POLITECHNIKA WARSZAWSKA

DYSCYPLINA NAUKOWA INŻYNIERIA MECHANICZNA/
/DZIEDZINA NAUK INŻYNIERYJNO-TECHNICZNYCH

Rozprawa doktorska

mgr inż. Jan Stanisław Biniewicz

Optymalizacja trajektorii wyścigowych pojazdów jednośladowych w warunkach ruchu quasi-statycznego

Promotor
prof. dr inż. Mariusz Pyrz

WARSZAWA 2023

Podziękowania

W pierwszej kolejności pragnę podziękować Panu Profesorowi Mariuszowi Pyrzowi za przekazaną na przestrzeni lat wiedzę, opiekę promotorską oraz okazaną życzliwość, a także za wsparcie w trakcie prowadzonych badań, jak również podczas przygotowywania treści niniejszej rozprawy.

Dziękuję również Panu Profesorowi Piotrowi Skawińskiemu za wieloletnią współpracę przy projekcie motocykla wyścigowego, która stała się inspiracją do dalszego zgłębiania zagadnień naukowych związanych z modelowaniem ruchu pojazdów jednośladowych.

Składam również podziękowania całemu zespołowi wyścigowemu Rabin Racing Team, a w szczególności Tomaszowi Rabińskiemu – menedżerowi zespołu oraz Kamilowi Barcikowi – zawodnikowi, za możliwość prowadzenia badań drogowych w trakcie rund wyścigowych oraz udostępnienie motocykli do celów pomiarowych. Dziękuję również Łukaszowi Wieczorkowi z firmy Luka Technic Designs LTD34 za udostępnienie specjalistycznych stanowisk badawczych oraz wsparcie wiedzą w trakcie rejestrowania charakterystyk elementów resorująco-tłumiących.

Specjalne podziękowania składam też na ręce Rodziców, za cierpliwość oraz nieocenione wsparcie w całym procesie edukacji.

Streszczenie

Niniejsza rozprawa doktorska została poświęcona tematyce optymalizacji trajektorii ruchu wyścigowych pojazdów jednośladowych w warunkach ruchu quasi-statycznego. Przedstawia ona opracowany model ruchu motocykla uwzględniający dane eksperymentalne, zawiera propozycję półempirycznej obwiedni diagramu osiągów pojazdu oraz analizę procedury numerycznego odwzorowania przestrzennej geometrii jezdni. Rozważane w pracy problemy optymalizacji sformułowane zostały jako zadania sterowania optymalnego (ZSO), które następnie rozwiązywano za pomocą zewnętrznych procedur optymalizacyjnych (program GPOPS-II) rozszerzających funkcjonalność środowiska MATLAB. W przedstawionych przykładach numerycznych wyznaczono optymalne trajektorie ruchu pojazdów jednośladowych różnych klas wyścigowych poruszających się po zróżnicowanych płaskich oraz przestrzennych torach wyścigowych. Zaproponowano ponadto model drgań, za pomocą którego, na podstawie informacji o przyspieszeniach motocykla (wzdłużnym oraz poprzecznym) oszacowano ugięcia elementów sprężystych w zawieszeniu. Wiele z wyników symulacji numerycznych porównano z danymi zarejestrowanymi eksperymentalnie uzyskując bardzo dobrą zgodność.

W pierwszych rozdziałach rozprawy omówiono aktualny stan wiedzy z zakresu tematyki minimalizacji czasu manewru oraz nierozerwalnie związanego i równoważnego tematu optymalizacji trajektorii ruchu pojazdów. Przedstawiono analityczne podłoże problemu sterowania optymalnego, sformułowano warunki konieczne optymalności, a następnie dokonano przeglądu metod numerycznych dedykowanych rozwiązywaniu zagadnień sterowania optymalnego.

Kolejne rozdziały poświęcono sformułowaniu zadania sterowania czasowo-optymalnego dla ruchu pojazdu jednośladowego po jezdni płaskiej. Zaproponowano nową parametryzację zadania prowadzącą do lepszej zbieżności procedur optymalizacyjnych. Zaprezentowano także nowe podejście, w którym dopuszczalne wartości sterowania ograniczono wyznaczonymi na podstawie danych eksperymentalnych hiperbolicznymi funkcjami zależnymi od prędkości pojazdu. Następnie omówiono wpływ wprowadzonych modyfikacji na otrzymywane numerycznie rezultaty. Jeden z przykładów obliczeniowych poświęcono aspektom praktycznego zastosowania wyników obliczeń w procesie poprawy czasu okrążenia w warunkach ruchu rzeczywistego pojazdu.

