań dla zagadnień ewolucyjnych przedstawił prof. R. Zacher w pracy [49]. W przypadku pochodnej RL opiera się ona na regularyzacji $\partial^\alpha u$ przy pomocy aproksymacji Yosidy, mianowicie, zapisując ∂^α w postaci

$$\partial^\alpha f(t) = \frac{d}{dt}(k * f)(t), \quad k(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha},$$

gdzie

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau,$$

wprowadza się ciąg nieujemnych, nierosnących funkcji $\{k_n\} \subseteq W^{1,1}_{loc}([0,\infty))$ taki, że $k_n \to k$ w $L^1_{loc}([0,\infty))$ (k_n okreslone są warunkiem $\frac{1}{n}k_n + l * k_n = 1$, gdzie l spełnia $k*l=1$). Wtedy, jeżeli dziedzinę operatora $u \mapsto Bu \equiv \frac{d}{dt}(k*u)$ określamy następująco (str. 4 [49])

$$D(B) = \{u \in L^2(0,T;H) : \ \ k*u \in {}_0H^1(0,T;H)\},$$

gdzie H to przestrzeń Hilberta, natomiast zero w dolnym indeksie ${}_0H^1$ oznacza zerowanie się funkcji w zerze, to

$$B_n u = nB(n+B)^{-1}u = \frac{d}{dt}(k_n * u) \to \frac{d}{dt}(k*u) \quad \text{w} \quad L^2(0,T;H). \tag{13}$$

Taka regularyzacja zagadnienia umożliwia zastosowanie ogólnej teorii zagadnień ewolucyjnych (patrz [35]), która po uzyskaniu stosownych oszacowań a priori daje istnienie słabych rozwiązań. Jednakże w przypadku pochodnej RL $\partial^\alpha_s f := \frac{d}{dt}I^{1-\alpha}_s f$, liczonej w obszarze niecylindrycznym, powyższe jądro k zależy również od x, co uniemożliwia zastosowanie podejścia przedstawionego w [49].

Zatem praca [H1] jest próbą wypracowania stosowalnej metody działającej w przypadku pochodnych ułamkowych typu D^α_s w obszarach niecylindrycznych. Zastosowano tutaj metodę Galerkina, która standardowo składa się z trzech kroków:

(i) konstrukcji rozwiązań przybliżonych,

(ii) oszacowania a priori,

(iii) przejście do granicy w zagadnieniu przybliżonym.

Krok (ii) jest zazwyczaj kluczowy i od niego rozpocznijmy. Aby uzyskać odpowiednie oszacowania, często wystarcza testować badany układ potencjalnym rozwiązaniem. Tutaj konieczne będzie oszacowanie od dołu odcałkowanego wyrażenia $D^\alpha_s u(x,t)\cdot u(x,t)$. Przypomnijmy, że w przypadku pochodnej rzędu całkowitego mamy oczywistą równość $\frac{d}{dt}u \cdot u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2$, natomiast w wyrażeniu $D^\alpha_s u(x,t)\cdot u(x,t)$ pierwszy czynnik zależy od wartości $u(x,\tau)$ dla $\tau \in (s^{-1}(x),t)$, a drugi to tylko $u(x,t)$. Ta własność czyni wspomniane wyżej oszacowanie od dołu nietrywialnym. Ponadto, determinuje ono pewną regularność $s(t)$ i klasę funkcji, dla której zachodzi. Mianowicie, przy założeniu że

$$t \mapsto t^{1-\alpha}s'(t) \in C([0,T]) \tag{14}$$

otrzymano następujący lemat

Lemat 1 (Lemma 3.1 [H1]). *Niech u będzie ciągłe na $\overline{Q_{s,T}}$ i takie, że $t^{1-\alpha}u_t \in C(\overline{Q_{s,T}})$. Wtedy, dla każdego $t\in(0,T]$ zachodzi następujące oszacowanie,*

$$D^\alpha\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,s(t))} + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^b |u(x,t)-u(x,0)|^2dx$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_b^{s(t)}[t-s^{-1}(x)]^{-\alpha}|u(x,t)-u(x,s^{-1}(x))|^2dx$$

$$\leq 2\int_0^{s(t)} D^\alpha_s u(x,t)\cdot u(x,t)dx + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}|u(s(\tau),\tau)|^2\dot{s}(\tau)d\tau. \tag{15}$$

Dowód lematu 3.1 [H1] pokazuje, iż w istocie mamy równość. Ponadto, jeżeli u spełnia warunek typu (6)$_3$, to z (15) otrzymujemy

$$I^{1-\alpha}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,s(t))} \le 2\int_0^t\int_0^{s(\tau)} D_s^\alpha u(x,\tau)\cdot u(x,\tau)dxd\tau + \frac{t^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\|u_0\|^2_{L^2(0,s(0))},$$

co jest kluczowym oszacowaniem w metodzie Galerkina (jest to odpowiednik oszacowania z lematu 2.1 [49] w przypadku niecylindrycznego obszaru).

Zatem warunek $t^{1-\alpha}u_t \in C(\overline{Q_{s,T}})$ determinuje klasę funkcji, do której powinno należeć rozwiązanie przybliżone. Dodatkową trudnością jest tu niecylindryczność obszaru $Q_{s,T}$, której skutkiem jest zależność funkcji bazowych w metodzie Galerkina od t. Naturalnym wyborem funkcji bazowych $\{\varphi_n\}$ dla układu (6) (po ujednorodnieniu warunku brzegowego typu Neumanna) jest rodzina funkcji własnych zdeterminowana zagadnieniem

$$-\varphi_{n,xx}(x,t) = \lambda_n^2(t)\varphi_n(x,t), \;\; \varphi_{n,x}(0,t)=0, \;\; \varphi_n(s(t),t)=0.$$

Wtedy, dla każdego $t\in[0,T]$, rodzina $\{\varphi_n(\cdot,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest układem ortogonalnym zupełnym w $L^2(0,s(t))$. Jej zależność od t jest istotną trudnością w kolejnych krokach.

Rozwiązania przybliżonego zagadnienia (6)$_1$–(6)$_4$ poszukujemy w postaci

$$v_m(x,t) = \sum_{n=0}^m c_{n,m}(t)\varphi_n(x,t). \tag{16}$$

Podstawiając (16) do stosownej wersji słabej postaci zagadnienia (6)$_1$–(6)$_4$ otrzymujemy

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}c_m'(\tau)d\tau + \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}B(\tau,t)c_m'(\tau)d\tau$$
$$+\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}D(\tau,t)c_m(\tau)d\tau + E(t)c_m(t) = G^\varepsilon(t), \tag{17}$$

gdzie $c_m(t) = (c_{0,m}(t),\ldots,c_{m,m}(t))$ jest szukanym rozwiązaniem, a B, D i E są pewnymi funkcjami o wartościach macierzowych, przy czym

$$B(\tau,t)_{n,k} = \int_0^{s(\tau)} \varphi_n(x,\tau)\left[\varphi_k(x,t)-\varphi_k(x,\tau)\right]dx \quad \text{dla} \quad 0\le\tau\le t\le T.$$

Poczynione założenia o $s(t)$ (14) skutkują tym, iż dominującym wyrażeniem w (17) jest to pierwsze. Zatem w celu rozwiązania (17) zapisujemy je w postaci

$$c_m(t) = c_m(0) - c_\alpha\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau (\tau-p)^{-\alpha}B(p,\tau)c_m'(p)dpd\tau - \int_0^t \frac{\dot{s}(p)}{s(p)}\hat{D}c_m(p)dp$$
$$-c_\alpha\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\int_0^\tau (\tau-p)^{-\alpha}\widetilde{D}(p,\tau)c_m(p)dpd\tau - c_\alpha\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E(\tau)c_m(\tau)d\tau + c_\alpha I^\alpha G^\varepsilon(t), \tag{18}$$

gdzie $B, \hat{D}, \widetilde{D}$ i E są pewnymi funkcjami o wartościach macierzowych. Tutaj zaczyna się zasadnicza matematyczna część pracy [H1], w której dowodzimy istnienia rozwiązań (18) w przestrzeni

$$X(T) = \{c\in C^1((0,T];\mathbb{R}^m): \;\; c(0)=c_m(0), \;\; t^{1-\alpha}c'(t)\in C([0,T];\mathbb{R}^m)\} \tag{19}$$

wyposażonej w normę

$$\|c\|_{X(T)} = \|c\|_{C([0,T])} + \|t^{1-\alpha}c'\|_{C([0,T])}.$$

Przyjrzyjmy się tylko pierwszym wyrażeniom z (18)

$$(P_1c)(t) := c(0) - c_\alpha \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (\tau-p)^{-\alpha} B(p,\tau) c_m'(p) dp d\tau$$

Istnienia rozwiązań (18) dowodzimy korzystając z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. W tym celu należy uzasadnić, że P_1 jest dobrze zdefiniowane na $X(T)$, a następnie, iż jest kontrakcją. Obie własności są, moim zdaniem, nietrywialne i złożone rachunkowo. Cześć z tych technicznych wyników została uzasadniona w dodatku do pracy. Na uwagę zasługuje Lemat A.4, który gwarantuje hölderowską ciągłość funkcji $t \mapsto t^{1-\alpha}(I^\alpha f')(t) = t^{1-\alpha}D^{1-\alpha}f(t) \in C^{0,1-\alpha}([0,T])$, przy założeniu $f \in AC[0,T]$ i $t^{1-\alpha}f' \in L^\infty(0,T)$. To kluczowa własność wykorzystywana w konstrukcji rozwiązań przybliżonych.

Dalsza część pracy jest już bardziej standardowa. Mając zdeterminowane współczynniki c_m równaniem (18) określamy rozwiązanie przybliżone v_m przez (16), a następnie otrzymujemy oszacowania korzystając z (15). Oszacowania, otrzymane w odpowiednich przestrzeniach, pozwalają wybrać podciąg słabo zbieżny, a przejście do granicy w tożsamości definiującej rozwiązania przybliżone prowadzi do zasadniczego twierdzenia pracy [H1]:

Twierdzenie 1 (Tw. 1.1 [H1])**.** *Załóżmy, że $T > 0$, $\alpha \in (0,1)$ i $s(t)$ jest ustaloną funkcją taką, że $s'(t) \geq 0$ i $s(t)$ spełnia (14). Niech $f \in L^2(Q_{s,T})$, $h \in C^1([0,T])$ i $u_0 \in L^2(0,b)$, gdzie $b > 0$. Wtedy istnieje $u(x,t)$ słabe rozwiązanie zagadnienia*

$$\begin{cases} D_s^\alpha u(x,t) &= u_{xx}(x,t) + f(x,t), & \text{gdy} \quad 0 < x < s(t),\ 0 < t < T, \\ -u_x(0,t) &= h(t), & \text{gdy} \quad 0 < t < T, \\ u(s(t),t) &= 0, & \text{gdy} \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) &= u_0(x), & \text{gdy} \quad 0 < x < b = s(0), \end{cases} \tag{20}$$

czyli $u, u_x \in L^2(Q_{s,T})$ i $u(x,t)$ spełnia następującą tożsamość całkową

$$-\int_{Q_{s,T}} I_s^{1-\alpha}[u(x,t) - \tilde{u}_0(x)]\varphi_t(x,t) dx dt + \int_{Q_{s,T}} u_x(x,t)\varphi_x(x,t) dx dt$$

$$= \int_0^T h(t)\varphi(0,t) dt + \int_{Q_{s,T}} f(x,t)\varphi(x,t) dx dt$$

dla każdej funkcji $\varphi \in C^1(\overline{Q_{s,T}})$ takiej, że $\varphi(x,T) = 0$ dla $x \in [0, s(T)]$ i $\varphi(s(t),t) = 0$ dla $t \in [0,T]$.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H1] są:

- zastosowanie metody Galerkina do obszaru niecylindrycznego i konstrukcja rozwiązań przybliżonych, istotnie powiązanych z regularnością $s(t)$,
- techniczny lemat A.4 gwarantujący hölderowską ciągłość funkcji $t^{1-\alpha}(I^\alpha f')(t)$,
- wprowadzenie przestrzeni $X(T)$, jako użytecznej w zagadnieniach z pochodną ułamkową. Co istotne, rozwiązanie zagadnienia Stefana zostało właśnie skonstruowane w tej przestrzeni [19],

- modyfikacja konstrukcji słabych rozwiązań, polegająca na tym, iż zamiast regularyzować D^α aproksymacją Yosidy, konstruujemy odpowiednio regularne rozwiązania przybliżone, pozostawiając niezmienioną pochodną ułamkową. Pomysł ten został wykorzystany w pracach [H2] i [H3].

Omówienie pracy [H2]

W zastosowaniach inżynierskich pochodna Caputo jest częściej stosowana niż pochodna Riemanna-Liouville'a, przynajmniej z dwóch powodów: po pierwsze, pochodna RL z funkcji stałych jest niezerowa ($\partial^\alpha 1(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$), a po drugie: kłopotliwe jest określenie warunków początkowych. Mianowicie, rozpatrzmy równanie $\partial^\alpha w = g$, gdzie $g \in L^1(0,T)$. Wtedy funkcje $w = I^\alpha g + bt^{\alpha-1}$ dla $b \in \mathbb{R}$ są rozwiązaniami, ale dla $b \neq 0$ nie jest określona wartość $w_{|t=0}$. Można zamiast wartości w zerze rozpatrywać granicę $t^{1-\alpha} w_{|t=0} = b$, ale nie jest to, w sensie inżynierskim, wartość mierzalna. Z tego powodu w zastosowaniach pochodna RL jest zastępowana pochodną Caputo $D^\alpha w(t) = \partial^\alpha [w(\cdot) - w(0)](t)$, która nie ma powyższych dwóch kłopotliwych własności.

Skoro pochodna Caputo coraz szerzej znajduje zastosowanie w naukach inżynierskich, to warto rozwijać czysto matematyczną teorię z jej uwzględnieniem. W pracy [H2] rozważamy zagadnienie

$$D^\alpha u = Lu + f, \tag{21}$$

gdzie L jest ogólnym operatorem jednostajnie eliptycznym, przy czym rozwiązanie ma spełniać zadany warunek początkowy

$$u_{|t=0} = u_0. \tag{22}$$

Zatem naturalnym jest przyjąć, iż

$$D^\alpha u = \partial^\alpha [u(\cdot) - u_{|t=0}] = \partial^\alpha [u(\cdot) - u_0],$$

i rozpatrywać równanie

$$\partial^\alpha [u(\cdot) - u_0] = Lu + f. \tag{23}$$

W pracy [49] (wniosek 4.1) pokazano, iż przy stosownych warunkach brzegowych, dla każdego $f \in L^2$ i dla każdego $u_0 \in L^2$ istnieje dokładnie rozwiązanie (23). Rodzi się tutaj pytanie: czy $u_{|t=0} = u_0$? Autor w [49] pisze (str. 2): „u_0 *może być traktowane jako warunek początkowy, przynajmniej w słabym sensie. Jeżeli* $\frac{d}{dt}(t^{-\alpha} * [u(\cdot) - u_0])$ *jest ciągłe, to* $u_{|t=0} = u_0$*.*” Jednakże brak jest odpowiedzi, co w sytuacji, gdy to założenie nie jest spełnione. Zauważmy, że f i u_0 jednoznacznie determinują rozwiązanie u. Zatem jaki jest związek $u_{|t=0}$ z f i u_0? Te pytania były istotną motywacją do podjęcia rozważań przedstawionych w pracy [H2]. Z drugiej strony można zadać pytanie: czy procedura konstrukcji słabych rozwiązań przedstawiona w pracy [H1] umożliwia podnoszenie regularności rozwiązań? Przypomnijmy, iż wciąż otwarta jest kwestia regularności rozwiązań $(6)_1$–$(6)_4$. Zatem warto wpierw rozważyć te kwestie w przypadku cylindrycznego obszaru, i temu poświęcona jest praca [H2].

Omawianie pracy [H2] zacznijmy od przytoczenia uwagi (str. 280 [H2]) dotyczącej 0-wymiarowego zagadnienia. Mianowicie, rozważmy ułamkowe równanie różniczkowe (FODE)

$$D^\alpha w(t) = f(t) \quad \text{dla} \quad t \in (0,T), \;\; w_{|t=0} = a. \tag{24}$$

Możemy zapisać powyższe zagadnienie w postaci

$$\partial^\alpha[w(\cdot)-a](t)=f(t). \tag{25}$$

Wtedy, np. dla $\alpha\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ możemy dobrać $f\in L^2(0,T)$ takie, że $\partial^\alpha f\notin L^2(0,T)$ (np. $f_\beta(t)=t^\beta$ dla $\beta\in(-\frac{1}{2},-\alpha)$), dla którego każde rozwiązanie (25) w klasie funkcji całkowalnych jest nieciągłe w zerze, mianowicie $\lim\limits_{t\to 0^+}w(t)$ nie istnieje. W szczególności warunek $w_{|t=0}=a$ nie jest spełniony, zatem lewa strona (25) **nie jest** pochodną Caputo. Na mocy wcześniejszych uwag całkowalne rozwiązanie (25) jest postaci $w(t)=a+bt^{\alpha-1}+I^\alpha f(t)$, gdzie $b\in\mathbb{R}$ jest dowolne. Słabe rozwiązania są konstruowane w L^2, zatem koniecznie w tym przypadku $b=0$. Nie zmienia to jednak faktu, że dla f jak powyżej, granica $\lim\limits_{t\to 0^+}w(t)=\lim\limits_{t\to 0^+}a+I^\alpha f(t)$ nie istnieje. Te trudności skutkują dwoma odmiennymi podejściami do pochodnej Caputo: pierwsze, klasyczne, (przedstawiane np. w przez prof. M. Yamomoto w [22]) bazujące na (24), i słabe, przedstawione np. w [49] bazujące na (25). W pracy [H2] skłaniamy się do tego ostatniego, szukając dodatkowych warunków na f, takich by rozwiązania (25) spełniały (24).

