**dr hab. Bartłomiej Bosek, prof. UJ**
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 31-007 Kraków
E-mail: `bartlomiej.bosek@uj.edu.pl`

Kraków, 4 stycznia 2024 roku

# Recenzja rozprawy doktorskiej Karoliny Okrasy

# pt. *Graph Homomorphisms: From Structure to Algorithms*

Rozprawa doktorska Karoliny Okrasy dotyczy problemu znajdywania homomorfizmu pomiędzy dwoma grafami. Homomorfizmem między grafem $G$ a grafem $H$ nazywamy dowolną funkcje h ze zbioru wierzchołków $V(G)$ w zbiór wierzchołków $V(H)$, taką, która zachowuje relację sąsiedztwa, czyli jeśli $vu \in E(G)$ to $h(v)h(u) \in E(H)$. Dla zadanego grafu $H$ problem decyzyjny polega na tym, że algorytm na wejściu otrzymuje graf $G$, zaś algorytm odpowiada na pytanie, czy istnieje homomorfizm z grafu $G$ w graf $H$. Przy zadanym od góry grafem celu $H$ problem ten oznaczany jest jako $\mathsf{Hom}(H)$. Warto zauważyć, że jeżeli $H$ jest kliką na k wierzchołkach to powyższy problem jest de facto pytaniem, czy graf $G$ jest $k$-kolorowalny. Autorka rozważa także listową wersję powyższego problemu. Różni się on od powyższego tym, że dodatkowo algorytm otrzymuje przypisanie $l : V(G) \to 2^{V(H)}$, które każdemu wierzchołkowi z $G$ przypisuje zbiór dozwolonych wierzchołków z $H$. Oznacza to, że szukany homomorfizm $h : V(G) \to V(H)$ musi spełniać $h(v) \in l(v)$ dla każdego $v \in V(G)$. Problem ten oznaczany jest jako $\mathsf{LHom}(H)$. Problem $\mathsf{LHom}(H)$ jest uogólnieniem $\mathsf{Hom}(H)$ dlatego, że wystarczy na wejściu jako funkcje dopuszczalnych wierzchołków podać zbiór wszystkich wierzchołków $V(H)$ dla każdego wierzchołka z $G$, to znaczy $l(v) := V(H)$ dla każdego $v \in V(G)$.

Najprostsze rozwiązanie brute-force dla problemu $\mathsf{Hom}(H)$ daje algorytm o złożoności $|V(H)|^{|V(G)|}\mathsf{poly}(|V(G)|)$, gdzie $G$ to graf podany na wejściu algorytmu. Cygan i inni.[1] udowodnili, że przy założeniu hipotezy $\mathsf{ETH}$, powyższe rozwiązanie jest optymalne. Jeżeli na wejściu algorytm otrzymuje graf $G$ z rozkładem drzewiastym poświadczającym szerokość drzewiastą o wielomianowej wielkości względem $|V(G)|$, to za pomocą programowania dynamicznego można znaleźć szukany homomorfizm w czasie $|V(H)|^{tw(G)}\mathsf{poly}(|V(G)|)$, gdzie $tw(G)$ oznacza szerokość drzewiastą grafu $G$. Okrasa i Rzążewski[2] pokazali, że w przypadku, gdy graf

[1] M. Cygan, F.V. Fomin, A. Golovnev, A.S. Kulikov, I. Mihajlin, J. Pachocki, A. Socala. Tight lower bounds on graph embedding problems. *J. ACM*, 64(3):18:1–18:22, 2017.

[2] K. Okrasa and P. Rzążewski. Fine-grained complexity of the graph homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. *SIAM J. Comput.*, 50(2):487–508, 2021.

celu $H$ spełnia warunki bycia tzw. *nietrywialnym (ang.) projective core*;[3] powyższy wynik jest optymalny przy założeniu hipotezy $\mathsf{SETH}$.

Wyniki przedstawione w rozprawie można podzielić na trzy części. Pierwsza dotyczy problemu $\mathsf{Hom}(H)$ przy założeniu, że graf prezentowany na wejściu ma ograniczoną szerokość klikową. Druga dotyczy problemu $\mathsf{LHom}(H)$ przy założeniu, że graf prezentowany na wejściu ma ograniczoną szerokość drzewowa. Ostatnia część skupia się na problemie $\mathsf{LHom}(H)$ przy założeniu, że graf prezentowany na wejściu nie posiada zabronionej podstruktury.