W dalszej kolejności poddano analizie proces numerycznego odwzorowania geometrii jezdni poszukując odpowiedniej metody pozyskiwania danych wejściowych do sformułowanego zadania optymalizacji. Zaprezentowano porównanie numerycznych modeli terenu o różnej rozdzielczości. Poruszono także temat pomiarów wysokościowych za pomocą odbiorników sygnału satelitarnego wykorzystywanych w dedykowanych pojazdom jednośladowym pokładowych układach pomiarowych (systemach akwizycji danych). Następnie zaprezentowano proces uogólnienia zadania minimalizacji czasu manewru na przypadek przestrzennego ruchu pojazdu oraz omówiono wpływ trójwymiarowego opisu jezdni na rezultaty obliczeń. Przedstawiono również rozbudowany przykład obliczeniowy, w którym wyniki otrzymane na podstawie modelu numerycznego zestawiono z pomiarami zarejestrowanymi w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu.

Przedostatni rozdział rozprawy poświęcono propozycji modelu drgań o trzech stopniach swobody, za pomocą którego przeprowadzono proces szacowania ugięcia elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu jednośladowego. Działające na modelowany pojazd obciążenia wyznaczono na podstawie przebiegu przyspieszenia pojazdu w kierunku wzdłużnym oraz poprzecznym do trajektorii ruchu. Określone numerycznie ugięcia elementów resorujących porównano następnie z danymi eksperymentalnymi.

W załącznikach do pracy przedstawiono matematyczny opis jezdni jako powierzchni zorientowanej oraz zaprezentowano aplikację stworzoną w celu wsparcia procesu analizy zależności geometrycznych charakteryzujących geometrię pojazdu jednośladowego. Za jej pomocą określono, a następnie omówiono nieliniowe charakterystyki elementów resorująco-tłumiących montowanych w pojazdach jednośladowych.

Rozprawę kończy podsumowanie przeprowadzonych prac oraz otrzymanych rezultatów. Wskazano również możliwe kierunki dalszych prac badawczych.

Słowa kluczowe: sterowanie optymalne, pojazd jednośladowy, diagram g-g, trajektoria ruchu, optymalizacja, zawieszenia pojazdów

Abstract

This work is dedicated to the quasi-steady-state minimum lap time simulation of race motorcycles. It presents a developed quasi-steady-state motorcycle model that incorporates experimental data. The dissertation also includes the presentation of a semi-empirical envelope of the vehicle's performance diagram (g-g diagram) and discusses the process of three-dimensional track reconstruction. Considered optimization problems are formulated as optimal control problems, which are subsequently solved using external MATLAB optimal control software GPOPS-II. In the presented numerical examples, optimal trajectories of various racing motorcycles are determined on diverse two and three-dimensional racetracks. Additionally, three degrees of freedom motorcycle model is proposed for suspensions deflections estimation based on longitudinal and lateral accelerations of the vehicle. Numerical results are later compared with experimentally recorded data, showing very good agreement.

First, a detailed survey about minimum lap time simulation and related trajectory optimization is presented. The analytical background of the optimal control problem is given, and necessary optimality conditions are formulated. A review of numerical methods used to solve optimal control problems is also provided.

The main section is devoted to the time-optimal control problem of race motorcycle on a two-dimensional (flat) road. A new approach is presented in which the allowable values of control variables are limited by hyperbolic functions of vehicle speed which are derived based on experimental data. Then, the impact of the introduced modifications on the obtained results is discussed. One of the numerical examples is devoted to describing the use of the OCP in the process of improving lap time under real driving conditions.