Zwróćmy uwagę na jeszcze jeden nowy aspekt związany z pochodnymi ułamkowymi. Zapiszmy (25) w postaci

$$\partial^\alpha w(t)-a\partial^\alpha 1(t)=f(t),$$

czyli

$$\Gamma(1-\alpha)t^\alpha\partial^\alpha w(t)-a=\Gamma(1-\alpha)t^\alpha f(t).$$

Mamy trzy możliwości: granica prawej strony, przy $t\to 0^+$, jest zerowa, niezerowa lub nie istnieje. Wtedy odpowiednio, granica $t^\alpha\partial^\alpha w(t)$: zależy tylko od a, zależy również od zachowania $f(t)$ w otoczeniu zera lub nie istnieje (z tym ostatnim przypadkiem mamy do czynienia dla powyższego f_β). To zupełnie odmienna sytuacja od tej, z którą mamy do czynienia z przypadku klasycznych zagadnień.

W pracy [H2] pokazujemy, że przy pewnych dodatkowych warunkach nałożonych na f, słabe rozwiązania (21) spełniają, w pewnym sensie, warunek $u_{|t=0}=u_0$. Zanim przejdziemy do omówienia tego wyniku, przedstawmy konstrukcję słabych rozwiązań, bazującą na ideach zawartych w [H1].

Załóżmy, że $T<\infty$ i $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ jest ograniczonym obszarem o gładkim brzegu, $N\geq 2$ i rozpatrujemy zagadnienie

$$\left\{\begin{array}{rcllll} D^\alpha u &=& Lu+f & \text{w} & \Omega^T:=\Omega\times(0,T), \\ u_{|\partial\Omega} &=& 0 & \text{dla} & t\in(0,T), \\ u_{|t=0} &=& u_0 & \text{w} & \Omega, \end{array}\right. \tag{26}$$

gdzie

$$Lu(x,t)=\sum_{i,j=1}^N\partial_i(a_{i,j}(x,t)\partial_j u(x,t))+\sum_{j=1}^N b_j(x,t)\partial_j u(x,t)+c(x,t)u(x,t), \tag{27}$$

jest ogólnym operatorem eliptycznym. O L zakładamy, że jest jednostajnie eliptyczny, tj. istnieją dodatnie stałe λ,Λ takie, że

$$\lambda|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j\leq\Lambda|\xi|^2 \quad \text{dla} \quad \xi\in\mathbb{R}^n,\ \ t\in[0,T]. \tag{28}$$

Zdefiniujmy za prof. R. Zacherem [49] przestrzeń

$$W^{\alpha}(u_0, H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) = \{u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) : \quad I^{1-\alpha}(u - u_0) \in {}_0H^1(0,T; H^{-1}(\Omega))\},$$

gdzie zero w dolnym indeksie ${}_0H^1$ oznacza zerowanie się funkcji dla $t = 0$. W pracy [49] przedstawiono konstrukcję słabych rozwiązań opartą na aproksymacji Yosidy operatora

$$D^{\alpha}u(x,t) = \frac{d}{dt} I^{1-\alpha}[u(x,\cdot) - u_0(x)](t) \tag{29}$$

i zastosowaniu teorii operatorów ewolucyjnych przedstawionej w [35]. Natomiast w pracy [H2] otrzymujemy analogiczny rezultat, przy czym wykorzystujemy tutaj idee zawarte w pracy [H1]. Mianowicie, operator (29) pozostawiamy niezmienionym, ale rozwiązań przybliżonych poszukujemy w odpowiedniej przestrzeni. Otrzymaliśmy następujący rezultat:

Twierdzenie 2 (Tw. 1.2, [H2]). *Załóżmy, że $\alpha \in (0,1)$, $T > 0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ i $f \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$. Niech zachodzi (28) i dla pewnych $p_1, p_2 \in [2, \frac{2N}{N-2})$ mamy $b \in L^{\infty}(0,T; L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))$, $\quad c \in L^{\infty}(0,T; L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))$. Wtedy istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u \in W^{\alpha}(u_0, H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ zagadnienia (26), tj. u spełnia następującą tożsamość całkową*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} I^{1-\alpha}[u(x,t) - u_0(x)]\varphi(x)dx + \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{i,j}(x,t)\partial_j u(x,t)\partial_i \varphi(x)dx$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_{\Omega} b_j(x,t)\partial_j u(x,t)\varphi(x)dx + \int_{\Omega} c(x,t)u(x,t)\varphi(x)dx + \langle f(t), \varphi\rangle$$

dla wszystkich $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ i p.w. $t \in (0,T)$.

Ponadto, u spełnia oszacowanie

$$\|I^{1-\alpha}(u-u_0)\|_{H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(0,T;L^2(\Omega))}$$

$$\leq C\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right),$$

gdzie C zależy tylko od α, μ, λ, T $\|b\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))}$, $\|c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))}$.

W końcu, jeżeli $\alpha > \frac{1}{2}$, to $u \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ i $u_{|t=0} = u_0$.

Dowód powyższego twierdzenia jest oparty na metodzie Galerkina. Pierwszym krokiem jest konstrukcja rozwiązań przybliżonych, których poszukujemy w postaci

$$u^n(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_{n,k}(t)\varphi_k(x), \tag{30}$$

gdzie $\{\varphi_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tworzą bazę ortonormalną $L^2(\Omega)$ i są określone jako wektory własne zagadnienia $-\Delta\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ w Ω i $\varphi_{n|\partial\Omega} = 0$. Następnym krokiem jest zregularyzowanie, po czasie, operatora L i prawej strony f (o współczynnikach $a_{i,j}$ zakładamy tylko, że są istotnie ograniczone). Podstawiając (30) do zregularyzowanego zagadnienia

$$\begin{cases} D^{\alpha}u^n = L^n u^n + f^n & \text{w} \quad \Omega^T \\ u_{|t=0} = u_0^n & \text{w} \quad \Omega, \end{cases} \tag{31}$$

otrzymujemy układ determinujący współczynniki $c_{n,k}(t)$, który można zapisać w postaci

$$c_n(t) = c_{n,0} + I^\alpha(\widetilde{A}^n c_n) + I^\alpha F^n(t) \tag{32}$$

dla pewnej funkcji $\widetilde{A}^n(t)$ o wartościach macierzowych. Rozwiązań (32) poszukujemy w przestrzeni

$$X(T) = \{c \in C^1((0,T];\mathbb{R}^n) : c(0) = c_{0,n},\ \ t^{1-\alpha}c'(t) \in C([0,T];\mathbb{R}^n)\} \tag{33}$$

wyposażonej w normę $\|c\|_{X(T)} = \|c\|_{C[0,T]} + \|t^{1-\alpha}c'\|_{C[0,T]}$. Istnienie rozwiązań (32) (Lemat 3.1 [H2]) jest wywnioskowane z twierdzenia Banacha o punkcie stałym i sprowadza się do elementarnego wykorzystania faktów i nierówności z pracy [H1] (w szczególności Lematu A.4).

Mając już zdefiniowane rozwiązania przybliżone przechodzimy do oszacowań. Tutaj ponownie bazujemy na ideach zawartych w pracy [H1] i otrzymujemy następującą tożsamość całkową (to analog oszacowania z lematu 2.1 [49])

Lemat 2 (Lem. 4.1 [H2])**.** *Załóżmy, że $w \in L^2(\Omega^T)$ i*

$$w(x,\cdot) \in AC[0,T] \quad dla \quad x \in \Omega \quad i \quad t^{1-\alpha}w_t \in L^\infty(\Omega^T).$$

Wtedy

$$D^\alpha\|w(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1}\int_\Omega |w(x,t)-w(x,\tau)|^2 dxd\tau$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}t^{-\alpha}\int_\Omega |w(x,t)-w(x,0)|^2dx = 2\int_\Omega D^\alpha w(x,t)\cdot w(x,t)dx.$$

Następnie testujemy przybliżony układ jego rozwiązaniem i dostajemy nierówność

$$D^\alpha\|u^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|Du^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le h_n(t)\|u^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda}\|f_{\frac{1}{n}}(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}, \tag{34}$$

gdzie $h_n(t)$ jest pewną funkcją istotnie ograniczoną zależną od danych. Z (34) natychmiast mamy

$$D^\alpha\|u^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le h_n(t)\|u^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda}\|f_{\frac{1}{n}}(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)},$$

co na mocy pewnej wersji nierówności typu Gronwalla daje oszacowanie prawej strony (34). Następnie, po odcałkowaniu (34) i wykorzystaniu wcześniejszego lematu otrzymujemy

Lemat 3 (Lem. 4.2 [H2])**.** *Dla każdego $t \in [0,T]$ i $n \in \mathbb{N}$, rozwiązanie przybliżone u^n spełnia oszacowanie*

$$I^{1-\alpha}\|u^n(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\int_0^\tau (\tau-s)^{-\alpha-1}\|u^n(\cdot,\tau)-u^n(\cdot,s)\|^2_{L^2(\Omega)}dsd\tau$$
$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \tau^{-\alpha}\|u^n(\cdot,\tau)-u^n_0(\cdot)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau + \lambda\int_0^t \|Du^n(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}d\tau$$
$$\le C_0\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|f(\cdot,\tau)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}d\tau + \delta_n\right), \tag{35}$$

gdzie C_0 zależy od L i T, a $\delta_n \to 0$ jednostajnie względem t, gdy $n \to \infty$.

Powyższe oszacowania gwarantują prezwartość ciągu u^n w odpowiednich słabych topologiach, co umożliwia przejście do granicy w zagadnieniu przybliżonym i tym samym otrzymujemy słabe rozwiązanie zagadnienia (26).

Następnie, jednoznaczność słabych rozwiązań jest oparta na stwierdzeniu otrzymanym przez prof. M. Yamamoto.

Stwierdzenie 1 (Prop. 6.10 [H2])**.** *Niech $w \in AC[0,T]$ i $\alpha \in (0,1)$. Wtedy zachodzi równość*

$$\int_0^T \partial^\alpha w(t) \cdot w(t) dt = \frac{\alpha}{4} \int_0^T \int_0^T \frac{|w(t) - w(\tau)|^2}{|t-\tau|^{1+\alpha}} d\tau dt$$
$$+\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T [(T-t)^{-\alpha} + t^{-\alpha}] |w(t)|^2 dt.$$

W szczególności, dla $t \in (0,T)$ mamy nierówność

$$\int_0^t \partial^\alpha w(\tau) \cdot w(\tau) d\tau \geq \frac{t^{-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t |w(\tau)|^2 d\tau.$$

Wykorzystanie powyższego, po osłabieniu założeń (wniosek 6.1 [H2]) daje jednoznaczność słabych rozwiązań.

W końcu, ciągłość w chwili początkowej i spełnianie warunku początkowego przez słabe rozwiązanie wynika z następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 2 (Stw. 6.7 [H2])**.** *Załóżmy, że X jest przestrzenią unormowaną, $u \in L^1(0,T;X)$, $p \in (1,\infty)$ i $\frac{d}{dt}(I^{1-\alpha}[u-u_0]) \in L^p(0,T;X)$ i $I^{1-\alpha}[u-u_0](0) = 0$. Jeżeli $\alpha \in (\frac{1}{p}, 1]$, to $u \in C([0,T];X)$ i $u(0) = u_0$.*

Tym samym dowód twierdzenia 2 jest zakończony.

Przejdziemy teraz do omówienia wyniku dotyczącego ciągłości słabych rozwiązań w chwili początkowej. Twierdzenie to jest uzasadnione w przypadku $L = \Delta$, niemniej wydaje się, że po pokonaniu pewnych trudności technicznych, dowód ten może być wykorzystany dla szerszej klasy operatorów. Zacznijmy od wprowadzenia oznaczeń

$$\bar{H}^k = \left\{ w \in H^k(\Omega): \ \ \Delta^a w_{|\partial\Omega} = 0 \text{ dla } a = 0,1,\ldots, \left[\frac{k-1}{2}\right] \right\}, \tag{36}$$

natomiast $\left(\bar{H}^k\right)^*$ oznacza przestrzeń dualną do $\bar{H}^k$. Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 (Tw. 1.3 [H2])**.** *Załóżmy, że $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ i u jest słabym rozwiązaniem (26) dla $L = \Delta$ danym w twierdzeniu 2. Wtedy*

- *jeżeli $\alpha > \frac{1}{2}$, to $I^{1-\alpha}[u-u_0] \in {}_0H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ i $u \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, $u_{|t=0} = u_0$,*
- *jeżeli $\alpha = \frac{1}{2}$ i dodatkowo $\partial^{\frac{1}{2}} f \in L^p(0,T;(\bar{H}^3)^*)$ dla pewnego $p \in (1,2)$, to $u - u_0 = I^{1-2\alpha}[u-u_0] \in {}_0W^{1,p}(0,T;(\bar{H}^3)^*)$ i $u \in C([0,T];(\bar{H}^3)^*)$, $u_{|t=0} = u_0$.*

Jeżeli $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ i $k \in \mathbb{N}$ jest najmniejszą liczbą taką, że $\frac{1}{2} \leq (k+1)\alpha < 1$, to

- *jeżeli* $\frac{1}{2} < (k+1)\alpha$ *i dodatkowo* $\partial^{m\alpha} f \in L^2\left(0,T;\left(\bar{H}^{2m+1}\right)^*\right)$ *dla* $m = 1,\ldots,k$, *to* $\frac{d}{dt} I^{1-(k+1)\alpha}[u-u_0] \in L^2\left(0,T;\left(\bar{H}^{2k+1}\right)^*\right)$ *i* $u \in C\left([0,T];\left(\bar{H}^{2k+1}\right)^*\right)$, $u_{|t=0} = u_0$,
- *jeżeli* $\frac{1}{2} = (k+1)\alpha$ *i dodatkowo* $\partial^{m\alpha} f \in L^2\left(0,T;\left(\bar{H}^{2m+1}\right)^*\right)$ *dla* $m = 1,\ldots,k$, $\partial^{(k+1)\alpha} f \in L^p\left(0,T;(\bar{H}^{2k+3})^*\right)$ *dla pewnego* $p \in (\frac{2}{1+2\alpha}, 2)$, *to* $I^{1-(k+1)\alpha}[u-u_0] \in {}_0W^{1,p}\left(0,T;\left(\bar{H}^{2k+1}\right)^*\right)$ *i* $u \in C\left([0,T];\left(\bar{H}^{2k+1}\right)^*\right)$, $u_{|t=0} = u_0$.

Dowód tego twierdzenia wymaga uzyskania dodatkowych oszacowań podnoszących regularność po t. Jest to robione na poziomie rozwiązań przybliżonych w konstrukcji słabych rozwiązań. W skrócie, ideę tego argumentu można przedstawić tak: różniczkujemy zagadnienie przybliżone (31) pochodną RL rzędu α i z lewej strony równania otrzymujemy pochodną Caputo rzędu 2α. Jeżeli $2\alpha > \frac{1}{2}$, to możemy skorzystać ze stwierdzenia 2, po wcześniejszym oszacowaniu prawej strony zawierającej $\partial^\alpha u^n$ (tu korzystamy z oszacowań dla słabych rozwiązań). Jeżeli $2\alpha < \frac{1}{2}$, to ponownie różniczkujemy zagadnienie przybliżone (31) pochodną RL rzędu α i z lewej strony równania otrzymujemy pochodną Caputo rzędu 3α. Jeżeli $3\alpha > \frac{1}{2}$, to korzystamy ze stwierdzenia 2, a prawą stronę równania szacujemy korzystając z wcześniejszego kroku. Proces ten możemy kontynuować, o ile odpowiednie założenia są spełnione. Oczywiście wynik ten jest daleki od optymalności, ale zarysowana idea wydaje się być warta dalszych badań.

Ostatni wynik przedstawiony w pracy [H2] dotyczy istnienia regularnych rozwiązań zagadnienia (26). Otrzymano następujący wynik.

Twierdzenie 4 (Tw. 1.4 [H2])**.** *Załóżmy, że* $u_0 \in H^1_0(\Omega)$, $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, *(28) zachodzi i* $\max_{i,j} \|\nabla a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega^T)} < \infty$, $b \in L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))$ *dla pewnego* $p_1 \in [2, \frac{2N}{N-2})$ *i* $c \in L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))$ *dla pewnego* $p_2 \in [2,4] \cap [2, \frac{2N}{N-2})$. *Wtedy zagadnienie (26) ma dokładnie jedno rozwiązanie* $u \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^{\frac{\alpha}{2}}(0,T;H^1_0(\Omega))$ *takie, że* $I^{1-\alpha}[u-u_0] \in {}_0H^1(0,T;L^2(\Omega))$ *i (26) zachodzi p.w., gdzie pochodna Caputo* $D^\alpha u$ *jest rozumiana jako słaba pochodna* $\frac{d}{dt} I^{1-\alpha}[u-u_0]$ *i następujące oszacowania zachodzą*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \|u\|_{H^{\frac{\alpha}{2}}(0,T;H^1_0(\Omega))} \leq C_0(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}),$$

$$\|I^{1-\alpha}[u-u_0]\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq C_0(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}),$$

gdzie C_0 *zależy tylko od* α, λ, μ, p_1, p_2, T, $\|\nabla a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega^T)}$, *stałej Poincaré'go* Ω *i* C^2*-regularności* $\partial\Omega$ *i norm* $\|b\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))}$, $\|c\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))}$.