W pierwszej części autorka skupia się na problemie $\mathsf{Hom}(H)$ przy założeniu, że graf prezentowany na wejściu ma ograniczoną szerokość klikową. Autorka rozwiązała powyższy problem (Twierdzenie 1.3.2) przy założeniu, że graf celu $H$ spełnia warunki bycia tzw. nietrywialnym *(ang.) projective core*.[3] Zaprezentowała ona algorytm (Twierdzenie 1.3.2.(a)), który na wejściu otrzymuje graf $G$ wraz z wyrażeniem poświadczającym szerokość klikową o wielomianowej wielkości względem $|V(G)|$. Na wyjściu zaś algorytm odpowiada, czy istnieje homomorfizm do z góry zadanego grafu $H$. Czas działania algorytmu to $s(H)^{cw(G)}\mathsf{poly}(|V(G)|)$, gdzie $cw(G)$ oznacza szerokość klikową grafu $G$, zaś $s(H)$ jest pewnym parametrem, który intuicyjnie wyraża liczbę nietrywialnych klas sąsiedztwa podzbiorów wierzchołków w $H$.[4] Autorka rozwiązuje powyższy problem za pomocą programowania dynamicznego, które działa zgodnie ze strukturą drzewa wyrażenia poświadczającego szerokość klikową $G$. W pracy został podany także argument (Twierdzenie 1.3.2.(b)), że w przypadku, gdy graf celu $H$ jest nietrywialnym (ang.) projective core, powyższy wynik jest optymalny przy założeniu hipotezy $\mathsf{SETH}$. Nie mniej jednak okazuje się, że prawie wszystkie grafy spełniają warunek bycia nietrywialnym projective core. Rezultat ten jest bardzo ciekawy i nietrywialny. Świadczyć o tym może także fakt, że został opublikowany na *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2022)*.[5]

W drugiej części pracy autorka skupia się na problemie listowym, czyli $\mathsf{LHom}(H)$. Okazuje się, że w rozumieniu tego problemu istotne jest pojęcie grafów dwu-łukowych,[6] które są definiowane poprzez możliwość specyficznego zaprezentowania za pomocą par łuków na okręgu.[7] Feder i inni.[8] udowodnili, że problem $\mathsf{LHom}(H)$ jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym, jeśli $H$ jest grafem dwu-łukowym, a w przeciwnym razie jest $\mathsf{NP}$-zupełny. Z kolei, autorka w

[3] Definicja grafów projective core jest dość techniczna i potrzebuje wprowadzeniu wielu pojęć. Dokładna definicja została podana w [K. Okrasa and P. Rzążewski. Fine-grained complexity of the graph homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. *SIAM J. Comput.*, 50(2):487–508, 2021.] oraz w podrozdziałach 3.1. i 3.2 omawianego doktoratu.

[4] Dokładną definicję $s(H)$ można znaleźć w Podrozdziale 3.3.

[5] R. Ganian, T. Hamm, V. Korchemna, K. Okrasa, and K. Simonov. The fine-grained complexity of graph homomorphism parameterized by clique-width. In M. Bojanczyk, E. Merelli, and D.P. Woodruff, editors, *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, ICALP 2022, July 4-8, 2022*, Paris, France, volume 229 of *LIPIcs*, pages 66:1–66:20. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.

[6] Nazwa po ang.: *bi-arc*.

[7] Def. za [T. Feder, P. Hell, J. Huang. Bi-Arc Graphs and the Complexity of List Homomorphisms. *J. Graph Theory*, 42(1):61–80, 2003]: *Niech $C$ będzie okręgiem z dwoma określonymi punktami $p$ i $q$ na $C$. Wtedy* dwu-łuk *to uporządkowana para łuków $(N,S)$ takich, że $p \in N \setminus S$ i $q \in S \setminus N$. Graf $H$ jest dwu-łukowy, jeśli istnieje rodzina dwułuków $\{(N_x,S_x) : x \in V(H)\}$ takich, że dla dowolnych (niekoniecznie różnych) $x,y \in V(H)$ mamy, że jeśli $xy \in E(H)$, to $N_x \cap S_y = N_y \cap N_x = \emptyset$, oraz jeśli $xy \notin E(H)$, to $N_x \cap S_y \neq \emptyset$ i $N_y \cap S_x \neq \emptyset$.*