Next, the reconstruction of the three-dimensional road is discussed. The problem analysis is focused on determining an appropriate method for obtaining input data for optimization problem. Digital elevation models in different resolutions are discussed, as well as orthometric height measurement using GNSS receivers which are typically used in onboard data acquisition systems. Then, the OCP is generalized to the three-dimensional problem and the impact of the three-dimensional road model on OCP results is discussed. A detailed computational example is presented in which the OCP is compared with experimental data.

The penultimate chapter is devoted to the derivation of the three degrees of freedom motorcycle model, which is later used for suspensions deflections estimation. The loads

acting on the vehicle are determined based on vehicle's longitudinal and lateral acceleration. The numerically determined suspensions deflections are compared with experimental data.

In the appendices, the analytical description of the road modeled as a ribbon is presented, as well as a self-developed software created to support the process of analyzing motorcycles chassis geometry. The application is used for analyzing nonlinear fork and shock properties, as well as rear suspension linkages.

The thesis concludes with a summary of the conducted work and the obtained results. Possible directions for further research are also formulated.

Keywords: optimal control, motorcycle, diagram g-g, trajectory, vehicle suspensions

Spis treści

Wykaz najważniejszych oznaczeń i symboli

$a_x, \hat{a}_x$	-	przyspieszenie wzdłużne pojazdu
$\tilde{a}_x$	-	przyspieszenie wzdłużne w uogólnionym modelu pojazdu
$a_y, \hat{a}_y$	-	przyspieszenie poprzeczne pojazdu
$\tilde{a}_y$	-	przyspieszenie poprzeczne w uogólnionym modelu pojazdu
b	-	odległość środka ciężkości od punkty styku tylnego koła z jezdnią
$C_d A$	-	iloczyn współczynnika oporu powierza i pola powierzchni czołowej
E_k	-	energia kinetyczna
F_d	-	siła oporu aerodynamicznego
F_l	-	siła nośna
F_w	-	opór toczenia
f_w	-	współczynnik oporu toczenia
F_x, F_y, F_z	-	siły reakcji nawierzchni odpowiednio w kierunku wzdłużnym, poprzecznym oraz normalnym do nawierzchni
g	-	przyspieszenie ziemskie
$\tilde{g}$	-	pozorna grawitacja
$\mathcal{H}$	-	hamiltonian
h	-	wysokość wypadkowego środka ciężkości (pojazdu wraz z kierowcą)
h_p	-	wysokość środka ciśnienia
J	-	moment bezwładności ciała względem osi prostopadłej do płaszczyzny symetrii pojazdu, równoległej do jezdni i przechodzącej przez środek ciężkości ciała
J_{x_d}, J_{x_a}	-	funkcje ograniczające zbiór wartości dopuszczalnych zrywu wzdłużnego
J_y	-	funkcja ograniczająca zbiór wartości dopuszczalnych zrywu poprzecznego
$\mathcal{J}$	-	funkcjonał (wskaźnik jakości)
$j_x, \hat{j}_x$	-	zryw wzdłużny
$j_y, \hat{j}_y$	-	zryw poprzeczny
l_m	-	długość ramy pojazdu
l_s	-	długość wahacza
m	-	całkowita masa pojazdu (motocykla wraz z kierowcą)

n	-	położenie poprzeczne pojazdu względem krzywej szkieletowej jezdni
q	-	współrzędna uogólniona
Q	-	siła uogólniona
$\mathbf{R}$	-	macierz obrotu
R_f, R_r	-	odpowiednio promień przedniej i tylnej opony, oznaczenia wykorzystywane w modelu drgań
r_{df}, r_{dr}	-	odpowiednio promień dynamiczny przedniej oraz tylnej opony
r_w	-	szerokość jezdni
s	-	współrzędna krzywoliniowa
t	-	czas
$\mathbf{U}$	-	zbiór wartości dopuszczalnych sterowania
$\mathbf{u}$	-	wektor sterowania
u_f	-	ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu przedniego koła
V	-	prędkość pojazdu
w	-	rozstaw osi pojazdu
$\mathbf{X}$	-	zbiór wartości dopuszczalnych zmiennych stanu
$\mathbf{x}$	-	wektor zmiennych stanu
$\alpha, \tilde{\alpha}$	-	amplituda (współrzędna w biegunowym układzie współrzędnych)
β_0, β_1	-	współczynniki funkcji ograniczających wartości dopuszczalne zrywów
θ	-	odchylenie (kąt Eulera)
κ	-	krzywizna krzywej
$\boldsymbol{\lambda}$	-	wektor mnożników Lagrange'a
μ	-	pochylenie podłużne jezdni (kąt Eulera)
μ_x	-	współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku wzdłużnym
μ_y	-	współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku poprzecznym
$\rho, \tilde{\rho}$	-	promień wodzący (współrzędna w biegunowym układzie współrzędnych)
ρ_a	-	gęstość powietrza
ρ_{max}	-	hiperpowierzchnia ograniczająca osiągi pojazdu
τ	-	torsja krzywej