Ponadto, jeżeli $\alpha > \frac{1}{2}$, *to* $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ *i* $u_{|t=0} = u_0$.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na uzyskaniu, w konstrukcji słabych rozwiązań, dodatkowych oszacowań w odpowiednich normach dla ciągu rozwiązań przybliżonych. Rozumowanie przebiega tutaj w sposób analogiczny do tego w przypadku klasycznego zagadnienia parabolicznego, tj. testujemy przybliżone zagadnienie Laplasjanem jego rozwiązania, a lemat 2 stosujemy do gradientu rozwiązania.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H2] są:

- zastosowanie w ogólnym przypadku metody konstrukcji słabych rozwiązań wprowadzonej w pracy [H1], (twierdzenie 2),

- wyznaczenie pewnych warunków, przy których słabe rozwiązania są ciągłe w zerze i spełniają warunek początkowy, (twierdzenie 3),
- osłabienie założeń zapewniających ciągłość u w zerze i spełnianie warunku $u_{|t=0} = u_0$, (stwierdzenie 2),
- sformułowanie w przypadku pochodnych ułamkowych twierdzenia o istnieniu regularnych rozwiązań, będącego odpowiednikiem klasycznego rezultatu dla zagadnień parabolicznych.

Omówienie pracy [H3]

W zastosowaniach, wartości α - rzędu pochodnej ułamkowej są wyznaczane eksperymentalnie. Oczywiście doświadczenia wskazują nie na konkretną wartość, ale na pewien rozkład rzędów pochodnych. Dlatego rozsądnym jest rozważanie zamiast konkretnej pochodnej D^α pewnego uśrednienia po rzędach $\alpha \in (0,1)$ z pewną wagą

$$D^{(\mu)}u(t) := \int_0^1 D^\alpha u(t)\mu(\alpha)d\alpha, \tag{37}$$

gdzie $\mu = \mu(\alpha)$ jest pewną nieujemną, niezerową funkcją.

Pochodną (37) nazywamy pochodną rozproszoną typu Caputo (distributed-order Caputo derivative). Zagadnienia zawierające $D^{(\mu)}$ pojawiają się w wielu pracach matematycznych, np. w [1], [15], [16], [17], [27], [39]. Jednakże, założenia przyjmowane w tych pracach zmniejszają ogólność otrzymanych wyników. Na przykład, w [15] przyjmuje się, że μ jest ciągłe lub nawet $\mu \in C^2([0,1])$ i $\mu(1) \neq 1$, w [39] $\mu \in C^1([0,1])$, w [1] $\mu \in C([0,1])$, w [27] i [28] zakłada się niezależność operatora eliptycznego L od czasu, czy w [28] przyjmuje się ciągłość prawej strony względem zmiennej t. W związku z tym zadaliśmy sobie pytanie: przy jakich założeniach o μ można otrzymać odpowiedniki klasycznych rezultatów dla równań parabolicznych, typu tych z pracy [H2]? Odpowiedź okazała się być dosyć ogólna: wystarczy, by (37) miało sens, tj. $\mu \in L^1(0,1)$.

Zauważmy, że jeżeli $u \in AC[0,T]$, to

$$(D^{(\mu)}u)(t) = (k * u')(t) = \frac{d}{dt}(k * u)(t) - k(t)u(0),$$

gdzie

$$k(t) = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\mu(\alpha)d\alpha. \tag{38}$$

Zatem pochodną rozproszoną $D^{(\mu)}$ można rozważać w ramach ogólnej teorii równań ewolucyjnych ([35]), jeżeli spełnione są odpowiednie założenia. Mianowicie, by zastosować teorię z pracy prof. R. Zachera [49] konieczne jest, by k było jądrem typu $\mathcal{PC}$:

Definicja 1 (Def. 2.1 [49])**.** *Jądro $k \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ jest typu $\mathcal{PC}$, jeżeli jest nieujemne, nierosnące i istnieje jądro $l \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ takie, że $k * l = 1$ na $(0,\infty)$. Wtedy mówimy, że (k,l) jest $\mathcal{PC}$ parą.*

W pracy [H3] pokazano, że przy założeniu

$$\mu \in L^1(0,1), \;\; \mu \geq 0, \;\; \mu \not\equiv 0 \tag{39}$$

k dane w (38) jest $\mathcal{PC}$ jądrem. Jednak zamiast dalej zastosować znaną, nietrywialną teorię zagadnień ewolucyjnych przedstawiamy elementarny argument oparty na pracach [H1] i [H2]. Przypomnijmy, w dalszej perspektywie mamy na uwadze zastosowania do zagadnień w obszarach niecylindrycznych, w których zdefiniowanie aproksymacji Yosidy sprawia trudności (wtedy pochodna ułamkowa zależy również od x).

Wyniki przedstawione w pracy [H3] stały się podstawą pracy magisterskiej napisanej przez współautorkę Katarzynę Ryszewską.

Kluczową rolę w rozumowaniu przestawionym w pracy [H3] odgrywa liczba $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ określona warunkiem ((21) w [H3])

$$\int_{\gamma}^{1-\gamma} \mu(\alpha) d\alpha = \frac{1-\gamma}{2} \int_0^1 \mu(\alpha) d\alpha. \tag{40}$$

Rola powyższego γ sprowadza się, skrótowo mówiąc, do odcięcia się od trudności technicznych powodowanych przez pochodną i całkę rzędów bliskich zero. Pierwszy wynik pracy [H3] uzasadnia, że k dane wzorem (38), przy założeniu (39), jest $\mathcal{PC}$ jądrem w myśl definicji 1. Rezultat tego typu pojawił się wcześniej w pracy A. Kochubei [15] (Prop. 3.1.), przy czym o μ zakłada się tam, iż $\mu \in C^3[0,1]$, $\mu(1) \neq 0$ i $\mu(0) \neq 0$ lub $\mu(\alpha) = a\alpha^{\nu}$, gdzie $a, \nu > 0$ i otrzymano tam następującą formułę na l

$$l(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-rt} \frac{\int_0^1 r^{\alpha} \sin(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha}{\left(\int_0^1 r^{\alpha} \cos(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha\right)^2 + \left(\int_0^1 r^{\alpha} \sin(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha\right)^2} dr. \tag{41}$$

W pracy [H3] pokazujemy, że powyższa formuła jest prawdziwa przy założeniu (39). Dowód (stw. 6 [H3]) jest oparty na znajdowaniu odwrotnej transformaty Laplace'a i wykorzystaniu lematu 2.1 [4]. Dowód tego ostatniego został również zamieszczony w pracy [H3] (lemat 17), po uzupełnieniu, naszym zdaniem koniecznego, założenia (4) [H3]. Jako wniosek otrzymano następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5 (Tw. 5 [H3]). *Jeżeli μ spełnia (39), to istnieje nieujemna funkcja $l \in L^1_{loc}[0, \infty)$ taka, że operator ułamkowego całkowania $I^{(\mu)}$ zdefiniowany formułą $I^{(\mu)}u = l * u$ spełnia*

$$(D^{(\mu)} I^{(\mu)} u)(t) = u(t) \quad dla \quad u \in L^{\infty}(0, T), \tag{42}$$

$$(I^{(\mu)} D^{(\mu)} u)(t) = u(t) - u(0) \quad dla \quad u \in AC[0, T]. \tag{43}$$

Ponadto, l spełnia oszacowanie

$$l(t) \leq c \max\{t^{\gamma-1}, t^{-\gamma}\} \tag{44}$$

dla pewnej stałej c, natomiast $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ jest dane przez (40).

Wynik powyższy, wraz z formułą (41) oznacza, że $(k, l) \in \mathcal{PC}$ i tym samym, teoria operatorów ewolucyjnych [35], [49] może być zastosowana. Jednakże, konstruując słabe rozwiązania podążamy drogą bardziej elementarną, przedstawioną w pracach [H1] i [H2]. Zacznijmy od sformułowania problemu. Szukamy rozwiązań następującego zagadnienia

$$\begin{cases} D^{(\mu)} u = Lu + f & \text{w} \quad \Omega \times (0, T) =: \Omega^T \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{dla} \quad t \in (0, T) \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{w} \quad \Omega, \end{cases} \tag{45}$$

gdzie operator L ma postać (27) i zachodzi (28). Zdefiniujmy słabe rozwiązanie.

Definicja 2 (Def. 1 [H3])**.** *Powiemy, że funkcja* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *taka, że*

$$\int_0^1 I^{1-\alpha}[u-u_0]\mu(\alpha)d\alpha \in {}_0H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

jest słabym rozwiązaniem zagadnienia (45), jeżeli dla każdego $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ *i p.w.* $t \in (0,T)$ *u spełnia tożsamość*

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \int_\Omega I^{1-\alpha}[u(x,t)-u_0(x)]\varphi(x)dx\mu(\alpha)d\alpha + \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{i,j}(x,t)D_ju(x,t)D_i\varphi(x)dx$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_\Omega b_j(x,t)D_ju(x,t)\varphi(x)dx + \int_\Omega c(x,t)u(x,t)\varphi(x)dx + \langle f(\cdot,t),\varphi(\cdot)\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \tag{46}$$

Otrzymano następujące twierdzenie dotyczące istnienia słabych rozwiązań (45).

Twierdzenie 6 (Tw. 2 [H3])**.** *Załóżmy, że* μ *spełnia (39),* $T>0$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ *i* $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. *Niech* L *będzie postaci (27), gdzie współczynniki* $a_{i,j}$ *spełniają (28). Niech dla pewnych* $p_1,p_2 \in [2,\frac{2N}{N-2})$ *zachodzi* $b \in L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))$, $c \in L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))$. *Wtedy istnieje u jednoznaczne słabe rozwiązanie (45) w sensie definicji 2 i u spełnia oszacowania*

$$\left\|\int_0^1 I^{1-\alpha}[u-u_0]\mu(\alpha)d\alpha\right\|_{H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$$

$$\leq c_0\left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right),$$

gdzie c_0 *zależy tylko od* μ, Ω, λ, Λ, p_1, p_2, T, $\|b\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))}$, $\|c\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))}$.

Co więcej, jeżeli

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \mu(\alpha)d\alpha > 0, \tag{47}$$

to $u \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$ *i* $u|_{t=0} = u_0$.

Dowód twierdzenia 6 jest analogiczny do dowodu twierdzenia 2. Pierwszym krokiem jest sformułowanie odpowiedniego zagadnienia przybliżonego. Następnym jest konstrukcja rozwiązań przybliżonych w przestrzeni typu (33), gdzie rolę α pełni γ dane warunkiem (40). Następnie, korzystając z odpowiednika lematu 3 dla pochodnej rozproszonej $D^{(\mu)}$ (Lem. 13 [H3]) i pewnej nierówności typu Gronwalla (Lem. 10 [H3]) otrzymujemy oszacowania na ciąg rozwiązań przybliżonych. Prezwartość ciągu rozwiązań przybliżonych w odpowiednich topologiach umożliwia przejście do granicy w zagadnieniu przybliżonym, co daje istnienie słabych rozwiązań.

Jednoznaczność słabych rozwiązań jest wywnioskowana z odpowiednika stwierdzenia 1 dla pochodnej rozproszonej $D^{(\mu)}$. W końcu, ciągłość w zerze i spełnianie przez słabe rozwiązanie warunku początkowego przy założeniu (47) jest wywnioskowana z wyższej całkowalności $l(t)$, mianowicie pokazujemy, że $l \in L^2_{loc}([0,\infty))$, co kończy dowód twierdzenia 6.

Przejdźmy teraz do omówienia kolejnego wyniku z pracy [H3], będącego pewną wersją twierdzenia 3 otrzymaną dla pochodnej rozproszonej. Niech $\bar{H}$ będzie zdefiniowane jak w (36) i załóżmy, że warunek (47) nie jest spełniony. Wtedy istnieje dokładnie jedno $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że

$$\int_{\frac{1}{2m}}^{1} \mu(\alpha)d\alpha = 0 \quad \text{i} \quad \int_{\frac{1}{2(m+1)}}^{\frac{1}{2m}} \mu(\alpha)d\alpha > 0. \tag{48}$$

Dla takiego m mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7 (Tw. 3 [H3])**.** *Załóżmy, że μ spełnia (39), $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in L^2(\Omega)$ i u jest słabym rozwiązaniem (45) danym w twierdzeniu 6 dla $L = \Delta$. Jeżeli dodatkowo dla każdego $k = 1, \cdots, m$ zachodzi*

$$\int_0^{\frac{1}{2m}} \cdots \int_0^{\frac{1}{2m}} I^{1-(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)} f(x,t) \prod_{i=1}^{k} \mu(\alpha_i)d\alpha_i \in {}_0W^{1,2}(0,T;(\bar{H}^{2k+1})^*), \tag{49}$$

to $u \in C([0,T];(\bar{H}^{2m+1})^*)$ i $u|_{t=0} = u_0$ w $(\bar{H}^{2m+1})^*$.

Idea dowodu jest tu podobna do tej z dowodu twierdzenia 3. Mianowicie, różniczkujemy zagadnienie przybliżone rozproszoną pochodną RL i wykorzystujemy oszacowania z poprzednich iteracji. Niestety, uzasadnienie przejścia granicznego (60) w pracy [H3] nie jest wystarczające (założenie ze stw. 6.13 [H2] nie jest zagwarantowane warunkiem (49)). Jednakże dowód powyższego twierdzenia będzie kompletny, jeżeli aproksymacje $f_{\frac{1}{n}}$ zdefiniujemy następująco: $f_{\frac{1}{n}} = f * h_n$, gdzie h_n jest określone równością $h_n * k = k_n$, natomiast k_n jest jądrem definiującym aproksymację Yosidy (13).

W końcu, dowodzimy odpowiednik twierdzenia 4 dla pochodnej rozproszonej.

Twierdzenie 8 (Tw. 4 [H3])**.** *Załóżmy, że μ spełnia (39), $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_0 \in H^1_0(\Omega)$. Niech L będzie postaci (27), gdzie współczynniki $a_{i,j}$ spełniają (28) i $\max_{i,j} \|\nabla a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega^T)} < \infty$. Niech dla pewnych $p_1 \in [2, \frac{2N}{N-2})$, $p_2 \in [2, \frac{2N}{N-2}) \cap [2,4]$ zachodzi $b \in L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))$, $c \in L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))$. Wtedy zagadnienie (45) ma dokładnie jedno rozwiązanie u należące do $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ takie, że $\int_0^1 I^{1-\alpha}[u-u_0]\mu(\alpha)d\alpha \in {}_0H^1(0,T;L^2(\Omega))$ i spełnione jest następujące oszacowanie*

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} + \left\| \int_0^1 I^{1-\alpha}[u-u_0]\mu(\alpha)d\alpha \right\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega))} \le C_0(\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))})$$

gdzie C_0 zależy jedynie od μ, λ, μ, p_1, p_2, T, $\|\nabla a_{i,j}\|_{L^\infty(\Omega^T)}$, stałej Poincaré'go i C^2-regularności $\partial\Omega$ i od norm $\|b\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{2p_1}{p_1-2}}(\Omega))}$, $\|c\|_{L^\infty(0,T;L^{\frac{p_2}{p_2-2}}(\Omega))}$. Ponadto, jeżeli zachodzi (47), to $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ i $u_{|t=0} = u_0$.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H3] są:

- uzasadnienie, że jedynie przy założeniu nieujemności i całkowalności μ, pochodna rozproszona $D^{(\mu)}$ jest zadana jądrem k typu $\mathcal{PC}$, co umożliwia zastosowanie teorii operatorów ewolucyjnych. Fakt ten będzie również kluczowy w dowodzie hölderowskiej ciągłości słabych rozwiązań (praca [H6]).

- wskazanie ogólności metody konstrukcji słabych rozwiązań przedstawionej w pracach [H1] i [H2].

Omówienie pracy [H4]

Dobrze znanym jest fakt, iż dla klasycznego zagadnienia parabolicznego rozpatrywanego na obszarze ograniczonym obserwujemy wykładniczy zanik rozwiązań. Jednak pewne eksperymenty wykazują odstępstwa od tej reguły i spotykamy się z potęgowym zanikiem rozwiązań ($\|u(t)\|_{L^2} \approx t^{-\alpha}$) lub nawet z logarytmicznym zanikiem ($\|u(t)\|_{L^2} \approx (\ln t)^{-1}$). Z drugiej strony, rozwiązania zagadnień z pochodnymi ułamkowymi wykazują odmienne, od klasycznego, tempo zaniku rozwiązań. To najpewniej jest jednym z powodów rosnącego zainteresowania tego typu zagadnieniami, w szczególności w naukach inżynierskich.

