15 stycznia 2024

dr hab. Anna Talarczyk-Noble, prof. UW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Agnieszki Zięby "Infinitesimal Generators of Quadratic Harnesses".

Wstęp

W rozprawie Pani Agnieszka Zięba zajmuje się badaniem generatorów infinitezymalnych tzw. kwadratowych harnesów. Harnesy są procesami stochastycznymi $(X_t)_{t\geq 0}$, dla których warunkowa wartość oczekiwana X_t względem "przyszłości" i "przeszłości" zależy tylko od ostatniej znanej wartości w "przeszłości" i pierwszej znanej w "przyszłości", przy czym zależność ta jest liniowa. Ściślej mówiąc zachodzi

$$\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_{s,u}) = \frac{u-t}{u-s}X_s + \frac{t-s}{u-s}X_u \tag{1}$$

dla dowolnych $0 \leq s < t < u$, gdzie $\mathcal{F}_{s,u} = \sigma(X_r : r \in [0,s] \cup [u,\infty))$. Przykładami harnesów są np. procesy Levy'ego o skończonej wartości oczekiwanej, ale ta klasa jest dużo bogatsza. Węższa, ale również obszerna klasa badana w rozprawie, to harnesy kwadratowe, gdzie oprócz (1) zakłada się także, że drugi moment warunkowy $\mathbb{E}(X_t^2|\mathcal{F}_{s,u})$ dla s, t, u jak wyżej, pisze się jako pewien wielomian drugiego stopnia dwóch zmiennych ewaluowany w (X_s, X_u). Wiadomo, że współczynniki tego wielomianu oraz rozkład kwadratowego harnesu są jednoznacznie opisane przez pięć parametrów, dlatego używa się oznaczenia związanego z tymi parametrami $QH(\eta, \theta, \sigma, \tau, q)$.

Pojęcie harnesów zostało wprowadzone w 1967 roku przez Hammersleya. Harnesy i kwadratowe harnesy były następnie badane przez wielu autorów. W szczególności należy tu wymienić cykl prac Bryca, Wesołowskiego (Promotora obecnej rozprawy), a także Matysiaka z ostatnich 20 lat.

Procesy badane w rozprawie są procesami Markowa (na ogół niejednorodnymi), zatem naturalne jest dla nich badanie generatorów infinitezymalnych, gdyż pozwalają one odczytać wiele własności procesów Markowa, a także, przy odpowiednich warunkach, wyznaczają one operator przejścia.

Zasadniczym zagadnieniem rozprawy jest opis generatorów infinitezymalnych kwadratowych harnesów w możliwie ogólnym przypadku. W pracy bada się tzw. słabe generatory infinitezymalne. Słaby prawy generator infinitezymalny, definiowany jako punktowa granica

$$A_t^+ f(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{P_{t,t+h}f(x) - f(x)}{h}, \qquad x \in E \tag{2}$$

gdzie $P_{t,t+h}$ jest operatorem przejścia procesu Markowa. Analogicznie definiuje się słaby lewy generator infinitezymalny A_t^-. Wiadomo, że w przypadkach rozważanych w rozprawie (w tym przy założeniu istnienia wszystkich momentów) prawy i lewy generator infinitezymalny zgadzają się na wielomianach i używa się wtedy oznaczenia A_t. Wiadomo ponadto (Agoitia -Hurtado), że istnienie granicy punktowej w (2) implikuje istnienie granicy w sensie normy w pewnej przestrzeni Banacha wielomianów.

W tych rozważaniach istotne jest, że kwadratowe harnesy są procesami wielomianowymi - operator przejścia $P_{t,t+h}$ przekształca wielomiany w wielomiany niewiększego stopnia. Pozwala to zastosować podejście algebraiczne do badania operatorów przejścia i generatorów infinitezymalnych pojawiające się już wcześniej w pracach Bryca i Wesołowskiego (np. [24] - odsyłacze zgodnie

A. Talarczyk-Noble

z numeracją w rozprawie). Należy zaznaczyć jednak, że w rozprawie te techniki zostały znacznie rozwinięte. Pojawiają się nowe warunki w terminach ciągów wielomianów ortogonalnych.