ϕ	-	pochylenie poprzeczne jezdni (kąt Eulera)
φ	-	całkowity kąt przechylenia pojazdu jednośladowego
φ_{rs}	-	kąt skręcenia sprężyny kołowej
$\tilde{\varphi}$	-	kąt przechylenia mierzony między płaszczyzną symetrii motocykla a płaszczyzną prostopadłą do nawierzchni przechodzącą przez punkty styku opon z jezdnią
$\chi, \hat{\chi}$	-	odchylenie stycznej do trajektorii ruchu względem stycznej do krzywej szkieletowej
Ω_b	-	krzywizna geodezyjna
Ω_n	-	krzywizna normalna
Ω_t	-	skręcenie geodezyjne
$\boldsymbol{\omega}$	-	prędkość kątowa reperu Darboux
$\widehat{\boldsymbol{\omega}}$	-	prędkość kątowa pojazdu

Skróty:

NLP	-	z ang. *nonlinear programming*, programowanie nieliniowe
NMT	-	numeryczny model terenu
TPS	-	z ang. *Throttle Position Sensor*, wykorzystywany w niniejszej pracy termin do oznaczenia na prezentowanych rysunkach procentowego otwarcia przepustnicy
ZSO	-	zadanie sterowania optymalnego

Uwagi edytorskie

W celu zachowania spójności z oznaczeniami stosowanymi na rysunkach, za separator dziesiętny w treści rozprawy przyjęto kropkę. Ponieważ do opisu osiągów pojazdów wykorzystywano diagramy przyspieszeń g-g, przyspieszenia wyrażano jako wielokrotność przyspieszenia ziemskiego g.

1. Wprowadzenie

Rozpatrując ruch pojazdu kołowego można skupić się na jego różnych aspektach. Można badać stabilność, kierowalność, manewrowalność[1] pojazdu, można również poddać analizie opisujące go zależności kinematyczne, jego dynamikę lub analizować jego ruch jako układu drgającego. Zawężając klasę badanych pojazdów do pojazdów wyścigowych, na pierwszym planie znajdować się będą pytania dotyczące ich ogólnie pojętych osiągów. Pierwsze nasuwające się pytanie dotyczy czasu, w jakim dany pojazd jest w stanie pokonać jedno okrążenie toru wyścigowego lub ogólniej mówiąc, ile czasu potrzebne jest na wykonanie konkretnego manewru. Drugie pytanie, nieodzownie związane z pierwszym, dotyczy sposobu, w jaki dany czas manewru może zostać osiągnięty.

Odpowiedzi na postawione pytania zaczęto poszukiwać w późnych latach 50. XX wieku. Zaczęto wówczas prowadzić analizy, które miały na celu wyznaczenie czasu okrążenia toru wyścigowego bolidem Formuły 1, poznanie profilu jego prędkości oraz identyfikację miejsc na trasie, w których kierowca powinien zacząć hamować lub zmieniać biegi [1].

W latach 70. XX wieku zaprezentowana została koncepcja diagramów przyspieszeń nazwanych wówczas diagramami g-g. Pozwoliły one na zobrazowanie w graficzny sposób obwiedni osiągów pojazdu, czyli dopuszczalnych kombinacji przyspieszeń wzdłużnych oraz poprzecznych. Umożliwiły także analizę wpływu podstawowych charakterystyk pojazdu na jego osiągi. Diagramy g-g znalazły później zastosowanie w zadaniach poszukiwania minimalnego czasu okrążenia.