Praca [H4] poświęcona jest ściśle matematycznej analizie zaniku rozwiązań. Bezpośrednią inspiracją do napisania tej pracy były wyniki A. Kochubei [15], V. Vergara, R. Zacher [47], Z. Li, Y. Luchko, M. Yamamoto [27], a przede wszystkim rozmowy z ostatnim z współautorów, prof. Masahiro Yamamoto z Uniwestytetu Tokijskiego. W szczególności zainteresowała nas kwestia tzw. nadzwyczaj wolnego zaniku rozwiązań (ultraslow decay) i jego związku z funkcją μ – „gęstością” pochodnych ułamkowych w pochodnej rozproszonej $D^{(\mu)}$. Postawiliśmy sobie pytania: jaki jest związek μ z logarytmicznym zanikiem rozwiązań i kiedy mamy do czynienia z potęgowym zanikiem? Odpowiedź, mówiąc w uproszczeniu, brzmi tak: jeżeli nośnik μ jest odcięty od zera, to mamy potęgowy zanik rozwiązań $\|u(t)\|_{L^2} \approx t^{-\delta}$ dla pewnego $\delta \in (0,1)$. Jeżeli nośnik „dochodzi do zera”, to mamy zanik rozwiązań typu logarytmicznego.

W pracy [15] pokazano (tw. 2.3 [15]) logarytmiczny zanik przy założeniu $\mu(0) \neq 0$, gdzie $\mu \in C^2[0,1]$ i $\mu(1) \neq 0$ (str. 256 w [15]). W pracy [H4] rozpatrujemy to zagadnienie przy ogólniejszych założeniach o μ, przy czym otrzymaliśmy tam jedynie oszacowanie od góry. Pierwszym krokiem było badanie ułamkowego równania różniczkowego zwyczajnego

$$D^{(\mu)}v + \lambda v = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{50}$$

Poświęciliśmy sporą część pracy na ściśle matematyczną analizę powyższego równania, przyjmując dosyć ogólne założenia o μ. Naszym priorytetem było unikanie, czasami spotykanych w równaniach z pochodnymi ułamkowymi, formalnych rozumowań, pomijających sprawdzanie założeń. Przy założeniu

$$\mu \in L^1(0,1), \;\; \mu \geq 0, \;\; \mu \not\equiv 0 \tag{51}$$

pokazano, iż równanie (50) ma dokładnie jedno rozwiązanie w klasie funkcji absolutnie ciągłych spełniających warunek początkowy $v(0) = v_0$. Zauważmy, że (50) ma ciągłe rozwiązania i nie pojawia się tutaj problem z warunkiem początkowym. Jednakże rozwiązanie (50) jest przedstawione w postaci naprzemiennego nieskończonego szeregu ((16) [H4]), co sprawia pewne trudności w badaniu własności jego rozwiązań. Z tego powodu znajdujemy inne przedstawienie rozwiązań.

Twierdzenie 9 (Tw. 2, [H4])**.** *Załóżmy, że $\lambda > 0$, $v_0 \in \mathbb{R}$, μ spełnia (51) i dodatkowo*

$$c_{\bar{\mu}} := \int_0^1 \frac{\mu(\alpha)}{\alpha} d\alpha < \infty. \tag{52}$$

Wtedy jedyne absolutnie ciągłe rozwiązanie (50) spełniające $v(0) = v_0$ dane jest formułą

$$v(t) = v_0 \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-rt}}{r} \frac{\int_0^1 r^\alpha \sin(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha}{(\lambda + \int_0^1 r^\alpha \cos(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha)^2 + (\int_0^1 r^\alpha \sin(\pi\alpha)\mu(\alpha)d\alpha)^2} dr. \tag{53}$$

Zauważmy, że pojawia się tutaj dodatkowe założenie (52), które naszym zdaniem, było konieczne w przedstawionym dowodzie. Założenie to jest związane z warunkiem 4 z lematu 17 [H3]. Korzystając z postaci (53) otrzymaliśmy następujące stwierdzenie wskazujące zależności między μ, a zachowaniem rozwiązania w nieskończoności.

Stwierdzenie 3 (Stw. 2, [H4])**.** *Załóżmy, że zachodzi (51) i (52). Jeżeli v jest rozwiązaniem (50) dla $\lambda > 0$, gdzie $v(0) = v_0$, to dla t dostatecznie dużych zachodzi*

$$|v(t)| \leq \frac{c_0}{\ln t}, \tag{54}$$

gdzie c_0 zależy tylko od v_0, λ, $\|\mu\|_{L^1(0,1)}$ i $c_{\bar{\mu}}$. Ponadto, jeżeli $\varsigma \in (0,1)$, to

$$\text{jeżeli} \quad \kappa, a > 0 \quad i \quad \mu(\alpha) \leq a\alpha^\kappa \quad p.w. \ na \quad (0,\varsigma), \qquad to \quad |v(t)| \leq \frac{c}{(\ln t)^{\kappa+1}}, \tag{55}$$

$$\text{jeżeli} \quad \kappa, a, \beta, m > 0 \quad i \quad \mu(\alpha) \leq a\alpha^\kappa e^{-\frac{\beta}{\alpha^m}} \quad p.w. \ na \quad (0,\varsigma), \quad \text{to dla dowolnego } q \in (0,1)$$

$$|v(t)| \leq c\frac{\Gamma(\kappa+1)}{(1-q)^{\kappa+1}(\ln t)^{\kappa+1}} \cdot \exp\left(-m^{\frac{1}{m+1}}(1+\frac{1}{m})(q^m\beta)^{\frac{1}{m+1}}(\ln t)^{\frac{m}{m+1}}\right) \tag{56}$$

$$\text{jeżeli} \quad a > 0 \quad i \quad \mu(\alpha) \leq a\exp(-e^{\frac{1}{\alpha}}) \quad p.w. \ na \quad (0,\varsigma), \quad to \quad |v(t)| \leq ct^{-\frac{1}{\ln\ln t}}. \tag{57}$$

W końcu, jeżeli $\delta \in (0,1)$, to

$$\operatorname{supp}\mu \subseteq [\delta, 1] \iff |v(t)| \leq \frac{c}{t^\delta} \quad dla \quad t > 1, \quad \text{dla pewnej dodatniej stałej } c,$$

gdzie $\operatorname{supp}\mu \subseteq [\delta,1]$ oznacza, że $\mu(\alpha) = 0$ p.w. na $(0,\delta)$.

Ostatni wynik mówi, że mamy do czynienia z zanikiem potęgowym wtedy i tylko wtedy, gdy nośnik μ jest odcięty od zera. Stwierdzenie 3 zostało zastosowane do wykazania oszacowań normy L^2 słabych rozwiązań następującego zagadnienia

$$\left\{ \begin{array}{lcll} D^{(\mu)}u & = & Lu & \text{w} \quad \Omega \times (0,T) =: \Omega^T \\ u|_{\partial\Omega} & = & 0 & \text{dla} \quad t \in (0,T) \\ u|_{t=0} & = & u_0 & \text{w} \quad \Omega, \end{array} \right. \tag{58}$$

gdzie

$$Lu(x,t) = \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{i,j}(x,t)D_ju(x,t)) + c(x,t)u(x,t), \ \ c(x,t) \leq 0,$$

$c \in L^\infty(\Omega^T)$, współczynniki $a_{i,j}$ są mierzalne, $a_{i,j} = a_{j,i}$ i spełniają warunek jednostajnej eliptyczności (28). Z twierdzenia 6 otrzymujemy słabe rozwiązania (58), dla którego otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10 (Tw. 4, [H4]). *Załóżmy, że μ spełnia (51) i (52) i u jest słabym rozwiązaniem (58) danym twierdzeniem 6 dla pewnego warunku początkowego $u_0 \in L^2(\Omega)$. Wtedy dla p.w. t funkcja $v(t) := \|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ spełnia (54)-(57).*

Ponadto, jeżeli $\operatorname{supp}\mu \subseteq [\delta, 1]$ *dla pewnego dodatniego δ, to*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|u_0\|_{L^2(\Omega)}\, t^{-\delta} \quad \text{dla p.w.} \quad t \ge 1$$

gdzie c zależy tylko od λ, c_μ i stałej Poincare'go obszaru Ω.

Dowód twierdzenia 10 polega na uzyskaniu, na poziomie rozwiązań przybliżonych, odpowiednich oszacowań na $\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$, a następnie przejście do granicy $n \to \infty$. Pojawia się tu kilka trudności technicznych, np. oszacowanie z lematu 2 nie jest wystarczające. W pracy [47] (lem. 3.2) został udowodniony optymalny odpowiednik nierówności z lematu 2, którego idea dowodu posłużyła do otrzymania następującego stwierdzenia.

Stwierdzenie 4 (Stw. 3, [H4]). *Załóżmy, że $p \in [1,\infty)$, w jest ciągłe na $\overline{\Omega} \times [0,T]$ i jeżeli $x \in \Omega$, to $w(x,\cdot) \in AC[0,T]$ i dla ustalonego $\gamma \in (0,1)$ zachodzi $t^{1-\gamma} w_t \in L^\infty(\Omega^T)$. Wtedy dla każdego $t \in (0,T]$ zachodzi równość*

$$D^{(\mu)}\|w(\cdot,t)\|^p_{L^p(\Omega)} + p\int_\Omega \int_0^1 \alpha \frac{\mu(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha-1} |w(x,t)|^p G\left(\frac{w(x,\tau)}{w(x,t)}\right) d\tau d\alpha dx$$

$$+p\int_0^1 \frac{\mu(\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} d\alpha \int_\Omega |w(x,t)|^p G\left(\frac{w(x,0)}{w(x,t)}\right) dx$$

$$= p\int_\Omega D^{(\mu)} w(x,t) \cdot |w(x,t)|^{p-2} w(x,t) dx,$$

gdzie $G(s)$ jest nieujemną funkcją $G(s) = \frac{1}{p}|s|^p - s + 1 - \frac{1}{p}$. Ponadto,

$$\|w(\cdot,t)\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} D^{(\mu)} \|w(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} \le \int_\Omega D^{(\mu)} w(x,t) \cdot |w(x,t)|^{p-2} w(x,t) dx. \tag{59}$$

Zauważmy, że przy $p = 2$, z lewej strony (59) mamy, w porównaniu do tezy lematu 2, jedną potęgę normy wyłączoną spod pochodnej $D^{(\mu)}$.

Ponadto, przejście do granicy $n \to \infty$ w wyrażeniu $\|u^n(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}$ wymagało kilku kroków pośrednich, gdyż u^n zbiegają do u, które jest tylko słabym rozwiązaniem. W szczególności, odpowiednia zasada porównawcza czy słaba zasada maksimum dla pochodnej $D^{(\mu)}$ pełnią tu kluczową rolę.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H4] są:

- rozważanie ogólnego operatora eliptycznego L, o współczynnikach zależnych również od t,
- osłabienie założeń o μ w oszacowaniach zaniku słabych rozwiązań,
- otrzymanie odpowiednika lematu 3.2 [47] w przypadku konstrukcji słabych rozwiązań przedstawionej w [H3],
- uzasadnienie związku potęgowego zaniku L^2-normy słabych rozwiązań z nośnikiem μ.

Omówienie pracy [H5]

Przypomnijmy, że inspiracją do podjęcia badań nad zagadnieniami zawierającymi pochodne ułamkowe było spotkanie z prof. V. Vollerem, który zaprezentował model ułamkowego zagadnienia Stefana (6). Jedna z metod rozwiązania tego typu problemu została przedstawiona np. w [2] w przypadku klasycznego zagadnienia Stefana (punkty (a)-(c), str. 4). W przypadku (6) punkt (a) został zrealizowany w [H1]. Zatem następnym krokiem winno być podniesienie regularności słabych rozwiązań. Przy odpowiednich założeniach o danych ($u_{0,x}$ i f w L^2) można podnieść regularność słabych rozwiązań z twierdzenia 1 i uzasadnić, że $u_{xx} \in L^2(Q_{s,T})$. Jednakże, procedura dalszego podnoszenia regularności i wykazania ciągłości rozwiązania u względem t aż do brzegu $x = s(t)$ okazała się poza naszym zasięgiem (w pracach [H2] i [H3] pokazaliśmy, że klasyczny argument służący do podnoszenia regularności słabych rozwiązań działa bez żadnych problemów, o ile mamy do czynienia z obszarem cylindrycznym).

Po wielu bezskutecznych próbach podniesienia regularności słabych rozwiązań zagadnienia (20) podjęliśmy decyzję o dokładniejszym przyjrzeniu się modelowi (6), przyjmując, tak jak prof. V. Voller w [11], iż funkcja strumienia q^* dana jest pochodną RL: $q^*(x,t) = -\partial^{1-\alpha} T_x(x,t)$ dla pewnego $\alpha \in (0,1)$. Naszym celem było ścisłe matematyczne wyprowadzenie modelu z przyjętych założeń. Pierwszym założeniem, które przyjmujemy, jest

$$\dot{s}(t) > 0, \tag{A1}$$

co jest spodziewaną własnością, gdy do układu doprowadzamy energię, tj. ciało stałe topnieje. Co do regularności funkcji temperatury T i swobodnej powierzchni przyjmujemy, że dla pewnego dodatniego t^*

$$\begin{gathered} s(t) \in AC[0,t^*], \;\; T_x(x,\cdot) \in AC[s^{-1}(x), t^*] \text{ dla każdego } x \in \Omega, \\ T_x(\cdot,t) \in AC[0, s(t)-\varepsilon] \text{ dla każdego } \varepsilon > 0 \text{ i } t \in (0,t^*), \\ T_t(\cdot,t) \in L^1(0,s(t)) \quad \text{dla każdego } t \in (0,t^*). \end{gathered} \tag{A2}$$

Powinniśmy jeszcze doprecyzować czym jest funkcja strumienia w przypadku zagadnienia jednofazowego, w którym poza $Q_{s,t^*} = \{(x,t) : \; 0 < x < s(t), \; t \in (0,t^*)\}$ przyjmujemy stałą temperaturę. Zatem przyjmujemy, iż

$$q^*(x,t) = \begin{cases} -\partial^{1-\alpha}_{s^{-1}(x)} T_x(x,t) & \text{dla} \quad (x,t) \in Q_{s,t^*}, \\ 0 & \text{dla} \quad (x,t) \notin Q_{s,t^*}, \end{cases} \tag{60}$$

gdzie

$$\partial^{1-\alpha}_{s^{-1}(x)} T_x(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} T_x(x,\tau) d\tau, & \text{gdy} \quad x \le s(0), \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dt} \int_{s^{-1}(x)}^t (t-\tau)^{\alpha-1} T_x(x,\tau) d\tau, & \text{gdy} \quad x > s(0). \end{cases} \tag{61}$$

Wprowadźmy funkcję entalpii $E = T + \phi$, gdzie $\phi = \chi_{Q_{s,t^*}}$ jest funkcją charakterystyczną zbioru Q_{s,t^*} (sharp-interface model) i przyjmujemy zasadę zachowania w postaci

$$\frac{d}{dt} \int_{(a,b)} E(x,t) dx = q^*(a,t) - q^*(b,t) \quad \text{dla każdego przedziału} \quad (a,b) \subseteq \mathbb{R}. \tag{62}$$

Sformułujmy jeszcze dodatkowe założenie o regularności rozwiązań

$$\dot{s}(t) \in L^{\infty}_{loc}((0,t^*]) \text{ i } \; D^{\alpha}_{s^{-1}(x)} T(\cdot,t) \in L^1(0,s(t)) \text{ dla } t \in (0,t^*). \tag{A3}$$

Przy założeniu, że $T(s(t),t)=0$ dla $t \in (0,t^*)$ otrzymano następujący model.

Twierdzenie 11 (Tw. 1 [H5])**.** *Przy założeniach (A1)-(A2), z zasady zachowania (62) dla q^* określonego w (60) otrzymujemy następujące równanie na T*

$$D^{\alpha}_{s^{-1}(x)} T(x,t) - T_{xx}(x,t) = \begin{cases} 0, & gdy \quad x < s(0) \\ -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t - s^{-1}(x))^{-\alpha}, & gdy \quad x \in (s(0), s(t)) \end{cases} \tag{63}$$

dla p.w. $(x,t) \in Q_{s,t^*}$, gdzie

$$D^{\alpha}_{s^{-1}(x)} T(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{dt} T(x,\tau) d\tau, & gdy \quad x \le s(0) \\ \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{s^{-1}(x)}^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{dt} T(x,\tau) d\tau, & gdy \quad x > s(0). \end{cases} \tag{64}$$

Ponadto, funkcje T i s są związane warunkiem

$$\dot{s}(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{a \nearrow s(t)} \left[\frac{d}{dt} \int_{s^{-1}(a)}^t (t-\tau)^{\alpha-1} T_x(a,\tau) d\tau \right]. \tag{65}$$

Jeżeli dodatkowo zachodzi warunek (A3), to otrzymujemy kolejny warunek brzegowy

$$T^-_x(s(t),t) = 0, \tag{66}$$

gdzie $T^-_x(s(t),t) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} T_x(s(t)-\varepsilon, t)$.

