Uniwersytet im. A. Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
http://www.wmi.amu.edu.pl/

Zakład Matematyki Dyskretnej
prof. UAM dr. hab. Katarzyna
Rybarczyk-Krzywdzińska
Telefon: (61) 829 5398
kryba@amu.edu.pl

Poznań, 05 lutego 2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Pani mgr Karoliny Okrasy pt. Graph Homomorphisms: From Structure to Algorithms

Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Omawiana rozprawa skupia się na problematyce złożoności obliczeniowej problemów homomorfizmu grafów. Dla ustalonego grafu H problem homomorfizmu $\textsc{Hom}(H)$ dotyczy pytania, jaką złożoność mają algorytmy, które określają czy istnieje homomorfizm z wejściowego grafu G do H. W wersji listowej $\textsc{LHom}(H)$ dodajemy jeszcze warunek, że homomorfizm może odwzorowywać wierzchołki grafu G tylko na niektóre z wierzchołków grafu H. Klasyczne już wyniki określają dokładnie w jakich przypadkach (dla jakich grafów H) ten problem jest NP–zupełny. Odpowiedź jest znana zarówno dla wersji klasycznej jak i listowej problemu. Autorka rozprawy skupia się na tych grafach H, dla których problem jest NP–zupełny i idzie o krok dalej. Podąża za nurtami badań mającymi na celu określenie konkretniej złożoności obliczeniowej problemów NP–zupełnych w kontekście nie tylko hipotezy *P vs NP*, ale bardziej szczegółowych hipotez ETH (*ang. Exponential Time Hypothesis*) i SETH (*ang. Strong Exponential Time Hypothesis*). Szczegółowym celem rozprawy jest określenie, jak pewne własności grafowe grafu G wpływają na złożoność obliczeniową problemów $\textsc{Hom}(H)$ i $\textsc{LHom}(H)$. A dokładnie rzecz biorąc w pracy podjęto się określenie złożoności obliczeniowej znanych problemów z klasy NP–zupełnych ($\textsc{Hom}(H)$ i $\textsc{LHom}(H)$) dla klas grafów G spełniających pewne naturalne założenia jak: określona szerokość drzewiasta, określona szerokość klikowa, czy pewne konkretne zabronione podgrafy.

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 211 stron, składa się ze streszczenia, jednego rozdziału wstępnego, sześciu rozdziałów przedstawiających wyniki rozprawy, jednego rozdziału dotyczącego powiązanych wyników oraz bibliografii, która obejmuje 116 pozycji.

W pierwszym, wstępnym rozdziale autorka bardzo obszernie przedstawia historię badań w zakresie rozpatrywanych przez nią problemów. W prawie wszystkich omawianych w rozdziale wstępnym zagadnieniach, nawiązuje do problemu kolorowania i jego związku z problemem homomorfizmu. Najpierw ogólnie opisuje wyniki dotyczące tego pierwszego. Następnie przystępuje do opisu szczegółowego wyników dotyczących homomorfizmów $\textsc{Hom}(H)$ i homomorfizmów listowych $\textsc{LHom}(H)$, nie zapominając o kontekście związanym z problemem kolorowania. Omawia zarówno te rezultaty mieszczące się w zakresie badań dotyczących hipotezy P vs NP, jak i te podejmujące już bardziej dogłębną analizę złożoności obliczeniowej problemów w kontekście hipotez ETH (*ang. Exponential Time Hypothesis*) i SETH (*ang. Strong Exponential Time Hypothesis*). Wspomina także swoje wcześniejsze, nie ujęte w pracy, badania prowadzone w tej tematyce. Przedstawia bardzo dokładnie motywację za podjęciem się konkretnych problemów omówionych w pracy. W ostatniej części rozdziału opisane są publikacje, które są bazą pracy, główne tezy prezentowane w rozprawie oraz struktura rozprawy.

Podsumowując, rozdział ten jest bardzo obszernym i wyczerpującym wprowadzeniem w zagadnienia rozważane w rozprawie. Autorka wykazała się bardzo szeroką wiedzą i dogłębną znajomością literatury tematu. Rozdział też zawiera wiele argumentów za tym, że rozważane w rozprawie problemy mają naturalną motywację we wcześniejszych pracach szerokiego grona badaczy oraz niewątpliwie wpisują się w główne nurty badań w podjętej tematyce.