Minimalnego czasu okrążenia poszukiwano najpierw dla predefiniowanych, narzuconych z góry ścieżek (trajektorii) ruchu. Następnie, ze względu na wzrost mocy obliczeniowej komputerów oraz rozwój metod numerycznych, problem minimalizacji czasu okrążenia sformułowany został jako nieliniowe zadanie sterowania optymalnego (ZSO). Zastosowanie teorii sterowania optymalnego pozwoliło na jednoczesne wyznaczenie minimalnego czasu okrążenia oraz odpowiadającej mu trajektorii ruchu

[1] Stabilność – zdolność pojazdu do powrotu do stanu ruchu ustalonego w określonym czasie po ustaniu zakłócenia; kierowalność – subiektywna ocena kierowcy na temat „łatwości” jazdy danym pojazdem; manewrowalność – cecha pojazdu jako konstrukcji, zdolność pojazdu do szybkiego wykonywania skomplikowanych manewrów.

(trajektorii optymalnej). W ten sposób została uzyskana odpowiedź na dwa postawione na początku rozdziału pytania.

Analizując literaturę przedmiotu zauważyć można znaczącą dysproporcję pomiędzy liczbą badań oraz publikacji poświęconych samochodom (osobowym lub wyścigowym) a motocyklom. Taki stan rzeczy związany jest z przynajmniej kilkoma czynnikami. Pierwszym, naturalnym czynnikiem, jest liczba użytkowników wymienionych pojazdów, nieporównywalnie większa w przypadku samochodów osobowych. Liczba rejestracji nowych motocykli w 2022 roku na pięciu największych rynkach europejskich (Włochy, Niemcy, Francja, Hiszpania i Wielka Brytania) wyniosła 950 400 sztuk [2]. W tym samym okresie łączna liczba rejestracji nowych samochodów osobowych w tych krajach wyniosła 7 924 553 sztuk [3]. W Polsce w 2022 roku zarejestrowanych zostało 23 910 sztuk nowych pojazdów jednośladowych [4], w tym 11 414 motorowerów, zaś w przypadku samochodów, liczba nowych rejestracji wyniosła 419 749 sztuk.

Drugi czynnik wpływający na dysproporcję w liczbie prowadzonych badań związany jest z potrzebami przemysłu motoryzacyjnego, które powodują, że wiele pakietów oprogramowania rozwijanych jest z myślą o branży automotive (na przykład przeznaczonych do modelowania dynamiki układów wieloczłonowych). Rozwój metod modelowania pojazdów oraz metod symulacyjnych jest także w istotny sposób związany z seriami wyścigowymi pojazdów prototypowych. Znaczące różnice budżetów[2] jakimi dysponują zespoły lub producenci konstruujący pojazdy prototypowe wpływają na sposób prowadzenia badań oraz czas ich realizacji.

Trzecim powodem różnic w stanie wiedzy jest skomplikowana kinematyka i dynamika motocykla związana z dodatkowym stopniem swobody – przechyłem. Pewnym utrudnieniem jest również brak stabilnego położenia równowagi. W związku z tym rozwijane pod kątem samochodów oprogramowania mają często ograniczone zastosowanie w przypadku symulowania ruchu pojazdów jednośladowych.

Wymienione aspekty sprawiają, że dziedzinę modelowania ruchu pojazdów jednośladowych charakteryzuje ciągła potrzeba rozwoju modeli numerycznych oraz symulacyjnych.

[2] Roczny budżet zespołów Formuły 1 wynosił w 2022 roku 140 mln euro (limit ustalony odgórnie przez organizatora zawodów), podczas gdy zespoły MotoGP dysponowały maksymalną kwotą około 40 mln euro (źródło: motorcyclesports.net/articles/the-relative-prices-of-a-motogp-bike [dostęp: 03.2023]).

1.1. Motywacja

Niniejszą pracę poświęcono analizie optymalnego ruchu pojazdów jednośladowych w warunkach ruchu quasi-statycznego. Ograniczenie tematyki pracy do pojazdów jednośladowych związane jest z zainteresowaniami autora oraz prowadzonymi wcześniej projektami i pracami badawczymi związanymi z konstruowanym na Wydziale Samochodów i Maszyn Roboczych Politechniki Warszawskiej motocyklem wyścigowym klasy PreMoto3[3] [5].