Widzimy zatem, że równanie (63) nie jest tym samym co $(6)_1$. Również warunek na swobodnej powierzchni $(6)_5$ nie pojawia się w powyższym sformułowaniu, a zamiast niego otrzymano dwa inne (65) i (66). Rezultat ten, bez warunku (65), został przedstawiony w [21]. Po niedługim czasie otrzymałem wiadomość od prof. Andrei Ceretani, iż ukazała się już praca [38], w której otrzymano podobny wynik, z tym, że zamiast warunku (66) pojawia się właśnie warunek (65). Po zapoznaniu się pracą [38] zauważyliśmy, iż (65) jest natychmiastową konsekwencją dowodu zawartego w [21], co zostało uwzględnione w kolejnej wersji [21].

Postawiliśmy sobie tutaj pytania: czy niespodziewany, dodatkowy warunek (66) jest rzeczywiście spełniony, wszak wynika on z założenia dodatkowej regularności (A3) przy wyprowadzaniu modelu? Czy założenie (A3) nie jest za silne? I w końcu, jaki jest związek (65) z (66)? Czy może jeden implikuje drugi? By odpowiedzieć na te pytania podjęliśmy próbę skonstruowania samopodobnych rozwiązań spełniających (A1)-(A3), tj. takich, które są niezmiennicze na pewne skalowanie. Mianowicie, jeżeli $u^{\lambda}(x,y) = \lambda^c u(\lambda^a x, \lambda^b t)$, to szukamy rozwiązań dla których zachodzi $u^{\lambda} = u$ dla $\lambda > 0$. *Przyjmując*, że takie rozwiązanie istnieje, po prostych rozważaniach wnioskujemy, że swobodna powierzchnia musi być postaci

$$s(t) = c_1 t^{\frac{\alpha}{2}}, \quad \text{gdzie} \quad c_1 > 0. \tag{67}$$

Wtedy funkcja

$$f(\xi) = f(tx^{-\frac{2}{\alpha}}) = u(x,t) \tag{68}$$

spełnia ($c_0 = c_1^{-\frac{2}{\alpha}}$)

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{c_0}^{\xi}(\xi-p)^{-\alpha}f'(p)dp = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2\xi^2 f''(\xi) + \left[\left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 + \frac{2}{\alpha}\right]\xi f'(\xi) - \frac{(\xi-c_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \tag{69}$$

$$f(c_0) = 0, \tag{70}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 c_0^{-2}\Gamma(\alpha) = \lim_{b\searrow c_0}\frac{d}{db}\left[\int_{c_0}^{b}(b-p)^{\alpha-1}f'(p)dp\right]. \tag{71}$$

Tożsamość (69) implikuje

$$\lim_{\xi\searrow c_0}(\xi-c_0)^{\alpha}f''(\xi) = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\frac{c_0^{-2}}{\Gamma(1-\alpha)}, \tag{72}$$

natomiast z (71) otrzymujemy

$$f'(c_0) = 0. \tag{73}$$

Tym samym uzasadniono, że, przynajmniej w klasie rozwiązań samopodobnych, warunek (65) implikuje (66). Następnie *odwracamy* rozumowanie i poprzez rozwiązanie (69)-(73) skonstruujemy rozwiązanie samopodobne $u(x,t)$ korzystając z (68).

Aby rozwiązać (69)-(73), najnaturalniejszym wyborem jest zdeterminowanie f równościami (69), (70) i (73), a następnie wykazanie, że pozostałe warunki są spełnione. Zapisując (69) w postaci $f = Kf + g$, gdzie K jest pewnym operatorem zwartym na

$$X_R := \{f \in C^1([c_0,R]) : \ \ f(c_0) = f'(c_0) = 0\},$$

na mocy alternatywy Fredholma, wnioskujemy istnienie rozwiązania (69). Następnie wnioskujemy pozostałe warunki i tym samym otrzymujemy, że, przynajmniej w klasie rozwiązań samopodobnych, (66) implikuje (65), więc mamy już ich równoważność.

Jednakże wywnioskowanie np. nieujemności $u(x,t) = f(tx^{-\frac{2}{\alpha}})$ z tożsamości (69) nie jest oczywiste. Zatem wprowadzamy $F(\mu) = f(\mu^{-\frac{2}{\alpha}})$ i zapisujemy odpowiednie zagadnienie na F: $F' = LF - G$, gdzie L jest pewnym operatorem liniowym, a G pewną dodatnią funkcją całkowalną. Metodą iteracyjną otrzymujemy przedstawienie F w postaci

$$F(x) = \int_x^{c_1}\sum_{n=0}^{\infty}(L^nG)(y)dy \quad \text{dla każdego } x \in [0,c_1], \tag{74}$$

co na mocy własności L pozwala wywnioskować, że rozwiązanie samopodobne, zgodnie z oczekiwaniami, jest dodatnie. Co więcej, postać ta pozwala wywnioskować, że założenia (A1)-(A3) są spełnione.

Pozostaje kwestia spełniania warunku początkowego $\gamma = u(0,t)$. Przedstawiona konstrukcja rozwiązań samopodobnych, od ustalonego $c_1 > 0$ z warunku (67) prowadzi do rozwiązania samopodobnego $u(x,t)$, dla którego $\gamma = u(0,t)$ jest dodatnie. Naturalnym jest pytanie, czy tę zależność można odwrócić? Czy dla dowolnego $\gamma > 0$ istnieje $u(x,t)$ rozwiązanie samopodobne wyznaczone przez c_1 takie, że $\gamma = u(0,t)$? Odpowiedź na to pytanie wymaga badania ciągłości przyporządkowania $c_1 \mapsto \gamma$, która wynika z jeszcze innej reprezentacji rozwiązań samopodobnych, danej następującym twierdzeniem.

Twierdzenie 12 (Stw. 5 [H5]). *Jeżeli c_1 jest dodatnie i $s(t)$ jest dane równością (67), to dla $t > 0$ i $x \in [0, s(t)]$ rozwiązanie samopodobne $u(x,t)$ ma przedstawienie w postaci*

$$u(x,t) = \int_{xt^{-\frac{\alpha}{2}}}^{c_1} \sum_{n=0}^{\infty} (L^n G)(y) dy = \int_{xt^{-\frac{\alpha}{2}}}^{c_1} H(p, xt^{-\frac{\alpha}{2}}) G(p) dp, \tag{75}$$

gdzie

$$G(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_y^{c_1} (1 - c_1^{-\frac{2}{\alpha}} \mu^{\frac{2}{\alpha}})^{-\alpha} d\mu \quad dla \quad 0 \le y \le c_1,$$

$$H(p,x) = 1 + \int_x^p N(p,y) dy \quad dla \quad 0 \le x \le p,$$

$$N(p,y) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(p,y) \quad dla \quad 0 \le y \le p,$$

$$M_1(p,y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_y^p (1 - p^{-\frac{2}{\alpha}} \mu^{\frac{2}{\alpha}})^{-\alpha} d\mu \quad dla \quad 0 \le y \le p$$

i

$$M_n(p,y) = \int_y^p M_1(a,y) M_{n-1}(p,a) da \ dla \ 0 \le y \le p \ i \quad n \ge 2.$$

Ponadto, dla każdego $R > 0$, powyższy szereg zbiega jednostajnie na $W_R = \{(p,y) : 0 \le y \le p \le R\}$.

Zauważmy, że prawa strona (75) zależy w sposób nietrywialny od c_1, a jej ciągłość względem c_1 została wykazana w stw. 6 [H5]. Mając już ciągłość przyporządkowania $(0,\infty) \ni c_1 \mapsto \gamma \in (0,\infty)$, z własności Darboux wnioskujemy, iż jest ono suriekcją.

Jedną z metod weryfikacji modelu jest zestawienie go ze znanym, dla specyficznych wartości parametrów. Tutaj możemy zadać pytanie: czy tezy twierdzeń 11 i 12, przy $\alpha \nearrow 1$ prowadzą do klasycznego zagadnienia Stefana i jego rozwiązania? Odpowiedź na to pytanie jest pozytywna i jest zawarta w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 13 (Tw. 3 [H5]). *Niech $c_1 > 0$ będzie ustalone i dla $\alpha \in (0,1)$ niech para (u_α, s_α) będzie samopodobnym rozwiązaniem danym w twierdzeniu 12. Niech $\widetilde{u}_\alpha$ będzie przedłużeniem u_α zerem*

$$\widetilde{u}_\alpha(x,t) = \begin{cases} u_\alpha(x,t) & gdy \quad t > 0, \ \ x \in [0, s_\alpha(t)], \\ 0 & gdy \quad t > 0, \ \ x > s_\alpha(t). \end{cases}$$

Niech $0 < t_* < t^*$. Jeżeli $\alpha \nearrow 1$, to $\widetilde{u}_\alpha$ zbiega jednostajnie na zbiorze $\{(x,t) : \ t \in [t_*, t^*], \ x \in [0, c_1 t^{\frac{1}{2}}]\}$ do u_1, gdzie u_1 jest samopodobnym rozwiązaniem klasycznego zagadnienia Stefana odpowiadającym swobodnej powierzchni $s_1 := c_1 t^{\frac{1}{2}}$, tj. s_1 i u_1 spełniają

$$u_{1,t}(x,t) - u_{1,xx}(x,t) = 0 \quad dla \quad t > 0, \ \ x \in (0, s_1(t)),$$

$$u_1(s_1(t), t) = 0 \quad dla \quad t > 0,$$

$$u_1(0,t) = 2ae^{a^2} \int_0^a e^{-w^2} dw \quad dla \quad t > 0, \quad gdzie \quad a = \frac{c_1}{2},$$

$$\frac{d}{dt} s_1(t) = -u_{1,x}(s_1(t), t) \quad dla \quad t > 0$$

i u_1 jest dane wzorem
$$u_1(x,t) = 2ae^{a^2}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{a} e^{-w^2}dw.$$

Warto również prześledzić, co dzieje się z modelem otrzymanym w twierdzeniu 11 przy przejściu do granicy $\alpha \nearrow 1$. Otóż, bezpośredni rachunek, dla dostatecznie gładkich funkcji, daje

$$D^{\alpha}_{s^{-1}(x)}T(x,t) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-s^{-1}(x))^{-\alpha} = \partial^{\alpha}_{s^{-1}(x)}[T(x,t)+1] \to T_t(x,t),$$

gdy $\alpha \nearrow 1$, czyli (63) przechodzi w równanie przewodnictwa ciepła. Dalej, z własności

$$\lim_{a\to s(t)^-} \partial^{1-\alpha}_{s^{-1}(x)}T_x(x,t) \to T_x^-(s(t),t),$$

wnioskujemy, że (65) prowadzi do klasycznego warunku Stefana, gdy $\alpha \nearrow 1$. Tutaj rodzi się pytanie: co dzieje się z warunkiem (66), który dla $\alpha \in (0,1)$, przynajmniej w klasie rozwiązań samopodobnych, jest równoważny (65)? Otóż, warunek (66) *znika*, gdy $\alpha \nearrow 1$, jako sprzeczny z klasycznym warunkiem Stefana.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H5] są:

- zaproponowanie zmodyfikowanego modelu ułamkowego zagadnienia Stefana (niezależnie, innymi metodami został otrzymany podobny model w [38]),
- przedstawienie ściśle matematycznego wyprowadzenia tegoż modelu, którego rozwiązanie, dla małych czasów, zostało niedawno przedstawione w pracy prof. M. Krasnoschocka [19],
- konstrukcja rozwiązań samopodobnych ułamkowego zagadnienia Stefana, wraz ze zbadaniem ich własności,
- wykazanie zgodności z klasycznym modelem zagadnienia Stefana, gdy $\alpha \nearrow 1$,
- praca [H5] stanowi niejako empiryczny dowód, iż czysto matematyczne rozważania są użyteczne z punktu widzenia inżynierskiego. Brak oczekiwanej regularności rozwiązań może być impulsem do weryfikacji jego wyprowadzenia.

Omówienie pracy [H6]

Praca [H6] jest poświęcona wykazaniu słabej nierówności Harnacka i hölderowskiej ciągłości słabych rozwiązań zagadnienia ułamkowej dyfuzji z pochodną rozproszoną. Przypomnijmy, iż nierówność Harnacka, to oszacowanie supremum nieujemnego rozwiązania przez jego infimum, natomiast *słaba* nierówność Harnacka, to oszacowanie normy L^p dla $p < \infty$ przez infimum rozwiązania. Warto na wstępie zaznaczyć, iż już w przypadku zagadnienia z pojedynczą pochodną ułamkową *nie zachodzi* nierówność Harnacka w wymiarach $N \geq 2$, co zostało wykazane konstrukcją odpowiedniego kontrprzykładu w [6]. Ten sam argument pokazuje niezachodzenie nierówności Harnacka dla zagadnień z pochodną rozproszoną, również dla wszystkich wymiarów $N \geq 2$. Z kolei dla $N = 1$ odpowiedź jest *pozytywna*, co niedawno udowodniono w [40] (zjawisko krytycznego wymiaru).

W pracy [H6] rozpatrujemy następujące zagadnienie

$$\partial_t[k * (u - u_0)] - \operatorname{div}\big(A(t,x)Du\big) = f, \quad t \in (0,T),\ x \in \Omega, \tag{76}$$

gdzie Ω jest ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, u_0 jest dane i f jest ograniczoną funkcją. O współczynnikach $A(t,x) = \{a_{ij}(t,x)\}_{i,j=1}^N$ zakładamy jedynie, iż są istotnie ograniczone i definiują jednostajnie eliptyczny operator, tj. (28) zachodzi. Ponadto, jądro k jest dane (38), przy czym miara $\mu(\alpha)d\alpha$ jest zastąpiona ogólniejszą

$$d\mu = \sum_{n=1}^{M} q_n d\delta(\cdot - \alpha_n) + w d\nu_1, \tag{77}$$

gdzie $\alpha_i \in (0,1)$, $q_i > 0$, $\delta(\cdot - \alpha_n)$ to delta Diraca, natomiast $w \in L^1((0,1), d\nu_1)$, a ν_k oznacza k-wymiarową miarę Lebesgue'a. Zatem zagadnienie (76) obejmuje zagadnienia z wielokrotną pochodną ułamkową RL, zagadnienia z pochodną rozproszoną, jak i ich dowolną kombinację. Jest to jedna z zalet przedstawionego podejścia: pozwala ono rozpatrywać całą gamę przypadków zagadnień z nielokalnymi w czasie operatorami.

Równanie (76), postępując tak jak w [H5], możemy wywnioskować z zasady zachowania biorąc nielokalną w czasie funkcję strumienia $q(t,x) = -\partial_t[l * A(\cdot,x)Du(\cdot,x)](t)$, gdzie l jest jądrem stowarzyszonym z k, tj. $(k,l) \in \mathcal{PC}$ (def. 1, str. 15).

W przypadku ogólnego $k \in \mathcal{PC}$, prof. R. Zacher wykazał w [50] ograniczoność słabych rozwiązań (76). Natomiast, gdy $k(t) = t^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ dla pewnego $\alpha \in (0,1)$, tj. dla pojedynczej pochodnej Caputo, dla zagadnienia (76) prof. R. Zacher wykazał zachodzenie słabej nierówności Harnacka [51] i hölderowską ciągłość słabych rozwiązań [52]. Celem pracy [H6] było uogólnienie wyników z prac [51] i [52] na przypadek ogólnego k zadanego przez pochodną rozproszoną daną miarą (77). Główną trudnością, która tutaj się pojawia, jest *brak skalowania*. Przypomnijmy, że przypadku klasycznego zagadnienia parabolicznego z jednostajnie eliptycznym operatorem wprowadza się samopodobną zmienną $s = |x|^2/t$, natomiast dla zagadnienia z pojedynczą pochodną Caputo rzędu $\alpha \in (0,1)$ mamy $s = |x|^2/t^\alpha$, co determinuje proporcje rozpatrywanych cylindrów w procesie iteracji. Natomiast dla ogólnego $d\mu$ postaci (77), definicja odpowiednich cylindrów nie jest oczywista. Ponadto, szczególne trudności sprawiało otrzymanie „stabilnych" oszacowań przy $\alpha \to 1$. Brak naturalnego skalowania jest przyczyną sporych trudności technicznych i powoduje konieczność otrzymania wielu dodatkowych oszacowań, jak np. w lematach 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 i 2.6 w [H6].

Struktura pracy [H6] jest następująca: wpierw otrzymana jest słaba nierówność Harnacka, a następnie z niej wnioskujemy hölderowską ciągłość słabych rozwiązań. Jest to inna strategia, od tej przedstawionej w [52], gdzie zastosowana jest metoda De Giorgi. Przedstawione tutaj rozumowanie jest o wiele bardziej przystępne od tego zawartego w [52].

Aby przestawić pierwszy z wyników wprowadźmy odpowiednie oznaczenia. Niech

$$k_1(t) = \int_0^1 t^{-\alpha} d\mu(\alpha), \quad t > 0 \tag{78}$$

i dla funkcji Φ zdefiniowanej równaniem $k_1(\Phi(r)) = r^{-2}$ dla $r > 0$ definiujemy cylindry

$$Q_-(t_0, x_0, r, \delta) = (t_0, t_0 + \delta\tau\Phi(2r)) \times B(x_0, \delta r),$$

$$Q_+(t_0, x_0, r, \delta) = (t_0 + (2-\delta)\tau\Phi(2r), t_0 + 2\tau\Phi(2r)) \times B(x_0, \delta r),$$

gdzie $\delta \in (0,1)$, $t_0 \geq 0$ i $\tau > 0$. Zatem proporcje cylindrów zależą w sposób nietrywialny od miary (77). Ustalmy $\gamma_- \in (0,1)$ takie, że

$$\int_{\gamma_-}^1 d\mu(\alpha) > 0.$$

Wtedy prawdziwa jest następująca wersja słabej nierówności Harnacka.

Twierdzenie 14 (Tw. 1.1 [H6])**.** *Niech $T > 0, N \geq 1$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie ograniczonym obszarem. Załóżmy, że u_0 i f są w L^2. Wtedy dla dowolnego $0 < p < \frac{2+N\gamma_-}{2+N\gamma_- - 2\gamma_-}$ i $\tau > 0$ istnieje liczba $r^* = r^*(\mu, p) > 0$ taka, że dla każdego $\delta \in (0,1)$, $t_0 \geq 0$ i $r \in (0, r^*]$ takich, że $t_0 + 2\tau\Phi(2r) \leq T$, i dowolnej kuli $B(x_0, r) \subset \Omega$, dowolne, słabe nieujemne nadrozwiązanie u zagadnienia (76) w $(0, t_0 + 2\tau\Phi(2r)) \times B(x_0, r)$ dla $u_0 \geq 0$ w $B(x_0, r)$ i przy $f \equiv 0$ spełnia*

$$\Big(\frac{1}{\nu_{N+1}\big(Q_-(t_0, x_0, r, \delta)\big)} \int_{Q_-(t_0,x_0,r,\delta)} u^p \, d\nu_{N+1}\Big)^{1/p} \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{Q_+(t_0,x_0,r,\delta)} u,$$

gdzie $C = C(\nu, \Lambda, \delta, \tau, \mu, N, p)$.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na metodzie iteracyjnej Mosera i zastosowaniu lematu Bombieri-Giusti.

Do dowodu hölderowskiej ciągłości słabych rozwiązań potrzebna jest wersja powyższego twierdzenia dla zagadnienia niejednorodnego. Zapiszmy zatem f w postaci $f = f^+ - f^-$, gdzie $f^+, f^- \geq 0$ oznaczają odpowiednio dodatnią i ujemną część f. Wprowadźmy oznaczenie $\overline{\Phi}(r) := \Phi(2r)$, gdzie Φ jest wcześniej wprowadzoną funkcją. W przypadku niejednorodności f istotnie ograniczonej otrzymaliśmy następującą wersję słabej nierówności Harnacka.

Twierdzenie 15 (Tw. 1.2 [H6])**.** *Przy założeniach twierdzenia 14, słabe nieujemne nadrozwiązanie u równania*

$$\partial_t(k * (u - u_0)) - \operatorname{div}\big(A(t,x)Du\big) = f \quad w \quad (0, 2\tau\overline{\Phi}(r)) \times B(x_0, r)$$

przy $f \in L_\infty((0, 2\tau\overline{\Phi}(r)) \times B(x_0, r))$ i $u_0 \geq 0$ w $B(x_0, r)$ spełnia

$$\Big(\frac{1}{\nu_{N+1}\big(Q_-(0, x_0, r, \delta)\big)} \int_{Q_-(0,x_0,r,\delta)} u^p \, d\nu_{N+1}\Big)^{1/p} \leq C \left(\operatorname*{ess\,inf}_{Q_+(0,x_0,r,\delta)} u + r^2 \|f^-\| \right),$$

gdzie $\|\cdot\|$ to norma w $L_\infty((0, 2\tau\overline{\Phi}(r)) \times B(x_0, r))$, natomiast $C = C(\nu, \Lambda, \delta, \tau, \mu, N, p)$.

Przypadek $f \in L^p(0,T; L^q(\Omega))$ jest o wiele bardziej złożony i przy ogólnych założeniach o jądrze k został zbadany w [24].

Z twierdzenia 15 możemy wywnioskować mocną zasadę maksimum.

Twierdzenie 16 (Tw. 3.4, [H6]). *Niech $T > 0$ i $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie ograniczonym obszarem. Niech u będzie słabym podrozwiązaniem (76) dla $f \equiv 0$ i $u_0 \in L^2(\Omega)$. Załóżmy, że $0 \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega_T} u < \infty$ i $\operatorname{ess\,sup}_{\Omega} u_0 \leq \operatorname{ess\,sup}_{\Omega_T} u$. Wtedy, jeżeli dla pewnego cylindra $Q = (t_0, t_0 + \tau\Phi(2r)) \times B(x_0, r/2) \subset \Omega_T$ dla $t_0, \tau, r > 0$ i $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$ zachodzi*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q} u = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_T} u,$$

to funkcja u jest stała na $(0, t_0) \times \Omega$.

Ostatecznie, mając do dyspozycji słabą nierówność Harnacka otrzymujemy hölderowską ciągłość słabych rozwiązań.

Twierdzenie 17 (Tw. 1.3, [H6]). *Niech $T > 0$, $N \geq 1$ i niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie ograniczonym obszarem. Załóżmy, że $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ i $f \in L_\infty(\Omega_T)$. Jeżeli u jest ograniczonym słabym rozwiązaniem równania*

$$\partial_t(k * (u - u_0)) - \operatorname{div}\big(A(t,x)Du\big) = f, \quad t \in (0,T),\, x \in \Omega, \tag{79}$$

to dla dowolnego $V \subset \Omega_T$ oddzielonego od brzegu parabolicznego Ω_T, istnieje stała $C > 0$ i $\varepsilon \in (0,1)$, zależne tylko od μ, V, λ, Λ i N takie, że

$$\|u\|_{C^{0,\varepsilon}(V)} \leq C(\|u\|_{L_\infty(\Omega_T)} + \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|f\|_{L_\infty(\Omega_T)}).$$

Dowód tego twierdzenia opiera są na zastosowaniu twierdzenia 15 w celu oszacowania oscylacji rozwiązania na zmniejszających się cylindrach, o odpowiednio dobranych proporcjach. Warto tu nadmienić, iż gdyby zamiast k_1 zdefiniowanego w (78) rozpatrywać k w definicji tychże cylindrów, to dowód, naszym zdaniem, wymagałby dodatkowych założeń o nośniku μ, np. $\operatorname{supp}\mu \subseteq [0,1)$ - taka była pierwotna wersja pracy.

Podsumowując, istotnymi elementami pracy [H6] są:

- dowód słabej nierówności Harnacka dla słabych nieujemnych nadrozwiązań równania ułamkowej dyfuzji z ogólną pochodną rozproszoną, przy założeniu jednostajnej eliptyczności współczynników,
- dowód hölderowskiej ciągłości słabych rozwiązań powyższego równania,
- pokonanie trudności związanych z brakiem naturalnego skalowania i nielokalnością w czasie rozpatrywanego zagadnienia,
- wywnioskowanie hölderowskiej ciągłości ze słabej nierówności Harnacka, co jest podejściem prostszym od tego przedstawionego w [52].

Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych

Efekt Berga

[P1] A. Kubica, P. Rybka, *Fine singularity analysis of solutions to Laplace equation*, Math. Methods Appl. Sci. 38 (2015), no. 9, 1734–1745.

[P2] A. Kubica, P. Rybka, *Fine singularity analysis of solutions to Laplace equation: Berg's effect*, Math. Methods Appl. Sci. 39 (2016), no. 5, 1069–1075.

Prace [P1] i [P2] są poświęcone tzw. efektowi Berga, który, na podstawie obserwacji, był postulowany w teorii wzrostu kryształów (praca z 1938 W.F. Berga [3]). Skrótowo mówiąc, efekt Berga polegał na zaobserwowaniu monotonicznego zachowania się funkcji gęstości soli na powierzchni kryształu. W pracy [13] autorzy, prof. Y. Giga i prof. P. Rybka podjęli się zadania matematycznego wyjaśnienia tego fenomenu. Jego zachodzenie zostało wywnioskowane z regularności rozwiązań równania Laplace'a w obszarze zewnętrznym. Jednak argument zawarty w [13] nie jest konkluzywny. Motywacją do napisania prac [P1] i [P2] było właśnie zbadanie regularności rozwiązań wyżej wspomnianego zagadnienia. Zacznijmy od sformułowania pytania (Q): czy u-słabe rozwiązanie równania Laplace'a w obszarze zewnętrznym $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, gdzie Ω jest walcem, spełniające stały warunek brzegowy typu Neumanna na $\partial\Omega$, tj. $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{const}$ na ścianie bocznej i górnym/dolnym kole (l/t/b), jest klasy C^1 na $\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega}$? Odpowiedź twierdząca na powyższe pytanie, na mocy pracy [13], daje matematyczne uzasadnienie efektu Berga. Na chwilę obecną, odpowiedź na pytanie (Q) nie jest mi znana. Jednakże w pracach [P1] i [P2] zajmujemy się zbliżonym zagadnieniem w $\mathbb{R}^2$, wskazując, iż pozytywna odpowiedź na pytanie typu (Q) jest rzadkim fenomenem. Stąd można domniemywać, iż w $\mathbb{R}^3$ matematycznego uzasadnienia efektu Berga nie znajdziemy. Niemniej, jest to wciąż kwestia nierozstrzygnięta definitywnie.

Pytanie (Q) jest tylko z pozoru trywialne. Po pierwsze, z klasycznej teorii regularności wiemy, że słabe rozwiązania równania Laplace'a w obszarach niegładkich nie muszą być regularne. Tutaj, rozpatrując zewnętrze walca $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ mamy do czynienia z potencjalną osobliwością rozwiązań w otoczeniu krawędzi walca. Pytanie zatem brzmi: czy ta potencjalna osobliwość jest faktyczną osobliwością, tj. czy współczynnik liczbowy stojący przy osobliwej części rozwiązania jest niezerowy? Innymi słowy, słabe rozwiązania równania Laplace'a w $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ możemy przedstawić w postaci $u = u_{reg} + cs$, gdzie $u_{reg} \in C^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega})$ i $s \notin C^1_{loc}(\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \Omega})$, przy czym $c \in \mathbb{R}$ jest dane pewnym funkcjonałem liniowym zależnym od danych $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega}$, który z kolei jest zadany w sposób uwikłany i wymaga znajomości bardzo słabego rozwiązania równania Laplace'a. O tym ostatnim wiemy jeszcze mniej, niż o słabym rozwiązaniu, którego regularność właśnie badamy. Po drugie, dostępna teoria (np. [7],[8],[9]) jest zbyt ogólna, nie daje odpowiedzi w przypadku szczególnych warunków brzegowych.

Zatem pytanie (Q) sprowadza się do następującego: ($\widetilde{\text{Q}}$): czy jeżeli $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial\Omega} = \text{const}$ na l/t/b, to czy $c = 0$? A może odpowiedź twierdząca na to pytanie zależy od pewnych proporcji wysokości walca do jego długości? W pracach [P1] i [P2] pokazano, iż w przypadku analogicznego zagadnienia w dwóch wymiarach, zerowanie się części osobliwej zachodzi jedynie w przypadku odpowiedniej proporcji szerokości do wysokości. Innymi słowy, jest zjawiskiem rzadkim, a dowolnie małe zaburzenie tej proporcji skutkuje pojawieniem się części osobliwej rozwiązania i tym samym nie ma mamy do czynienia z efektem Berga. Dowód tejże „niestabilności” polega na wnikliwym badaniu bardzo słabych (tj. u należącego do $L^2 \setminus H^1$) rozwiązań równania Laplace'a w niegładkim obszarze. W szczególności, badamy przebieg i strukturę zbioru poziomic bardzo słabych rozwiązań, co pozwala na wywnioskowanie pewnych kluczowych informacji dotyczących zachowania danego w sposób niejawny funkcjonału determinującego współczynnik c.

Warunkowa regularność rozwiązań równań Navier-Stokesa

[P3] A. Kubica, M. Pokorny, W.M. Zajączkowski, *Remarks on regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012), no 3, 360-371.

[P4] A. Kubica, *A regularity criterion for positive part of radial component in the case of axially symmetric Navier-Stokes equations*, Dem. Math. vol. 48(1), (2015).

Prace [P3] i [P4] są poświęcone badaniu kwestii regularności słabych rozwiązań równania Navier-Stokesa (NS). Jak wiadomo, słabe rozwiązania NS dla zagadnienia w przestrzeni dwuwymiarowej są regularne, natomiast w trzech wymiarach, jest to wciąż kwestia nierozstrzygnięta (tzw. 6 problem milenijny). Na chwilę obecną znane są jedynie wyniki częściowe, jak np. te dotyczące *warunkowej regularności*. Mają one częstokroć następującą postać: jeżeli u jest słabym rozwiązaniem NS, o którym dodatkowo wiemy, iż jest w pewniej przestrzeni funkcyjnej, to u jest gładkie. Najbardziej znanymi warunkami tego typu są warunki Serrina (zwane też warunkami Prodi-Ładyżeńskiej-Serrina), które, zakładają, iż $u \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$, gdzie $\frac{2}{p}+\frac{3}{q}=1$, $q>3$.

Rozstrzygnięcie regularności ogólnych trójwymiarowych rozwiązań równań NS jest na chwilę obecną poza naszym zasięgiem, więc analizowane są pewne specjalne klasy rozwiązań. Na przykład, wiadomo iż rozwiązania helikoidalne są regularne [29]. Podobnie jest z rozwiązaniami osiowosymetrycznymi (AS), o ile składowa kątowa rozwiązania u_φ jest zerowa [25], [44], [26]. Przypomnijmy, że AS rozwiązania równania NS (ASNS), to takie, którego współrzędne walcowe u_r, u_φ, u_z i stowarzyszone ciśnienie p nie zależą od kąta φ, tj.

$$u(x) = u_r(r,z)e_r + u_\varphi(r,z)e_\varphi + u_z(r,z)e_z,$$

gdzie $e_r = (\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, 0)$, $e_\varphi = (-\frac{x_2}{r}, \frac{x_1}{r}, 0)$, $e_z = (0,0,1)$, a (r,φ,z) to współrzędne walcowe w $\mathbb{R}^3$. Kwestia, czy w przypadku $u_\varphi \not\equiv 0$ ASNS są regularne również nie jest jeszcze rozstrzygnięte. Jednakże możemy tutaj otrzymać wyniki dotyczące warunkowej regularności, a wobec nałożonego ograniczenia geometrycznego na strukturę rozwiązań, spodziewamy się zakładać mniej, niż w przypadku ogólnym. W istocie, w pracy [34] pokazano, iż wystarczy nałożyć warunek typu Serrina jedynie na składową radialną u_r. Natomiast w pracy [20] otrzymano regularność słabych rozwiązań przy dodatkowym założeniu nałożonym na składową kątową $u_\varphi \in L^p(0,T;L^q(\Omega))$, gdzie $\frac{2}{p}+\frac{3}{q} < \frac{7}{4} - \frac{3}{q}$, $q \in (\frac{24}{7}, 4]$. Zauważmy, że tutaj $\frac{2}{p}+\frac{3}{q} < 1$, co oznacza, że norma w przestrzeni $L^p(0,\infty;L^q(\mathbb{R}^3))$ *nie* jest niezmiennicza na naturalne dla równania NS skalowanie, tj. $u_\lambda(x,t) = \lambda u(\lambda^2 x, \lambda t)$. Aby norma w przestrzeni $L^p(0,\infty;L^q(\mathbb{R}^3)$ była niezmiennicza na powyższe skalowanie konieczny jest związek $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} = 1$. Można zadać pytanie: czy są jeszcze jakieś inne niezmiennicze na skalowanie warunki gwarantujące istnienie regularnych osiowosymetrycznych rozwiązań NS? W pracy [P3] otrzymano następujący warunek: $r^d u_r^- \in L^p(0,T; L^q(\mathbb{R}^3))$, gdzie u_r^- to ujemna część u_r, a wykładniki $q \in (\frac{3}{2}, \infty)$, $p \in (1,\infty)$, $d \in (-1,1)$ spełniają równość $\frac{2}{p} + \frac{3}{q} + d = 1$. Zatem tu rozpatrujemy wagową przestrzeń o normie niezmienniczej na skalowanie.

Z kolei praca [P4] poświęcona jest dowodowi analogicznego twierdzenia, z tym że tutaj przyjmujemy warunek na dodatnią składową u_r^+. Jednakże w tym przypadku konieczne jest jeszcze przyjęcie, iż $r^{-\delta} \cdot ru_\varphi \in L^\infty$ dla jakiegokolwiek $\delta > 0$. Kluczowym jest spostrzeżenie, iż ten ostatni warunek jest niemal tym, co mamy dla słabych osiowosymetrycznych rozwiązań: $ru_\varphi \in L^\infty$, o ile dane początkowe spełniają $\nabla u_0 \in L^\infty$, $ru_{0\varphi} \in L^\infty$. A co najciekawsze, warunek $ru_\varphi \in L^\infty$ *jest niezmienniczy* na skalowanie. Można zatem zadać pytanie: skoro słabe osiowosymetryczne rozwiązania NS spełniają niezmienniczy na skalowanie warunek $ru_\varphi \in L^\infty$, to przy jakim dodatkowym założeniu rozwiązanie to będzie regularne? W pracy [P3], w pierwszym podejściu otrzymaliśmy następujący wynik: $r^{-\delta} \cdot ru_\varphi \in L^\infty$ dla $\delta > \frac{1}{5}$. Moglibyśmy powiedzieć, iż jesteśmy w „odległości” $\frac{1}{5}$ od regularności ASNS. Dzięki uwagom prof. W. Zajączkowskiego udało się zmniejszyć „dystans” do $\frac{1}{6}$. Ta idea „zbliżania” się do regularności ASNS była kontynuowana przez innych autorów. Jednym z ciekawszych rezultatów na tym polu jest ten otrzymany przez prof. D. Wei [41], wedle którego do regularności wystarczy by $|\ln r|^{\frac{3}{2}} ru_\varphi \in L^\infty$. Obecnie tego typu rezultatów warunkowej regularności, sformułowanych w przestrzeniach wagowych, jest bardzo wiele.

Model turbulencji Kołmogorowa

[P5] P. Kosewski, A. Kubica, *Local in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence*,
Monatsh. Math. 198 (2022), no. 2, 345–369.

[P6] P. Kosewski, A. Kubica, *Global in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence with small initial data*,
Results Math. 77 (2022), no. 4, Paper No. 163.

W pracach [P5] i [P6] zajmujemy się badaniem istnienia regularnych lokalnych i globalnych rozwiązań następującego modelu turbulencji zaproponowanego przez A.N. Kołmogorowa w pracy [18] (również w [43])

$$v_t + \operatorname{div}(v \otimes v) - 2\nu_0 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega} D(v)\right) = -\nabla p, \tag{80}$$

$$\omega_t + \operatorname{div}(\omega v) - \kappa_1 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega}\nabla\omega\right) = -\kappa_2\omega^2, \tag{81}$$

$$b_t + \operatorname{div}(bv) - \kappa_3 \operatorname{div}\left(\frac{b}{\omega}\nabla b\right) = -b\omega + \kappa_4 \frac{b}{\omega}|D(v)|^2, \tag{82}$$

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{83}$$

Zagadnienie powyższe jest rozpatrywane w obszarze $\Omega = \prod_{i=1}^{3}(0, L_i)$ z okresowymi warunkami brzegowymi i zadanymi warunkami początkowymi

$$v_{|t=0} = v_0, \quad \omega_{|t=0} = \omega_0, \quad b_{|t=0} = b_0. \tag{84}$$

O danych początkowych zakładamy, iż istnieją dodatnie liczby $b_{\min}$, $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ takie, że

$$0 < b_{\min} \le b_0(x), \quad 0 < \omega_{\min} \le \omega_0(x) \le \omega_{\max}. \tag{85}$$

Jedyne znane wcześniej rezultaty matematyczne otrzymane dla powyższego zagadnienia dotyczyły istnienia słabych rozwiązań ([5], [32]). W pracy [P5] dowodzimy istnienia regularnych lokalnych w czasie rozwiązań (80)-(84). Dowód opiera się na zastosowaniu metody Galerkina przy odpowiednio dobranym zagadnieniu przybliżonym. Założenie (85) umożliwia jednostajną kontrolę normy w L^∞ aproksymacji ω i kontrolę od dołu aproksymacji $\frac{b}{\omega}$ (idea była oparta na pracy [32]). Natomiast w pracy [P6] dowodzimy istnienia regularnych globalnych w czasie rozwiązań (80)-(84), przy założeniu małości danych początkowych.

Prace [P5] i [P6] stanowią część rezultatów zaprezentowanych przez dr Przemysława Kosewskiego w jego rozprawie doktorskiej.

Ułamkowe równania różniczkowe

[P7] A. Kubica, K. Ryszewska and M. Yamamoto, *Time-fractional differential equations—a theoretical introduction*,
SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2020.

[P8] A. Kubica, K. Pawlak, *Characterization of the range of the fractional integral operator in L^2 space*,
20 Years of the Faculty of the Mathematics and Information Sciences Warsaw University of Technology, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2022,

Praca [P7] stanowi elementarne wprowdzenie do teorii ułamkowych równań różniczkowcyh zyczajnych jak i cząstkowych. Przedstawione jest tutaj podejście alternatywne do tego z prac [H1]–[H3]. Natomiast praca [P8] ma na celu prezentację, ze wszelkimi szczegółami, znanego wyniku dotyczącego charakteryzacji obrazu całki ułamkowej I^α określonej na przestrzeni $L^2(0, T)$.

Zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych

[P9] A. Kubica, W.M. Zajączkowski, *Parabolic system in weighted Sobolev space*, Appl. Math. 34 (2007), 169-191.

[P10] A. Kubica, W.M. Zajączkowski, *A priori estimates in weighted space for solutions of the Poisson and heat equations*, Appl. Math. 34 (2007), 431-444.

[P11] A. Kubica, *The Dirichlet problem in weighted spaces on a dihedral domain*, Banach Center Publ. 86 (2009), 207-222.

Prace [P9]–[P11] stanowią część mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej *Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych* obronionej w 2009 roku. Wagi tam rozpatrywane są związane z przestrzeniami typu Kondratiev'a, a więc nie są to $\mathcal{A}_p$-wagi, a same zagadnienia mają swe źródło w problemach pojawiających się przy analizie osiowosymetrycznych rozwiązań równań Navier-Stokesa. Otóż, gdybyśmy mieli do dyspozycji rozwiązywalność w pewnych przestrzeniach wagowych typu Kondratiev'a równania $u_t - \Delta u + \frac{1}{r^2}u = f$ w $\mathbb{R}^3$, gdzie $r = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$, to możliwe byłoby wywnioskowanie regularności osiowosymetrycznych słabych rozwiązań NS. Jednakże wnioski płynące z [P9]–[P11], jak i z tez rozprawy doktorskiej, wskazują, iż wyżej wspomnianej rozwiązywalności nie mamy. Jest to tym bardziej niespodziewany wynik, gdyż dysponujemy odpowiednimi oszacowaniami a priori (praca [P10]). Zatem mamy tutaj do czynienia z rzadko spotykaną sytuacją w równaniach różniczkowych: dysponujemy oszacowaniami a priori w pewnych przestrzeniach funkcyjnych, ale nie mamy istnienia rozwiązań w tych przestrzeniach. Co więcej, kowymiar obrazu operatora zadanego przez rozpatrywane równanie jest nieskończony.

Regularność rozwiązań równania Poissona w obszarach wielokątnych

[P12] A. Kubica, *The regulatity of weak and very weak solutions of the Poisson equation on polygonal domain with mixed boundary conditions (part I)*, Appl. Math. (Warsaw) 31 (2004), no. 1, 443-456.

[P13] A. Kubica, *The regulatity of weak and very weak solutions of the Poisson equation on polygonal domain with mixed boundary conditions (part II)*, Appl. Math. 34 (2007), 431-444

Prace [P12] i [P13] zawierają wyniki przedstawione w mojej pracy magisterskiej. Analizujemy tam regularność słabych i bardzo słabych rozwiązań równania Poissona w obszarach wielokątnych, przy czym na brzegu zadajemy *mieszane* jednorodne warunki brzegowe. Dokładniej, na bokach rozpatrywanego wielokąta mamy zadaną dowolną kombinację warunków brzegowych typu Dirichleta, Neumanna i Robina. Obecność kątów i mieszane warunki brzegowe skutkują brakiem regularności słabych i bardzo słabych rozwiązań. W pracach [P12] i [P13] charakteryzujemy osobliwą część rozwiązań, czyli wskazujemy odpowiednią kombinację liniową funkcji, związaną z rozpatrywanym zagadnieniem, z dokładnością do której, słabe bądź bardzo słabe rozwiązanie równania Poissona, jest regularne, tj. należy do H^2.

5. **Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnoscią naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.**

   (a) **Referaty wygłoszone na konferencjach naukowych**

   - *Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych*, IV Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo 2008.
   - *Linear elliptic and parabolic model problems in weighted spaces*, 6th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Gaeta 2009.
   - *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Drezno, 2010.
   - *O warunkowej regularności osiowosymetrycznych rozwiązań równań Navier-Stokesa*, VII Forum of Differential Equations, Będlewo, 2010.
   - *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, International Summer School: Mathematical Fluid Dynamics, Levico Terme, 2010.
   - *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Vancouver, 2011.
   - *O warunkowej regularności osiowosymetrycznych rozwiązań równań Navier-Stokesa*, VIII Forum of Differential Equations, Będlewo, 2012.
   - *A Regularity Criterion for An Axially Symmetric Solution to the Navier-Stokes Equations*, 7th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Gaeta 2012.
   - *Regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Parabolic and Navier-Stokes Equations, Będlewo 2012.
   - *Local in time solutions of MHD system for bounded and exterior domain*, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems, New Trends - a week for Wojciech Zajączkowski, 2015.
   - *Local in time solutions of MHD system for bounded and exterior domain*, Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues, Wilno, 2015.
   - *Fractional diffusion equation*, IRSES, IM PAN Warszawa, 2016.
   - *Fractional diffusion equation*, 10th International Conference on Non-Integer Order Calculus and Its Applications, Białystok 2018.
   - *Fractional diffusion equation*, International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Walencja, 2019.
   - *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Banach Center, online, 2020.

- *Time-Fractional Differential Equations*, Chiny, 2020 - zdalnie.
- *Kolmogorov's two-equation model of turbulence*, Turb1D 2020, zdalnie.
- *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative*, Ułan Bator, 2023, zdalnie.
- *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem* Innovations in Fractional Calculus and Applications to Functional and Biological Materials, Lozanna, 2023.
- *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Equadiff, Karlstad 2024.

(b) **Wyjazdy w ramach współpracy naukowej**

- University of Pittsburgh, na zaproszenie prof. Giovanni Galdi, 15.01.2014-15.02.2014.
- Charles University w Pradze, na zaproszenie prof. Milana Pokorný, 22-29.09.2014.
- University of Pittsburgh, na zaproszenie prof. Giovanni Galdi, 15.07.2014-14.08.2014.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 6-28.05.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 17.07.2016-11.08.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 11.09.2016-1.10.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 23.11.2016-3.12.2016.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 22.02.2017-4.03.2017.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 1.04.2017-12.04.2017.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 19.02.2018-8.03.2018.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 30.05.2018-14.06.2018.

(c) **Organizacja konferencji**

- *Nonlocal diffusion problems, nonlocal interface evolution*, 1.–3. October 2020, zdalnie, współorganizator.
- *Models involving fractional differential equations and their analysis* - sympozjum w ramach konferencji ICIAM 2019, Walencja, współorganizator.

6. **Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.**

   (a) **Opieka naukowa nad doktorantami:**

      i. **Katarzyna Ryszewska**, opieka naukowa w okresie 2017-2021, tytuł rozprawy: *A Semigroup Approach to the Space-Fractional Diffusion and the Analysis of Fractional Stefan Models*, Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej, **promotor pomocniczy**, doktorat obroniony w 2021, wyróżnienie.
      ii. **Przemysław Kosewski**, opieka naukowa w okresie 2018-2024, tytuł rozprawy: *Kolmogorov's Model of Turbulence - Mathematical Analysis*, Wydział MiNI Politechniki Warszawskiej, **promotor pomocniczy**, doktorat obroniony w 2024.
      iii. **Karolina Pawlak**, opieka naukowa od 2020, **promotor pomocniczy**, rozprawa doktorska w przygotowaniu.

   (b) **Doświadczenie dydaktyczne:**

      - *Wykłady monograficzne* prowadzone na Wydziale Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej:
        – Analiza harmoniczna,
        – Analiza funkcjonalna II,
        – Teoria regularności równań Naviera–Stokesa.
      - *Warsztaty dla doktorantów* prowadzone na Wydziale MiNI Politechniki Warszawskiej:
        – Teoria półgrup,
        – Teoria interpolacji,
        – Teoria regularności,
        – Ewolucyjne równania całkowe,
        – Metody słabej zbieżności,
        – Przestrzenie Besova.
      - *Zajęcia dydaktyczne* prowadzone na Wydziale MiNI Politechniki Warszawskiej (ćwiczenia):
        – Równania różniczkowe zwyczajne,
        – Równania różniczkowe cząstkowe,
        – Analiza zespolona,
        – Analiza funkcjonalna,
        – Analiza matematyczna III.
      - Opieka nad pracami dyplomowymi: 21 obronionych prac licencjackich oraz 6 obronionych prac magisterskich na Politechnice Warszawskiej.

7. Dodatkowe informacje

(a) Udział w projektach badawczych

- *Równania ośrodków ciągłych: własności i struktura rozwiązań*, grant MNiSW nr 1 P03A 021 30, 2006-2009, wykonawca.
- *Dyfuzja anizotropowa w ewolucji powierzchni swobodnych*, grant NCN 2011/01/B/ST1/01197, 2011-2014, wykonawca.
- *Nonlocal problems of interface evolution*, 2017-2023, grant NCN 2017/26/M/ST1/00700, wykonawca.

(b) Nagrody i wyróżnienia

- 2010 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2016 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna III stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2017 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (Złota Kreda, I miejsce) za wyróżniające prowadzenie zajęć dydaktycznych.
- 2018 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (Złota Kreda) za wyróżniające prowadzenie zajęć dydaktycznych.
- 2018 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2019 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna I stopnia) za osiągnięcia naukowe.
- 2022 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (Złota Kreda, I miejsce) za wyróżniające prowadzenie zajęć dydaktycznych.
- 2022 – Nagroda Rektora Politechniki Warszawskiej (indywidualna II stopnia) za osiągnięcia naukowe.

(c) Działalność recenzencka: *recenzje dla następujących czasopism*:

Acta Mathematica Scientia, Advances in Differential Equations, Advances in Mathematics, Annales Polonici Mathematici, Applicationes Mathematicae, Applied Mathematics and Computation, Applied Mathematics Letters, Asymptotic Analysis, Computers and Mathematics with Applications, Demonstratio Mathematica, Electronic Journal of Differential Equations, Fractional Calculus and Applied Analysis, Journal of Applied Analysis, Journal of Dynamics and Differential Equations, Mathematics and Mechanics of Solids, Mathematische Annalen, Mathematische Nachrichten, Monatshefte für Mathematik, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Proceedings A of the Royal Society of Edinburgh.

(d) **Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego**

- Według bazy Web of Science:
  - liczba cytowań: 312,
  - liczba cytowań bez autocytowań: 299,
  - indeks Hirscha: 7,
  - indeks Hirscha z wykluczeniem autocytowań: 7.

- Według bazy Scopus:
  - liczba cytowań: 336,
  - liczba cytowań bez autocytowań: 322,
  - indeks Hirscha: 8,
  - indeks Hirscha z wykluczeniem autocytowań: 8.

Literatura

[1] M. Al-Refai, Y. Luchko, *Analysis of fractional diffusion equations of distributed order: maximum principles and their applications*, Analysis (Berlin) 36 (2016), no 2, 123–133.

[2] D. Andreucci, *Lecture notes on the Stefan problem*, Lecture notes, Universita da Roma La Sapienza, Italy, 2004.

[3] W.F. Berg, *Crystal growth from solutions*, Proc. Roy. Soc. London A, 164, (1938), 79–95.

[4] A.V. Bobylev, C. Cercignani, *The inverse Laplace transform of some analytic functions with an application to the eternal solutions of the Boltzmann equation*, Applied Mathematics Letters 15 (2002), 807-813.

[5] M. Bulicek, J. Malek, *Large data analysis for Kolmogorov's two equation model of turbulence*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 50 (2019), 104-143.

[6] D. Dier, J. Kemppainen, J. Siljander, R. Zacher, *On the parabolic Harnack inequality for non-local diffusion equations*, Math. Z. 295 (2020), 1751–1769.

[7] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, London, 1985.

[8] V.A. Kondrat′ev, *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, **16**, (1967), 209–292.

[9] V.A. Kozlov, V.G. Maz′ya, J.Rossmann, *Spectral problems associated with corner singularities of solutions to elliptic equations*, Mathematical Surveys and Monographs, 85. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[10] A.N. Ceretani, *A note on models for anomalous phase-change processes*, Fract. Calc. Appl. Anal., 23 No. 1 (2020), 167-182.

[11] F. Falcini, R. Garra, V. Voller, *Fractional Stefan problems exhibiting lumped and distributed latent-heat memory effects*, Physical Review E 87, 042401 (2013).

[12] A. Friedman, *Free boundary problems for parabolic equations. I. Melting of solids*, J. Math. Mech. 8 (1959), 499–517.

[13] Y. Giga, P.Rybka, *Berg's effect*, Adv. Math. Sci. Appl., 13, no 2 (2003), 625-637.

[14] L. Junyi, X. Mingyu, *Some exact solutions to Stefan problems with fractional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 351 (2009), 536-542.

[15] A. N. Kochubei, *Distributed order calculus and equation of ultraslow diffusion*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 340, issue 1, no. 1 (2008), 252–281.

[16] A. N. Kochubei, *General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes, integral equations and operator theory*, December 2011, vol. 71, Issue 4, 583–600.

[17] A. N. Kochubei, *Distributed order calculus: an operator-theoretic interpretation*, Ukrainian Mathematical Journal 60 (2008), no 4, 551–562.

[18] A. N. Kolmogorov, *Equations of turbulent motion in an incompressible fluid*, Proceedings of the USSR Academy of Sciences, 1941, 30, 299–303.