W drugim rozdziale przedstawiono podstawowe, klasyczne definicje, które są niezbędne do zrozumienia dalszej części rozprawy.

Rozdział trzeci ma za zadanie wprowadzić pojęcia i podstawowe własności grafowe, które będą potrzebne do analizy problemu homomorfizmu. Na przykład przedstawiono tematykę dekompozycji grafów na czynniki pierwsze i szeroką gamę związanych z nimi definicji i własności. W rozdziale nie ograniczono się do przedstawienia definicji. Są też omówione pewne obserwacje i twierdzenia, które będą potrzebne w dalszej części rozprawy.

Należy podkreślić, że wszystkie rozdziały wprowadzające (drugi, trzeci i kolejny omówiony później piąty) są bardzo dobrze napisane. Po kolei, precyzyjnie, z odpowiednio ilustrującymi przykładami, zaznajamiają czytelnika zarówno z podstawowymi definicjami dotyczącymi problematyki w ogóle, jak i tymi, które zostały określenie specjalnie na potrzeby uzyskania wyników.

Rozdział czwarty jest poświęcony złożoności problemu $\textsc{Hom}(H)$ w kontekście szerokości klikowej grafu. W pierwszej części skupia się na przedstawieniu algorytmu, który dla dowolnego grafu H oraz dla dowolnego G o zadanej szerokości klikowej t i zadanej dekompozycji tego grafu z parametrem t określa, czy istnieje homomorfizm z G do H. Innymi słowy pierwsza część jest poświęcona górnemu oszacowanie na złożoność obliczeniową problemu $\textsc{Hom}(H)$ dla grafu G z zadaną szerokością klikową. Dla zadanego grafu G z określoną jego t–dekompozycją (związaną z jego szerokością klikową t) definiujemy rodzinę funkcji P_τ dla elementów τ (grafów pośrednich G_τ) z dekompozycji. Funkcje P_τ są ściśle związane z pewnymi homomorfizmami z G_τ (grafu dekompozycji) do H. Główna idea algorytmu opiera się na kontrolowaniu za pomocą funkcji P_τ możliwych obrazów (w H) sąsiadów wierzchołków, dla których w momencie τ (konstrukcji grafu G na bazie t-dekompozycji), jeszcze nie znamy całego sąsiedztwa. W tym celu zdefiniowane zostały tak zwane *signature sets* podzbiorów wierzchołków jak i *signature number* grafu. Dla zadanej funkcji P_τ analiza wydaje się naturalna. Jednak w mojej opinii najistotniejsze, najbardziej kreatywne i bardzo wartościowe w rozwiązaniu problemu było określenie, że to *signature number* grafu H decyduje o złożoności problemu $\text{Hom}(H)$ w przypadku zadanej t-dekompozycji oraz ujęcie formalnie intuicji za tym się kryjącej w postaci P_τ. Omówiono także konsekwencje wyniku w kontekście rozkładu kory grafu H na czynniki pierwsze. W drugiej części rozdziału czwartego skupiono się na dowodzie ograniczenia dolnego na złożoność obliczeniową problemu, przy założeniu SETH. Wykorzystano w tej części znane wyniki M. Lapisa dotyczący złożoności obliczeniowej pewnego wariantu *constraint satisfaction problem*. Aby było to możliwe, sprowadzono problem $\text{Hom}(H)$ do pewnego mu równoważnego oraz wykorzystano jako narzędzie *constructable sets* opisane w rozdziale 3. Jak w poprzedniej części rozdziału autorka wykazała się tutaj zarówno wiedzą jak i bardzo dużą kreatywnością, ale przede wszystkim głębokim zrozumieniem istoty problemu.