Podczas pracy z zawodnikami sportu motocyklowego oraz z danymi z pokładowych układów pomiarowych zaobserwowano istotną różnicę w specyfice pracy między jednoczesnym wspomaganiem dwóch kierowców a pracą z wyłącznie jednym kierowcą. Analiza porównawcza danych od obu kierowców pozwalała na niemalże natychmiastową identyfikację problematycznych fragmentów trasy u każdego z nich, co owocowało szybką poprawą czasu okrążenia obydwu zawodników. W przypadku pracy z jednym kierowcą, bez dostępu do dodatkowych danych referencyjnych, proces poprawy czasu okrążenia wymagał znacznie większego wysiłku oraz dogłębnej analizy zgromadzonych danych. Na podstawie tych obserwacji zaczęto się zastanawiać nad możliwością numerycznego wyznaczenia wzorcowego okrążenia referencyjnego.

Pod wpływem wydanej w 2019 roku publikacji [6] zdecydowano się podjąć badania nad optymalnym przemieszczaniem się pojazdu jednośladowego w warunkach ruchu quasi-statycznego, które to warunki umożliwiają zwięzłe sformułowanie problemu sterowania optymalnego oraz rozwiązanie pojedynczego zadania optymalizacji w krótkim czasie. Ponadto, model pojazdu może zostać zbudowany w oparciu o łatwo mierzalne charakterystyki, w czym dostrzeżono potencjał aplikacyjny metody.

Motywacją do napisania ostatniego rozdziału rozprawy, poświęconego analizie ugięć elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu jednośladowego, była chęć uzyskania odpowiedzi na następujące pytania: czy ugięcia elementów resorujących mogą zostać oszacowane na podstawie ograniczonej liczby informacji o ruchu pojazdu oraz czy powyższe oszacowanie będzie wystarczające do wyciągnięcia konstruktywnych wniosków z prowadzonej analizy.

[3] URL: wsrt.pl - strona internetowa projektu motocykla PreMoto3 prowadzonego na SiMR PW [dostęp: 05.23].

1.2. Cel i zakres pracy

Jednym z głównych celów pracy było opracowanie metodyki badań numerycznych nad optymalną trajektorią wyścigowych pojazdów jednośladowych w warunkach ruchu quasi-statycznego. W trakcie prac badawczych zwracana była szczególna uwaga na utylitarność opracowywanych modeli (drugi cel główny), czyli możliwości prowadzenia za ich pomocą wartościowej analizy porównawczej z pomiarami zarejestrowanymi w trakcie ruchu pojazdu. Przez stwierdzenie „wartościowa analiza porównawcza" rozumiana jest możliwość wyciągnięcia wniosków prowadzących do poprawy czasu manewru w trakcie jazdy rzeczywistym pojazdem.

Punktem wyjścia była analiza literatury i aktualnego stanu wiedzy dotyczącej tematyki minimalizacji czasu manewru oraz poszukiwania optymalnej trajektorii ruchu pojazdu. Podczas wytyczania szczegółowych kierunków badań wykluczono opublikowane już w fachowej literaturze aspekty oraz wzięto pod uwagę ograniczony czas na wykonanie pracy, jej jednostkowy charakter oraz stosunkowo nową dla autora pracy dziedzinę sterowania optymalnego.

W celu realizacji zadań głównych sformułowano następujące cele szczegółowe:

- sformułowanie zadania optymalnego sterowania pojazdem w warunkach ruchu quasi-statycznego, w sposób umożliwiający uwzględnienie cech dynamiki pojazdu oraz fizycznych uwarunkowań kierowcy,
- dobranie odpowiedniej metody pozyskiwania danych wejściowych w procesie numerycznego odwzorowania geometrii jezdni,
- implementacja zaproponowanych zmian w uogólnionym do ruchu przestrzennego zadaniu optymalizacji,
- propozycja numerycznej metody szacowania ugięcia elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu jednośladowego na podstawie informacji o jego prędkości początkowej i przyspieszeniu.

Celem pomocniczym w osiągnięciu niektórych celów szczegółowych było stworzenie programu komputerowego wspierającego proces analizy geometrii pojazdów jednośladowych.