Struktura pracy

Rozprawa składa się z 10 rozdziałów oraz dwóch dodatków. W pierwszym rozdziale przedstawione są podstawowe definicje harnesu, harnesu kwadratowego i procesów wielomianowych. Zawiera on też najważniejsze twierdzenie rozprawy - Twierdzenie 1.6.1 opisujące generatory infinitezymalne harnesów kwadratowych dla funkcji będących wielomianami. W rozdziale 2 przeformułowano problem w języku algebraicznym oraz zredukowano go do przypadku $\tau = 0$. Następnie udowodniono twierdzenie dla $\tau = 0$ z innymi założeniami (A1)-(A3). Są to bardzo techniczne założenia sformułowane w języku algebraicznym. W rozdziale 3 uogólniono Twierdzenie 1.6.1 do większej klasy funkcji. W rozdziałach 4-6 wykonano główną techniczną pracę dowodu Twierdzenia 1.6.1 polegającą na wykazaniu, że założenia (A1)-(A3) wynikają z założeń Twierdzenia 1.6.1. W rozdziałach 7-9 używane wcześniej techniki zostały zastosowane w konkretnych przykładach. Ponadto, w rozdziale 9 podano alternatywne podejście algebraiczne do problemu generatora infinitezymalnego harnesów kwadratowych w przypadku $q = 1 - 2\sqrt{\sigma\tau}$. Rozdział 10 zawiera dyskusję wyników. W dodatku A przestawiono elementy teorii wielomianów ortogonalnych używane w pracy. Dodatek B zawiera oznaczenia.

Najważniejsze wyniki i ocena rozprawy

Najważniejszymi wynikami rozprawy są Twierdzenia 1.6.1 oraz 3.3.1. Pierwsze z nich podaje opis generatora infinitezymalnego na wielomianach w przypadku dość ogólnych kwadratowych harnesów. Rozważa się harnesy kwadratowe o skończonych wszystkich momentach, o parametrach spełniających warunek (1.9) w pracy:

$$-1 \leq q \leq 1 - 2\sqrt{\sigma\tau}, \qquad 0 \leq \sigma\tau < 1. \tag{3}$$

W Twierdzeniu 3.3.1 wynik ten został rozszerzony z wielomianów na szerszą klasę funkcji, ale przy dodatkowym założeniu o procesie. Wyniki te w istotny sposób rozszerzają wcześniejsze rezultaty Bryca i Wesołowskiego dla dużo bardziej ograniczonych klas procesów. Autorka w twórczy sposób rozwija metody algebraiczne do badania generatorów kwadratowych harnesów zapoczątkowane przez wspomnianych wyżej matematyków.

W Twierdzeniu 1.6.1 generator infinitezymalny w działaniu na wielomianach jest wyrażony przy pomocy funkcjonału momentowego odpowiadającego pewnemu (słabo) ortogonalnemu ciągowi wielomianów. Ten ciąg wielomianów zależy od parametrów harnesu kwadratowego i jest opisany w sposób rekurencyjny.

Nie będę przytaczać całego twierdzenia, bo jest dość złożone. W prostszym przypadku, gdy dodatkowo $1 + \eta x + \sigma^2 x > 0$ funkcjonał momentowy daje się zapisać w postaci całkowej, a generator infinitezymalny od wielomianu f ma postać

$$A_t f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(x) - f(y)}{y - x} \right) \mu_{x,t}(dy) \tag{4}$$

gdzie $\mu_{x,t}$ zależy też od parametrów harnesu, $\mu_{x,t} = \frac{1+\eta x+\sigma x^2}{2(1+\sigma t)} \nu_{x,t}$ i $\nu_{x,t}$ jest miarą probabilstyczną, względem której wielomiany zadane wzorem rekurencyjnym są słabo ortogonalne.

W Twierdzeniu 3.3.1, w przypadku $q \in [-1, 1 - 2\sqrt{\sigma\tau})$, $1 + \eta x + \sigma^2 x > 0$, rozszerzono Twierdzenie 1.6.1 z wielomianów na funkcje klasy C^2 z ograniczoną drugą pochodną. Zachodzi ten sam wzór (4). To rozszerzenie jest stosunkowo naturalne i w obliczu Twierdzenia 1.6.1 niezbyt trudne, ale dobrze uzupełnia wynik Twierdzenia 1.6.1.

Po zróżniczkowaniu we wzorze (4) widać, że dla tych harnesów kwadratowych, które są procesami Levy'ego wzór (4) jest odpowiednikiem standardowego wzoru na generator infinitezymalny procesów Levy'ego (dla odpowiednich funkcji f). Wtedy $\mu_{x,t}$ nie zależy od t oraz można ją łatwo wyrazić przy pomocy x, współczynnika dyfuzji oraz miary skoków (miary Levy'ego) procesu.

A. Dałbrowska-Noble

Twierdzenia 1.6.1 i 3.3.1 pokazują, że dla dość ogólnych harnesów kwadratowych postać jest podobna, ale z pewną bardziej skomplikowaną miarą $\mu_{x,t}$. Podana jest charakteryzacja tej miary, jako miary ortogonalizującej konkretny ciąg wielomianów, zależny od parametrów harnesu kwadratowego.

Z jednej strony wynik w terminach wielomianów wygląda na dość skomplikowany i na pierwszy rzut oka trudno jest z niego odczytać miarę $\mu_{x,t}$ czy, w ogólniejszym przypadku, funkcjonał momentowy patrząc na rekurencję wielomianową nawet w dobrze znanych przypadkach. Autorka podaje przykład, jak odtworzyć przypadek procesu Wienera, a w kolejnych rozdziałach stosuje swój wynik również w innych znanych przypadkach. Jednak niewątpliwą zaletą tego podejścia jest to, iż otrzymany wynik jest bardzo ogólny, a mimo skomplikowania, wszystkie wielkości są dane explicite, współczynniki we wzorach rekurencyjnych opisujących wielomiany dane są w sposób jawny w zależności od parametrów procesu, jest też jasne, jak wyliczać funkcjonał momentowy.

Ogólny schemat dowodu wykorzystuje podejście algebraiczne z pracy Bryca i Wesołowskiego [24], który (w skrócie) wygląda następująco: Wykorzystując fakt, że rozważane procesy są procesami wielomianowymi tłumaczy się problem na język algebraiczny. Rozważa się algebrę $\mathcal{Q}$ nieskończonych ciągów wielomianów. Szuka się elementu będącego ciągiem złożonym z A_t w działaniu na kolejne jednomiany o coraz wyższych stopniach: $\mathbb{A}_t = (A_t(1), A_t(x), A_t(x^2), \ldots)$. W tym celu wystarczy znaleźć tzw. pregenerator $\mathbb{H}_t = \mathbb{A}_t\mathbb{F} - \mathbb{F}\mathbb{A}_t$, gdzie $\mathbb{F} = (x, x^2, x^3, \ldots)$. Element $\mathbb{H}_t$ przestrzeni $\mathbb{Q}$ spełnia pewne czysto algebraiczne równanie, nazywane równaniem q-komutacyjnym (patrz (2.11) – (2.12) w pracy), ze współczynnikami zależnymi od parametrów harnesu. Ponadto, przy słabych założeniach rozwiązanie jest jednoznaczne. Można więc szukać najpierw rozwiązania równania q-komutacyjnego, a następnie z $\mathbb{H}_t$ odtworzyć $\mathbb{A}_t$. Ten schemat jest opisany w rozdziale 2 pracy.

Należy jednak zaznaczyć, że ten ogólny schemat jest dopiero początkiem pracy, bo zasadnicza trudność polega na rozwiązaniu równania q-komutacyjnego. Wcześniejsze wyniki dotyczyły bardzo specyficznych procesów: wolnych kwadratowych harnesów oraz kwantowego procesu Bessela. Ponadto, w pracy [44] (preprint dostępny w arxiv) Agnieszka Zięba wraz z Jackiem Wesołowskim przedstawili rozwiązanie w przypadku harnesów kwadratowych z parametrem $\sigma = 0$. Wynik zaprezentowany w rozprawie idzie dużo dalej.

W rozdziale 2, stosując dość pomysłową zamianę czasu, wykonano redukcję przypadku ogólnych $QH(\eta, \theta; \sigma, \tau, q)$ harnesów do sytuacji, gdy $\tau = 0$, a następnie, udowodniono główne Twierdzenie 1.6.1 dla $\sigma\tau = 0$, przy innych, bardzo technicznych założeniach (założenia (A1)-(A3) na str. 39-40), wyrażonych w języku algebry ciągów wielomianów. Najbardziej złożona część dowodu Twierdzenia 1.6.1 polega na sprawdzeniu, że te techniczne założenia wynikają z założenia (3). Temu poświęcone są rozdziały 4-6 rozprawy.

Dowód tego twierdzenia wygląda naprawdę imponująco. Jest bardzo złożony, składający się z wielu kroków. Przestrzeń ciągów wielomianów $\mathcal{Q}$ rozbito na odpowiednie podprzestrzenie $\mathcal{Q}_k$. Zidentyfikowano najważniejsze elementy tych przestrzeni z punktu widzenia twierdzenia, ich własności i związki je wiążące. W pracy jest wiele zadziwiających i zaskakujących tożsamości. Wymyślenie tych tożsamości i poskładanie wszystkiego w całość wymagało z całą pewnością ogromnej pomysłowości, a także sprawności technicznej. Już nawet samo prześledzenie tego dowodu wymaga sporego wysiłku, mimo iż każdy z pojedynczych kroków na które rozbito dowód jest nietrudny. Pomimo dużego skomplikowania tego dowodu, Doktorantka stara się maksymalnie ułatwić czytelnikowi zadanie, rozbijając dowód na poszczególne, czytelne kroki. Argumentacja zawiera wystarczającą ilość szczegółów, z dużą troską o czytelnika zapewnione są odsyłacze do wcześniejszych wzorów.