[8] T. Feder, P. Hell, J. Huang. Bi-Arc Graphs and the Complexity of List Homomorphisms. *J. Graph Theory*, 42(1):61–80, 2003.

omawianej rozprawie doktorskiej prezentuje wielomianowy algorytm (Twierdzenie 1.3.3.(a)) rozwiązujący problem $\mathsf{LHom}(H)$ dla $H$ nie będącymi dwu-łukowymi o ile dodatkowo założy się, że grafy na wejściu mają ograniczoną szerokość drzewiastą przez z góry zadaną stałą. Bardziej formalnie zaprezentowany algorytm otrzymuje graf $G$ z rozkładem drzewiastym poświadczającym szerokość drzewiastą o wielomianowej wielkości względem $|V(G)|$ oraz zestaw list $l : V(G) \to 2^{V(H)}$ dozwolonych wierzchołków z $H$. Zaś na wyjściu algorytm odpowiada, czy istnieje homomorfizm $h : V(G) \to V(H)$, taki, że $h(v) \in l(v)$ dla każdego $v \in V(G)$. Przy czym $H$ jest stałym z góry zadanym grafem celu. Czas działania algorytmu to $i^*(H)^{tw(G)}\mathsf{poly}(|V(G)|)$, gdzie $tw(G)$ oznacza szerokość drzewiastą grafu $G$, zaś $i^*(H)$ jest pewnym parametrem, który intuicyjnie wyraża rozmiar największego, nieporównywalnego zbioru wierzchołków grafu $H$.[9] Autorka rozwiązuje powyższy problem za pomocą programowania dynamicznego, które działa zgodnie ze strukturą rozkładu drzewiastego grafu $G$. W pracy został podany także argument (Twierdzenie 1.3.3.(b)) na to, że w przypadku nie dwu-łukowych grafów celu $H$ powyższy wynik jest optymalny przy założeniu hipotezy $\mathsf{SETH}$. Zostaje wciąż otwarty problem w przypadku, gdy $H$ jest dwu-łukowy. Nie mniej jednak okazuje się, że jeżeli wylosujemy duży graf to prawie na pewno nie będzie on dwu-łukowy. To kolejny ciekawy i nietrywialny wynik tej rozprawy doktorskiej. Ponadto, powyższy rezultat został zaprezentowany na *28th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2020)*.[10]

Ostatnia część doktoratu skupia się na problemie znajdywania listowego homomorfizmu, w przypadku, gdy graf wejściowy nie posiada z góry zadanej struktury zabronionej. Mówimy, że graf $G$ jest wolny od grafu $F$ jeśli nie istnieje funkcja różnowartościowa $f : V(F) \to V(G)$, taka, że dla dowolnych $v, w \in V(F)$ zachodzi $vw \in E(F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(v)f(w) \in E(G)$. Pierwszą klasą grafów, na której skupią się autorka, to klasa wolna od grafu $P_t$, gdzie $P_t$ to ścieżka prosta o $t$ wierzchołkach. Autorka udowodniła (Twierdzenie 1.3.4), że problem $\mathsf{LHom}(H)$ jest rozwiązywalny w czasie $n^{O(\log^2 n)}$ dla grafów wejściowych rozmiaru $n$, jeśli graf celu $H$ nie jest grafem tzw. *drapieżnym*,[11] a w przeciwnym razie jest $\mathsf{NP}$-zupełny. Ponadto zostało pokazane (Twierdzenie 1.3.4.(b)), że, przy założeniu hipotezy $\mathsf{ETH}$, w przypadku, gdy $H$ jest grafem drapieżnym, nie można rozwiązać tego problemu w czasie $2^{o(n)}$ na $n$-wierzchołkowych grafach wolnych od $P_t$. Drugą klasą grafów, na której skupia się autorka, jest klasa grafów wolnych od grafu $S_{t,t,t}$, gdzie $S_{t,t,t}$ to trzy proste ścieżki złożone z $t$ krawędzi o wspólnym jednym końcu dla wszystkich trzech ścieżek. Autorka udowodniła następującą dychotomię (Twierdzenie 1.3.5) przy założeniu, że graf celu $H$ jest tzw. *nierozkładalny*.[12] Problem $\mathsf{LHom}(H)$ jest rozwiązywalny w czasie $n^{O(\sqrt{n}\log^2 n)}$ dla grafów wejściowych rozmiaru $n$, jeśli graf celu $H$ nie jest grafem tzw. *bezpiecznym*,[13] a w przeciwnym razie jest $\mathsf{NP}$-zupełny. Ponadto autorka

---

[9] Dokładną definicję $i^*(H)$ można znaleźć w Podrozdziale 5.3.

[10] K. Okrasa, M. Piecyk, and P. Rzążewski. Full complexity classification of the list homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. In F. Grandoni, G. Herman, and P. Sanders, editors, 28th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2020, September 7-9, 2020, Pisa, Italy (Virtual Conference), volume 173 of LIPIcs, pages 74:1–74:24. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020.

[11] Definicja grafów drapieżnych (ang. predacious) jest dość techniczna i potrzebuje wprowadzeniu wielu pojęć. Dokładna definicja została podana w podrozdziale 7.1.

[12] Definicja grafów nierozkładalnych (ang. undecomposable) jest dość techniczna i potrzebuje wprowadzeniu wielu pojęć. Dokładna definicja została podana w podrozdziale 5.2.

[13] Definicja grafów bezpiecznych (ang. safe) jest dość techniczna i potrzebuje wprowadzeniu wielu pojęć. Dokładna definicja została podana w podrozdziale 7.2.

dowodzi (Twierdzenie 1.3.5.(b)), że, przy założeniu hipotezy ETH, w przypadku, gdy $H$ jest nierozkładalny oraz nie jest bezpieczny, nie można rozwiązać tego problemu w czasie $2^{o(n)}$ na $n$-wierzchołkowych grafach wolnych od $S_{t,t,t}$. Z faktu, że Twierdzenie 1.3.5 ma generalne założenie, że graf celu $H$ spełnia warunki bycia tzw. nierozkładalnym, to omawiane Twierdzenie nie jest kompletne. Nie mniej jednak udowodnione Twierdzenie jest bardzo silne, zaś dowód jest bardzo złożony i dalece nietrywialny. Część powyższych rezultatów została zaprezentowana na *38th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2021)*.[14]

Poza drobnymi błędami, takim jak na przykład błąd w definicji grafów dwu-łukowych na stronie 63 oraz drobnymi błędami interpunkcyjnymi, o których pozwolę sobie nie pisać, praca jest zredagowana bardzo dobrze zarówno pod względem stylistycznym jak i graficznym. Omawiana praca wnosi znaczący wkład w dziedzinę teorii grafów. Dowody są bardzo złożone, dalece nietrywialne i wymagały od autorki sporej biegłości w posługiwaniu się teorią grafów jak i teorią złożoności. Można zauważyć, że niektóre z zaprezentowanych wyników nie domyka kompletnie badanych problemów. Jednak jeżeli spojrzy się na poziom złożoności argumentów, które stoją za tymi wynikami, można wywnioskować, że powodem takiego stanu rzeczy jest bardziej trudność atakowanych problemów niż słabość osiągniętych rezultatów. O wartości zaprezentowanych wyników może świadczyć także i to, że zostały zaprezentowane na trzech uznanych międzynarodowych konferencjach z grupy A według klasyfikacji *Conference Portal - Core*.[15] Biorąc pod uwagę powyższe argumenty, nie mam najmniejszej wątpliwości, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o **dopuszczenie** Karoliny Okrasy do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto wnioskuje o **wyróżnienie** omawianego doktoratu. Motywuje to dużą liczbą silnych wyników—rezultaty zostały opublikowane na trzech bardzo dobrych konferencjach. Autorka zajmowała się trudnymi oraz kluczowymi problemami z dziedziny złożoności obliczeniowej w teorii grafów. Dzięki swojej pracy wpisała się w ciąg kluczowych wyników w tej dziedzinie wnosząc zauważalny wkład w rozwój badanej teorii.

B Bosek

Podpisany elektronicznie przez
Bartłomiej Emil Bosek
04.01.2024
1:37:35 +01'00'

Bartłomiej Bosek

[14] K. Okrasa and P. Rzążewski. Complexity of the list homomorphism problem in hereditary graph classes. In M. Bläser and B. Monmege, editors, 38th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2021, March 16-19, 2021, Saarbrücken, Germany (Virtual Conference), volume 187 of LIPIcs, pages 54:1–54:17. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.

[15] `http://portal.core.edu.au/conf-ranks/`