Rozdziały 5 i 6 są poświęcone problemowi $\text{LHom}(H)$ w kontekście szerokości drzewiastej grafu H. Jest to najbardziej obszerny fragment pracy nie bez powodu. Aby można było rozważać wersję listową trzeba było się zmierzyć ze stworzeniem nowej konstrukcji rozkładu grafu na elementy „bazowe". W kontekście $\text{Hom}(H)$ takie rozkłady były znane wcześniej i zostały opisane w rozdziale 3. Natomiast w tym przypadku należało zbudować całą konstrukcję od początku. Dekompozycje są bardzo techniczne i niestety nie tak naturalne jak to było w przypadku rozkładu na czynniki pierwsze, ale wynika to z charakteru problemu. Główny wniosek z tych rozważań został ujęty w twierdzeniu 6.1.6. W dalszej części zostały przedstawione dowody na ograniczenie górne i dolne złożoności obliczeniowej. Jak w poprzednim przypadku o złożoności problemu decydował *signature number* $s(H)$, tak tutaj kluczowy jest specjalnie zdefiniowany parametr $i^*(H)$ grafu H. Jego znaczenie wynika naturalnie z analizy problemu. Wykorzystując zbudowane już konstrukcje, dowód ograniczenia górnego nie stanowił bardzo dużego wyzwania. Natomiast duża część dowodu jest poświęcona ograniczeniu dolnemu. Głównym technicznym problemem do pokonania w tej części pracy było stworzenie odpowiednich *list gadgets* potrzebnych do redukcji rozważanego problemu do problemu kolorowania. W mojej opinii te dwa rozdziały pracy są najciekawsze (co oczywiście nie umniejsza znaczenia pozostałych wyników prezentowanych w rozprawie), gdyż stwarzają narzędzie dekompozycji grafu, które potencjalnie może być wykorzystane w dalszych badaniach innych, pokrewnych problemów.

Przedostatni rozdział skupia się na problemie LHom(H) dla instancji grafów z pewnymi zakazanymi podgrafami. A mianowicie skupiono się na przypadkach, gdy LHom(H) dla tych grafów G jest NP–trudny. W rozprawie rozważano instancje bez ścieżek oraz grafy bez szponów z krawędziami podzielonymi na ścieżki. Jak w poprzednich rozdziałach tak i w tym problemie, autorka musiała wykazać się wiedzą i dużymi wprawą w zakresie dowodzenia. Już wcześniej przedstawione wyniki z powodzeniem świadczą od umiejętnościach autorki, jej wiedzy i technicznej biegłości. Rozdział 7 jednak jest ciekawym przykładem w jaki sposób stworzone w poprzednich rozdziałach narzędzia mogą być wykorzystane w innych pokrewnych problemach. Wyniki w nim przedstawione są świetnym argumentem za tym, że technicznie zaawansowana maszyneria stworzona w poprzednich rozdziałach, ma potencjał być wykorzystywaną w innych problemach oraz podkreśla znaczenie poprzednich wyników.

W ostatnim rozdziale krótko omówione są wyniki powiązane z tymi prezentowanymi w rozprawie. Podobnie jak rozdział wstępny, ten rozdział świadczy zarówno o bardzo dobrym obeznaniu autorki z tematyką, jak i o aktualności i istotności podjętych w rozprawie zagadnień.

Większość przedstawionych w rozprawie wyników zostało już opublikowanych:

> R. Ganian, T. Hamm, V. Korchemna, K. Okrasa, K. Simonov. The Fine-Grained Complexity of Graph Homomorphism Parameterized by Clique-Width, *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, ICALP 2022, volume 229 of LIPIcs*, pages 66:1-66:20;
>
> K. Okrasa, M. Piecyk, P. Rzążewski. Full Complexity Classification of the List Homomorphism Problem for Bounded-Treewidth Graphs. {it 28th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2020, volume 173 of LIPIcs,} pages 74:1-74:24;
>
> K. Okrasa, P. Rzążewski. Complexity of the List Homomorphism Problem in Hereditary Graph Classes. {88th Intentional Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2021, volume 187 of LIPIcs}, pages 54:1-54:17.

a także pewne fragmenty w

> K. Okrasa, P. Rzążewski. Fine-Grained Complexity of the Graph Homomorphism Problem for Bounded-Treewidth Graphs, *SIAM J. Comput.*, 50(2):487-508, 2021.