Zakres niniejszej pracy doktorskiej obejmuje:

- sformułowanie zadania sterowania optymalnego w przypadku quasi-statycznego ruchu płaskiego wraz z eksperymentalnie wyznaczonymi ograniczeniami na wielkości sterujące,

- propozycję półempirycznego diagramu przyspieszeń g-g dla układu motocykl-kierowca,
- analizę porównawczą między zaproponowanym, a prezentowanym w literaturze sformułowaniem problemu sterowania optymalnego,
- przedstawienie stosownych wyprowadzeń pozwalających na uogólnienie rozważanego problemu do ruchu przestrzennego,
- analizę rezultatów numerycznego procesu odwzorowania geometrii przestrzennej jezdni dla różnych metod pozyskiwania danych wejściowych,
- analizę porównawczą między optymalnym ruchem pojazdu po jezdni 2D i 3D,
- analizę porównawczą z badaniami drogowymi, które zostały przeprowadzone na różnych torach wyścigowych i za pomocą motocykli różnych klas wyścigowych,
- przedstawienie matematycznego opisu modelu pojazdu jednośladowego o trzech stopniach swobody zbudowanego celem oszacowania ugięcia zawieszenia na podstawie przyspieszeń pojazdu,
- analizę porównawczą numerycznie oszacowanych przebiegów ugięcia zawieszenia z wartościami zarejestrowanymi w trakcie ruchu pojazdu.

1.3. Tezy pracy

Teza 1: **Uwzględnienie odpowiednich danych eksperymentalnych w sformułowaniu problemu minimalizacji czasu przejazdu wyścigowego pojazdu jednośladowego w warunkach ruchu quasi-statycznego umożliwia wyznaczenie optymalnej trajektorii oraz przebiegu manewrów zgodnych z obserwacjami doświadczalnymi.**

Teza 2: **Model drgań o trzech stopniach swobody wykorzystujący zarejestrowane eksperymentalnie informacje o przyspieszeniach pojazdu umożliwia wierne odwzorowanie przebiegów ugięcia elementów sprężystych w zawieszeniu wyścigowego pojazdu jednośladowego.**

2. Przegląd literatury

2.1. Minimalizacja czasu przejazdu

Problem minimalizacji czasu okrążenia może zostać rozwiązany za pomocą kilku podejść, które różnią się między sobą metodą numeryczną wykorzystaną do rozwiązania problemu oraz modelem pojazdu. Metodom numerycznym poświęcone zostały podrozdziały 3.2 oraz 3.3, zaś modele pojazdu podzielić można na dwie główne kategorie:

- modele dynamiczne,
- modele sformułowane dla warunków ruchu quasi-statycznego.

Kolejny możliwy do wprowadzenia podział związany jest z trajektorią ruchu pojazdu. Wyróżnić można dwa podejścia:

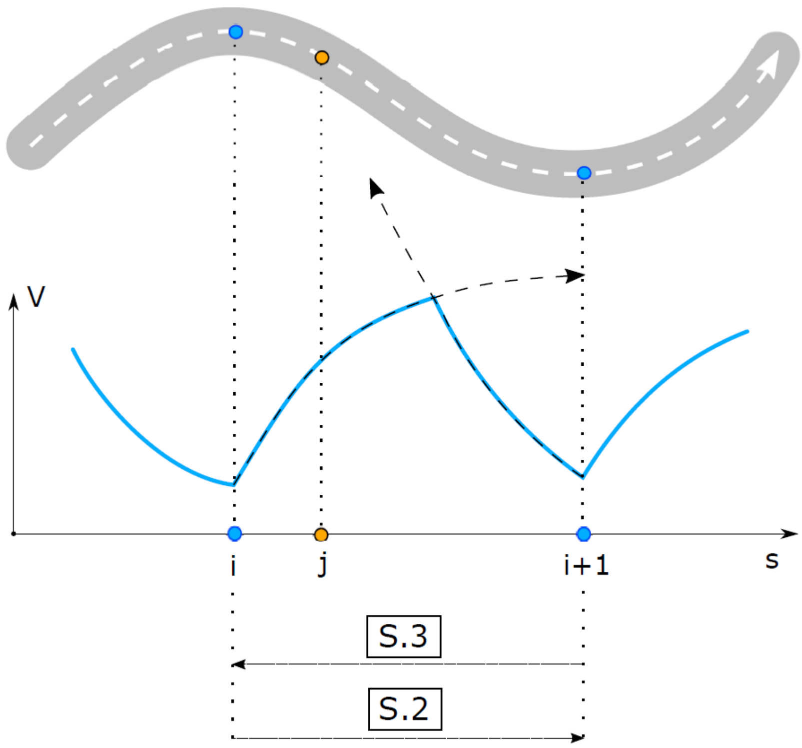
- poszukiwanie minimalnego czasu manewru dla znanej, predefiniowanej trajektorii (historycznie pierwsze stosowane podejście),
- wyznaczanie nieznanej trajektorii pojazdu w trakcie rozwiązywania problemu minimalizacji czasu manewru.