[19] M. Krasnoschok, *On a one-dimensional time-fractional Stefan problem* Applicationes Mathematicae 51 (2024), 13-46.

[20] O. Kreml, M. Pokorný: *A regularity criterion for the angular velocity component in axisymmetric Navier-Stokes equations*, Electron. J. Differential Equations 2007, No. 08, 10 pp.

[21] A. Kubica, K. Ryszewska, *A note about fractional Stefan problem*, arXiv:1908.05136v1.

[22] A. Kubica, K. Ryszewska and M. Yamamoto, *Time-fractional differential equations—a theoretical introduction*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2020.

[23] A. Kubica, K. Pawlak, *Characterization of the range of the fractional integral operator in L^2 space*, w Chełmiński K., Górka P., Kubica A., 20 Years of the Facultu of the Mathematics and Information Sciences Warszaw University of Technology. A collection of research papers in mathematical analysis and in partial differential equations, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2022,

[24] A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, *Hölder regularity for nonlocal in time subdiffusion equations with general kernel*, arXiv:2409.04841.

[25] O.A. Ladzyhenskaya, *On the unique global solvability of the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in the presence of the axial symmetry*, Zap. Nauch. Sem. LOMI 7 (1968), 155–177.

[26] S. Leonardi, J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný: *On axially symmetric flows in* $\mathbb{R}^3$, ZAA 18 (1999), 639–649.

[27] Z. Li, Y. Luchko, M. Yamamoto, *Asymptotic estimates of solutions to initial-boundary-value problems for distributed order time-fractional diffusion equations*, Fractional Calculus and Applied analysis, 17 (2014), no 4, 1114–1136.

[28] Y. Luchko, *Boundary value problems for the generalized time-fractional diffusion equation of distributed order*, Fract. Calc. Appl. Anal. 12 (2009), no 4, 409–422.

[29] A. Mahalov, E.S. Titi, S. Leibovich, *Invariant helical subspaces for the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 112, 193–222 (1990).

[30] C. Martínez Carracedo and M. A. Sanz Alix, *The theory of fractional powers of operators*, North-Holland Mathematics Studies, 187, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[31] R. Metzler, J. Klafter, *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, Phys. Rep. 339, (2000), no. 1, 77 pp.

[32] A. Mielke, J. Naumann,*Global-in-time existence of weak solutions to Kolmogorov's two-equation model of turbulence*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 353 (2015), no. 4, 321-326.

[33] A. M. Meirmanov, *The Stefan problem* , "Nauka" Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1986.

[34] J. Neustupa, M. Pokorný: *Axisymmetric flow of Navier-Stokes fluid in the whole space with non-zero angular velocity component*, Math. Boh. 126, No. 2 (2001), 469–481.

[35] J. W. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Monographs in Mathematics, 87, Birkhäuser, Basel, 1993.

[36] H.-G. Sun, M.M. Meerschaert, Y. Zhang, J. Zhu, W. Chen, *A fractal Richards equation to capture the non-Boltzmann scaling of water transport in unsaturated media*, Adv. Water Resour. 52 (2013) 292–295.

[37] Y-X. Tao, R.W. Besant, K.S. Rezkallah, *A mathematical model for predicting the densification and growth of frost on a flat plate*, Int. J. Heat Mass Transfer 36 (1993) 353–363.

[38] S. D. Roscani, J. Bollati, D. A. Tarzia, *A new mathematical formulation for a phase change problem with a memory flux*, Chaos, Solitons and Fractals, 116 (2018), 340-347.

[39] W. Rundell, Z. Zhang, *Fractional diffusion: recovering the distributed fractional derivative from overposed data*, Inverse Problems, vol 33, no 3, (2017).

[40] K. Ryszewska, R. Zacher, *On the Harnack inequality for time-fractional and more general non-local in time subdiffusion equations*, preprint.

[41] D. Y. Wei, *Regularity criterion to the axially symmetric Navier-Stokes equations*, J. Math. Anal. Appl. 435 (2016), no. 1, 402–413.

[42] S. G. Samko and A. A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional integrals and derivatives. Theory and applications, *Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland*, 1993.

[43] D.B. Spalding, *Kolmogorov's two-equation model of turbulence*, Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences, vol. 434, 1991, no 1890, 211–216.

[44] M.R. Uchovskii, B.I. Yudovich: *Axially symmetric flows of an ideal and viscous fluid in the whole space* (in Russian, also J. Appl. Math. Mech, 32 (1968), 52-61), Prikladnaya matematika i mechanika 32 (1968), 59–69.

[45] V.R. Voller, *An exact solution of limit case Stefan problem governed by a fractional diffusion equation*, Int. J. Heat Mass Transfer 53 (2010) 5622–5625.

[46] V. Voller, *Fractional Stefan problems*, International Journal of Heat and Mass Transfer 74 (2014): 269-277.

[47] V. Vergara, R. Zacher, *Optimal decay estimates for time-fractional and other nonlocal subdiffusion equations via energy methods*, SIAM J. Math. Anal. 47 (2015), no. 1, 210–239.

[48] P. Wittbold, P. Wolejko, R. Zacher, *Bounded weak solutions of time-fractional porous medium type and more general nonlinear and degenerate evolutionary integro-differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 499.1 (2021): 125007.

[49] R. Zacher, *Weak solutions of abstract evolutionary integro-differential equations in Hilbert spaces*, Funkcial. Ekvac. 52 No 1 (2009), 1–18.

[50] R. Zacher, *Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 348 (2008) 137-149.

[51] R. Zacher, *A weak Harnack inequality for fractional evolution equations with discontinuous coefficients*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 12 (2013), 903–940.

[52] R. Zacher, *A De Giorgi–Nash type theorem for time fractional diffusion equations*, Mathematische Annalen, 356 (2013), 99–146.

Wykaz osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny

I. WYKAZ OSIĄGNIĘĆ NAUKOWYCH ALBO ARTYSTYCZNYCH, O KTÓRYCH MOWA W ART. 219 UST. 1. PKT 2 USTAWY

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b ustawy

Cykl zatytułowany:

Rozwiązania równań ułamkowej dyfuzji

1. A. Kubica, P. Rybka, K. Ryszewska, *Weak solutions of fractional differential equations in non cylindrical domains*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 36 (2017), 154–182.
2. A. Kubica, M. Yamamoto, *Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coefficients*, Fract. Calc. Appl. Anal. 21 (2018), no. 2, 276–311.
3. A. Kubica, K. Ryszewska, *Fractional diffusion equation with distributed-order Caputo derivative*, J. Integral Equations Appl. 31 (2019), no. 2, 195–243.
4. A. Kubica, K. Ryszewska, *Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo derivative*, J. Math. Anal. Appl. 465 (2018), no. 1, 75–99.
5. A. Kubica, K. Ryszewska, *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem* Math. Methods Appl. Sci. 44 (2021), no. 6, 4245–4275.
6. A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative* Math. Ann. 390 (2024), no. 2, 2513–2592.

II. WYKAZ AKTYWNOŚCI NAUKOWEJ

1. Wykaz wystąpień na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych

- *Modelowe zagadnienia eliptyczne i paraboliczne w przestrzeniach wagowych*, IV Forum Równań Różniczkowych Cząstkowych, Będlewo 2008.

- *Linear elliptic and parabolic model problems in weighted spaces*, 6th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Gaeta 2009.
- *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, Drezno, 2010.
- *O warunkowej regularności osiowosymetrycznych rozwiązań równań Navier-Stokesa*, VII Forum of Differential Equations, Będlewo, 2010.
- *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, International Summer School: Mathematical Fluid Dynamics, Levico Terme, 2010.
- *A regularity criterion for an axially symmetric solutions to the Navier-Stokes equations*, International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Vancouver, 2011.
- *O warunkowej regularności osiowosymetrycznych rozwiązań równań Navier-Stokesa*, VIII Forum of Differential Equations, Będlewo, 2012.
- *A Regularity Criterion for An Axially Symmetric Solution to the Navier-Stokes Equations*, 7th European Conference on Elliptic and Parabolic Problems, Gaeta 2012.
- *Regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Parabolic and Navier-Stokes Equations, Będlewo 2012.
- *Local in time solutions of MHD system for bounded and exterior domain*, Mathematical Fluid Mechanics: Old Problems, New Trends - a week for Wojciech Zajączkowski, 2015.
- *Local in time solutions of MHD system for bounded and exterior domain*, Asymptotic Problems: Elliptic and Parabolic Issues, Wilno, 2015.
- *Fractional diffusion equation*, IRSES, IM PAN Warszawa, 2016.
- *Fractional diffusion equation*, 10th International Conference on Non-Integer Order Calculus and Its Applications, Białystok 2018.
- *Fractional diffusion equation*, International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Walencja, 2019.
- *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Banach Center, online, 2020.
- *Time-Fractional Differential Equations*, Chiny, 2020 - zdalnie.
- *Kolmogorov's two-equation model of turbulence*, Turb1D 2020, zdalnie.
- *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative*, Ułan Bator, 2023, zdalnie.
- *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem* Innovations in Fractional Calculus and Applications to Functional and Biological Materials, Lozanna, 2023.
- *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Equadiff, Karlstad 2024.

2. **Organizacja konferencji**

- *Nonlocal diffusion problems, nonlocal interface evolution*, 1.–3. October 2020, zdalnie, współorganizator.

- *Models involving fractional differential equations and their analysis* - sympozjum w ramach konferencji ICIAM 2019, Walencja, współorganizator.

3. **Udział w projektach badawczych**

- *Równania ośrodków ciągłych: własności i struktura rozwiązań*, grant MNiSW nr 1 P03A 021 30, 2006-2009, wykonawca.
- *Dyfuzja anizotropowa w ewolucji powierzchni swobodnych*, grant NCN 2011/01/B/ST1/01197, 2011-2014, wykonawca.
- *Nonlocal problems of interface evolution*, 2017-2023, grant NCN 2017/26/M/ST1/00700, wykonawca.

4. **Wyjazdy w ramach współpracy naukowej**

- University of Pittsburgh, na zaproszenie prof. Giovanni Galdi,15.01.2014-15.02.2014.
- Charles University w Pradze, na zaproszenie prof. Milana Pokorný, 22-29.09.2014.
- University of Pittsburgh, na zaproszenie prof. Giovanni Galdi,15.07.2014-14.08.2014.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 6-28.05.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 17.07.2016-11.08.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 11.09.2016-1.10.2016.
- University of Tokyo, w ramach projektu IRSES-FLUX, na zaproszenie prof. Yoshikazu Giga, 23.11.2016-3.12.2016.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 22.02.2017-4.03.2017.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 1.04.2017-12.04.2017.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 19.02.2018-8.03.2018.
- University of Tokyo, na zaproszenie prof. Masahiro Yamamoto, 30.05.2018-14.06.2018.

5. **Wykaz recenzowanych prac naukowych**

przed uzyskaniem stopnia doktora:

- A. Kubica, *The regulatity of weak and very weak solutions of the Poisson equation on polygonal domain with mixed boundary conditions (part I)*, Appl. Math. (Warsaw) 31 (2004), no. 1, 443-456.
- A. Kubica, *The regulatity of weak and very weak solutions of the Poisson equation on polygonal domain with mixed boundary conditions (part II)*, Appl. Math. (Warsaw) 32 (2005), no. 1, 17-36.
- A. Kubica, W.M. Zajączkowski, *Parabolic system in weighted Sobolev space*, Appl. Math. 34 (2007), 169-191.
- A. Kubica, W.M. Zajączkowski, *A priori estimates in weighted space for solutions of the Poisson and heat equations*, Appl. Math. (Warsaw) 34 (2007), 431-444.
- A. Kubica, *The Dirichlet problem in weighted spaces on a dihedral domain*, Banach Center Publ. 86 (2009), 207-222.

po uzyskaniu stopnia doktora:

- A. Kubica, M. Pokorny, W.M. Zajączkowski, *Remarks on regularity criteria for axially symmetric weak solutions to the Navier-Stokes equations*, Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012), no 3, 360-371.
- A. Kubica, P. Rybka, *Fine singularity analysis of solutions to Laplace equation*, Math. Methods Appl. Sci. 38 (2015), no. 9, 1734–1745.
- A. Kubica, *A regularity criterion for positive part of radial component in the case of axially symmetric Navier-Stokes equations*, Dem. Math. vol. 48(1), (2015).
- A. Kubica, P. Rybka, *Fine singularity analysis of solutions to Laplace equation: Berg's effect*, Math. Methods Appl. Sci. 39 (2016), no. 5, 1069–1075.
- A. Kubica, P. Rybka, K. *Ryszewska, Weak solutions of fractional differential equations in non cylindrical domain*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 36 (2017), 154-182.
- A. Kubica, M. Yamamoto, *Initial-boundary value problems for fractional diffusion equations with time-dependent coeffcients*, Fractional Calculus and Applied Analysis, Volume 21, Issue 2 (2018), pp. 276–311.
- A. Kubica, K. Ryszewska, *Fractional diffusion equation with the distributed order Caputo derivative*, J. Integral Equations Applications, Volume 31, Number 2 (2019), 195-243.
- A. Kubica, K. Ryszewska, *Decay of solutions to parabolic-type problem with distributed order Caputo time derivative*, J. Math. Anal. Appl. 465 (2018) 75–99.
- P. Kosewski, A. Kubica, *Local in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence*, Monatsh. Math. 198 (2022), no. 2, 345–369.
- P. Kosewski, A. Kubica, *Global in time solution to Kolmogorov's two-equation model of turbulence with small initial data*, Results Math. 77 (2022), no. 4, Paper No. 163.
- A. Kubica, K. Ryszewska, *A self-similar solution to time-fractional Stefan problem*, Math Meth Appl Sci. 2020; 1–31.
- A. Kubica, K. Ryszewska, M. Yamamoto, *Time-Fractional Differential Equations*, SpringerBriefs in Mathematics, 2020.
- A. Kubica, K. Ryszewska, R. Zacher, *Hölder continuity of weak solutions to evolution equations with distributed order fractional time derivative*, Math. Ann. 390 (2024), no. 2, 2513–2592.

III. **Wskaźniki służące do oceny dorobku naukowego**

- Według bazy Web of Science:
  - liczba cytowań: 312,
  - liczba cytowań bez autocytowań: 299,
  - indeks Hirscha: 7,
  - indeks Hirscha z wykluczeniem autocytowań: 7.

- Według bazy Scopus:
  - liczba cytowań: 336,
  - liczba cytowań bez autocytowań: 322,
  - indeks Hirscha: 8,
  - indeks Hirscha z wykluczeniem autocytowań: 8.

RPW/40107/2025 N
Data:2025-07-24

RADA DOSKONAŁOŚCI NAUKOWEJ

Warszawa, dnia 18 lipca 2025 r.

DRKN.Z6.400.81.2025

Rektor

Politechniki Warszawskiej

Magnificencjo,

Rada Doskonałości Naukowej, działając na podstawie art. 221 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2024 r. poz. 1571), po dokonaniu oceny formalnej wniosku dr. Adama Kubicy o przeprowadzenie postępowania w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego w dziedzinie nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka, wszczętego w dniu 16 lipca 2025 r., przekazuje pełną dokumentację sprawy.

Jednocześnie Rada Doskonałości Naukowej zwraca się z prośbą o przesłanie informacji o podjęciu się tego postępowania albo uchwały, o której mowa w art. 221 ust. 2 wskazanej ustawy, w przypadku podjęcia jej w terminie 4 tygodni od dnia doręczenia przedmiotowego wniosku do podmiotu habilitującego.

Z poważaniem

prof. dr hab. Marian Gorynia
Zastępca Przewodniczącego
Rady Doskonałości Naukowej
/-podpis elektroniczny/

W załączeniu
- Wniosek przewodni
- Dane wnioskodawcy.
- Kopia dokumentu potwierdzającego posiadanie stopnia doktora.
- Autoreferat.
- Wykaz osiągnieć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczy wkład w rozwój określonej dyscypliny.
- Oświadczenia.
- Pendrive.

Do wiadomości:
- dr Adam Kubica

Rada Doskonałości Naukowej
plac Defilad 1 (Pałac Kultury i Nauki, XXIV p.)
00-901 Warszawa

tel. 22/ 656 60 98
fax: 22/ 656 63 28
e-mail: kancelaria@rdn.gov.pl
www.rdn.gov.pl

Klauzula informacyjna dotycząca przetwarzania danych osobowych w Radzie Doskonałości Naukowej dostępna jest na stronie: www.rdn.gov.pl

Potwierdzam zgodność kopii wydruku z dokumentem elektronicznym:

Identyfikator dokumentu	49278.156020.297744
Nazwa dokumentu	[H]_przekazanie_wniosku.pdf
Tytuł dokumentu	[H]_przekazanie_wniosku
Sygnatura dokumentu	DRKN.Z6.400.81.2025
Data dokumentu	18.07.2025
Skrót dokumentu	95EC69BC49A69037DAB62640C85E5336AE238144
Wersja dokumentu	1.3
Data podpisu	18.07.2025 06:35:22
Podpisane przez	Marian Gorynia zastępca przewodniczącego RDN
Rodzaj certyfikatu	Certyfikat kwalifikowany podpisu elektronicznego

EZD 3.128.146.146.

Data wydruku: 21.07.2025

Autor wydruku: Waśko Elżbieta (główny specjalista)