Prezentowane publikacje świadczą o wadze i aktualności uzyskanych rezultatów.

Rozprawa nie budzi dużych zastrzeżeń od strony edytorskiej. Praktycznie rzecz biorąc znajdują się w niej tylko nieliczne małe uchybienia, literówki, co przy tak niezmiernie obszernym opracowaniu jest nieuniknione.
Poniżej przedstawiam kilka zauważonych małych uchybień.

- W kontekście szerokości klikowej stosowane są w co najmniej dwóch miejscach wymiennie k i t, (str. 27_1, str. 45 linie 1 i 16).
- Str. 29^{17-19} oznaczenie „$\simeq$” nie zostało wcześniej wprowadzone.
- Str. 31_2 verticess $\rightarrow$ verticess.
- Str. 50_9 properties graph $\rightarrow$ properties of graph
- Str. 51_{8-9} „wklejony” fragment zdania z innej części tekstu.
- Str. 109^5 Section 3.1.2 $\rightarrow$ Section 3.2.1.

Oczywiście wszystkie te niedociągnięcia nie są istotne i nie wpływają one na zrozumienie pracy. Chciałabym więc podkreślić, że wspomniane wyżej zastrzeżenia nie mają wpływu na moją bardzo wysoką ocenę rozprawy.

Reasumując, rozprawa doktorska mgr Karoliny Okrasy zawiera oryginalne i nietrywialne wyniki, które stanowią oryginalne rozwiązanie kilku istotnych problemów naukowych. Rozprawa jest niezmiernie obszerna i gdyby ograniczyć się tylko do części z prezentowanych wyników, w mojej opinii byłyby one już podstawą do nadania stopnia doktora. Badania przedstawione w rozprawie dotyczą problemów uznanych w swojej dziedzinie, są naturalnie zmotywowane i wpisują się w aktualne nurty rozwoju badań. Wyniki są współautorskie a ich wersje są już opublikowane w materiałach konferencyjnych uznanych konferencji. Warto podkreślić, że jedna z prac jest współautorska w szerszym gronie współpracowników, bez udziału żadnego z promotorów, co dowodzi umiejętności współpracy i dojrzałości naukowej autorki. Oceniając całość pracy należy zauważyć, że uzyskanie zaprezentowanych rezultatów wymagało bardzo solidnego warsztatu naukowego oraz ogromnej wiedzy poprzedzonej głęboką analizą wcześniej rozpatrywanych pokrewnych problemów. Autorka wykazała się dużą znajomością literatury i wcześniej prowadzonych badań w podjętej tematyce. Metody dowodowe z jednej strony, patrząc na główną metodykę postępowania, są klasyczne dla dziedziny. Jednakże spoglądając na nie dokładniej widać, że wymagały dużo więcej niż tylko prostego dostosowania do rozpatrywanych problemów. Zaowocowało to stworzeniem nowych narzędzi i technik, które mogą być potencjalnie wykorzystane w rozwiązaniach innych problemów. Podsumowując, dowody są innowacyjne, nietrywialne i wymagały bardzo ogromnej dozy pomysłowości i bardzo głębokiego zrozumienia rozpatrywanych zagadnień. Uzyskane wyniki są niebanalne i świetnie wpisują się w aktualne nurty badań. Przeprowadzone rozumowania dowodzą biegłości autorki w wykorzystaniu i tworzeniu różnorodnych, zaawansowanych metod, a także szerokiej wiedzy, wnikliwości, spostrzegawczości i pomysłowości.

Wszystkie te powyżej wspomniane cechy prezentowanej rozprawy świadczą o tym, że rozprawa doktorska mgr Karoliny Okrasy spełnia z naddatkiem warunki stawiane rozprawom doktorskim i w mojej opinii zasługuje ona na wyróżnienie.

Podsumowanie

Uważam, że złożona rozprawa doktorska mgr Karoliny Okrasy niewątpliwie spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie rozprawy doktorskiej mgr Karoliny Okrasy do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Mając na uwadze wysoki poziom rozprawy wnioskuję także o jej wyróżnienie.

K. Rybarczyk-Krzywdzińska

(-) Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska