

Streszczenie

Kolorowania geometrycznych grafów przecięć

Praca jest inspirowana czterema intensywnie badanymi problemami: problemem Hadwigera-Nelsona, zagadnienia kolorowania online grafów przecięć przedziałów i grafów przecięć kół oraz hipotezą Δ^2 dla $L(2, 1)$ -etykietowań grafów.

W 1950 roku Nelson zadał pytanie, jaka jest najmniejsza liczba kolorów pozwalająca na pokolorowanie płaszczyzny euklidesowej tak, aby punkty oddalone od siebie o 1 miały różne kolory. Zagadnienie to, znane jako problem Hadwigera-Nelsona, zainspirowało wiele badań w obszarach geometrii, kombinatoryki, topologii i teorii miary. Rozdział 3 poświęcony jest następującemu uogólnieniu problemu Hadwigera-Nelsona. Zajmujemy się minimalizacją liczby kolorów w kolorowaniu grafu $G_{[1, \sigma]}$, którego zbiorem wierzchołków jest \mathbb{R}^2 i punkty leżące w odległości z przedziału $[1, \sigma]$ są połączone krawędziami, dla $\sigma \geq 1$. Rozważamy b -warstwową wersję kolorowania. Nasza metoda kolorowania uogólnia dotychczasowe wyniki i dla wielu wartości σ daje lepsze rezultaty od dotychczasowych. Definiujemy również etykietowania $L^*(2, 1)$ płaszczyzny. Są to kolorowania płaszczyzny z dodatkowymi obostrzeniami, które w dalszej części pracy służą kolorowaniu online grafów przecięć kół. Przedstawiamy konstrukcyjną metodę znajdowania b -warstwowych $L^*(2, 1)$ -etykietowań grafu $G_{[1, \sigma]}$.

Fiala, Fishkin and Fomin [35] użyli etykietowań grafu $G_{[1, \sigma]}$ do etykietowania online grafu przecięć σ -kół, czyli kół o średnicach z przedziału $[1, \sigma]$. Zainspirowani ich pracą, posługujemy się kolorowaniami płaszczyzny w wersji b -warstwowej z rozdziału 3 w celu kolorowania online grafów przecięć kół. Posługujemy się dwoma technikami podziału wierzchołków przed kolorowaniem - pierwsza dzieli wierzchołki według średnic kół, podobnie jak w pracy Erlebacha i Fiali [26], a druga jest autorskim pomysłem podziału między warstwy b -warstwowego kolorowania płaszczyzny. W rozdziale 4 prezentujemy 4 algorytmy kolorowania online grafów przecięć kół oraz innych figur geometrycznych. Dowodzimy również, że przy użyciu $L^*(2, 1)$ -etykietowań płaszczyzny otrzymane kolorowanie jest $L(2, 1)$ -etykietowaniem grafu.

W rozdziale 5 zajmujemy się zagadnieniem kolorowania online grafów przecięć przedziałów o ograniczonych długościach. Kolorowania online grafów przedziałowych były

przedmiotem badań Kiersteada i Trottera [62]. Znaleźli algorytm kolorujący te grafy online z użyciem co najwyżej $3\chi(G) - 2$ kolorów i udowodnili, że każdy algorytm może być zmuszony do użycia tej liczby kolorów. Jednak przy założeniu, że wszystkie przedziały mają długość 1 najlepszym znanym algorytmem jest algorytm zachłanny, który używa co najwyżej $2\chi(G) - 1$ kolorów. Dla przedziałów długości 1 każdy algorytm może być zmuszony do użycia $\frac{3}{2}\chi(G)$ kolorów. Różnica wyników dla przedziałów długości 1 i przedziałów o nieograniczonych długościach skłoniła nas do rozważenia przypadku pośredniego, jakim są przedziały o ograniczonych długościach, co nieco przypomina przypadek σ -kół. Pokazujemy, że jedna z metod kolorowania online kół może być dostosowana do kolorowania online ograniczonych przedziałów, co daje nam najlepsze ze znanych rezultatów dla przedziałów o długościach z $[1, 2]$. Przedstawiamy również dolne ograniczenie na liczbę kolorów dla dowolnego algorytmu kolorowania ograniczonych przedziałów. W szczególności pokazujemy, że każdy algorytm może być zmuszony użyć $\frac{5}{3}\chi(G)$ kolorów dla przedziałów z $[1, \sigma]$, o ile $\sigma > 1$.

Ostatni rozdział poświęcony jest $L(2, 1)$ -etykietowaniu grafów przecięć kół w wersji offline. Hipoteza Δ^2 Griigsa i Yeha [44] mówi, że $L(2, 1)$ -span dowolnego grafu jest ograniczone przez $\Delta(G)^2$. Dowodzimy prawdziwość hipotezy dla grafów przecięć kół o $\Delta(G) \geq 126$, wykazując $\lambda(G) \leq \frac{4}{5}\Delta(G)^2 + 25\Delta(G) + 20$. W przypadku kół o średnicy 1, potwierdzamy hipotezę dla grafów o $\Delta(G) \geq 15$ pokazując $\lambda(G) \leq 14\Delta + 11$.

Słowa kluczowe: problem Hadwiger-Nelsona, kolorowania online, grafy przecięć kół, grafy przedziałowe, $L(2, 1)$ -etykietowanie