Brakowało mi trochę przedstawienia idei idei stojącej za dowodem wynikania założeń (A1)-(A3) z założeń Twierdzenia 1.6.1. Po dość długich, złożonych rachunkach na koniec wszystko się składa w niemal magiczny sposób. Z całą pewnością Autorka doskonale zrozumiała jak własności kwadratowych harnesów przeformułować w sposób algebraiczny i dlatego była w stanie dowód przeprowadzić. Rozumiem jednak, że bardziej intuicyjne przedstawienie idei dowodu byłoby

A. Palczewska-Noble

bardzo trudnym, jeśli nie karkołomnym zadaniem. Zaznaczam jednocześnie, że kroki dowodowe są przeprowadzone jasny do prześledzenia sposób.

W rozdziałach 7-9 używane wcześniej techniki zostały zastosowane w konkretnych przykładach: wolnych kwadratowych harnesów, harnesów kwadratowych z parametrem $q = -1$ (w tym procesu bi-Poissona), a także w sytuacji $q = 1 - 2\sqrt{\sigma\tau}$.

W tym ostatnim przypadku, w rozdziale 9, podano alternatywne podejście algebraiczne do problemu generatora infinitezymalnego harnesów kwadratowych. Bardziej bezpośrednio rozwiązuje się równanie q-komutacyjne (2.11)-(2.12) używając funkcji cotangens i jej rozwinięcia. Jest to bardzo pomysłowe podejście. Nie korzysta się tu z rekurencji wielomianowej i miary ortogonalizującej te wielomiany, ale bezpośrednio rozwiązuje się równanie q-komutacyjne. Z tego względu metoda ta jest prostsza, ale z drugiej strony mniej ogólna.

Praca jest napisana bardzo starannie, niemal brak jest literówek. Rozumowania przedstawione są w sposób jasny i klarowny, zapewnione są odsyłacze do wcześniejszych wzorów. Znalazłam tylko bardzo niewielkie niedociągnięcia. Np. aby zachodził wzór (1.3) - dotyczący istnienia granic prawie na pewno w zerze i w nieskończoności, należy wziąć modyfikację càdlàg procesu (która oczywiście istnieje), podczas gdy w definicji harnesu, podanej w pracy, nie zakłada się regularności trajektorii.

Wyniki uzyskane w rozprawie pozostawiają pole do dalszych badań. Chciałoby się dostać np. bardziej jawny wzór na znormalizowany funkcjonał momentowy czy też miarę ortogonalizującą wielomiany w terminach parametrów harnesu. Daje się powiedzieć coś więcej w przypadku konkretnych procesów, jednak ogólna postać nadal wygląda dość tajemniczo. Być może można liczyć na to, że przyszłości uda się uzyskać np. lepszy opis miar $\mu_{x,t}$ we wzorze (4) m.in. korzystając z wyników niniejszej pracy i dokładniej przyglądając się wielomianom, które miara ma ortogonalizować.

Publikacje

Mgr Agnieszka Zięba jest współautorką jednego opublikowanego artykułu: "Flows in near algebras with applications to harnesses", wspólnego z W. Brycem i J. Wesołowskim, Colloquium Mathematicum, 170 (2022), no. 2, 211–238.

W repozytorium Arxiv widoczna jest też praca w formie preprintu: "Infinitesimal generators for a family of polynomial processes – an algebraic approach" wspólna z J. Wesołowskim (21 stron). Wiąże się ona ściśle z przedstawioną rozprawą i dotyczy przypadku $\sigma = 0$. Z informacji uzyskanych bezpośrednio od Promotora wynika, że Pani Zięba miała znaczący wkład w tę wspólną pracę, pierwotna wersja dowodu w przypadku $\sigma = 0$ należała do Doktorantki, w tym odgadnięcie i udowodnienie dwóch ważnych identyczności. Swój udział prof. Wesołowski ocenił na 30%.

Należy jednak zaznaczyć, że rozprawa doktorska zawiera znacznie ogólniejsze wyniki oraz nowe pomysły, jest też dużo bardziej złożona. Mają one być podstawą samodzielnej publikacji Doktorantki.

Konkluzja

Przedstawiona do oceny rozprawa dotyczy trudnych zagadnień. Zawiera dalece nietrywialne wyniki, opisujące postać generatora infinitezymalnego dużej klasy harnesów kwadratowych. Znacznie rozszerzają one dotychczasowe rezultaty. Doktorantka wykazała się bardzo dobrym zrozumieniem tematyki i niesamowitą biegłością techniczną, używając technik algebraicznych do rozwiązania problemu dotyczącego procesów stochastycznych. Na uwagę zasługuje fakt, że Autorka poradziła sobie ze znacznym skomplikowaniem problemu, wykazując się przy tym dużą samodzielnością.

A. Talay - M66

Uważam, że rozprawa spełnia wszystkie wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim dlatego wnoszę o dopuszczenie do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Wnoszę także o wyróżnienie rozprawy.

Anna Talarczyk - Noble