Podejście o znanej trajektorii pojazdu wygodnie jest przedstawić za pomocą zadania sformułowanego dla warunków ruchu quasi-statycznego. W pierwszym kroku obliczeniowym wyznaczane są lokalne ekstrema krzywizny trajektorii, w których przyjmuje się, że pojazd osiąga maksymalną dopuszczalną wartość przyspieszenia poprzecznego. Prędkość pojazdu w znalezionych punktach jest następnie wyznaczana za pomocą zależności

$$V_i = \sqrt{a_y^{max}/\kappa_i}, \;\; i = 1, \dots, N, \tag{2.1}$$

gdzie N jest liczbą lokalnych ekstremów krzywizny κ_i, zaś a_y^{max} jest maksymalnym przyspieszeniem poprzecznym. Dla każdych dwóch kolejnych punktów i oraz $i+1$ rozwiązywane są następnie dwa zadania. W pierwszym zadaniu obliczana jest prędkość pojazdu przyspieszającego z punktu i do punktu $i+1$. W zadaniu drugim rozważany jest ruch w odwrotną stronę, z punktu $i+1$ do punktu i. Osiągi pojazdu w zadaniu pierwszym ograniczone są przez górną połowę diagramu g-g (diagram g-g opisano w podrozdziałach 2.2 oraz 4.3), zaś w zadaniu drugim przez połowę dolną. Otrzymane krzywe prędkości przecinają się w punkcie, w którym układ pojazd-kierowca powinien zacząć hamować (rys. 2.1). Opisana metoda została zaimplementowana między innymi w darmowym oprogramowaniu OptimumLap[4] firmy OptimumG, jak również w projekcie open-source OpenLap[5]. Przykłady aplikacji metody opisane w literaturze mogą zostać odnalezione w pracach [7, 8].

Sformułowanie problemu minimalizacji czasu manewru jako zadania sterowania optymalnego datuje się na lata 80. oraz 90. XX wieku [9, 10, 11]. W podejściu tym wyznaczany jest minimalny czas manewru oraz odpowiadająca mu optymalna trajektoria ruchu. Wczesny przykład aplikacji metody dotyczył optymalizacji trajektorii bolidu Formuły 1 [10]. Zastosowany został dynamiczny model pojazdu o trzech stopniach swobody, w którym uwzględniono siły aerodynamiczne, rozdział siły hamowania pomiędzy osie, charakterystykę trakcyjną, a także zmianę obciążenia przypadającego na poszczególne koła w przejściowych fazach ruchu. Pojazd sterowany był za pomocą pochodnej kąta skręcenia kół oraz wartości sił przyczepności w kierunku wzdłużnym.



Rys. 2.1. Graficzne przedstawienie metody poszukiwania profilu prędkości dla predefiniowanej trajektorii przejazdu [12]. Punkt *j* symbolizuje wybrany punkt siatki obliczeniowej, w którym wyznaczana jest prędkość pojazdu

[4] URL: optimumg.com/product/optimumlap/ [dostęp 04.2023].
[5] URL: github.com/mc12027/OpenLAP-Lap-Time-Simulator [dostęp: 04.2023].

Pierwszą publikacją poświęconą pojazdom jednośladowym była praca [13],w której sterowano pojazdem za pomocą wzdłużnych sił przyczepności oraz poprzecznej reakcji nawierzchni na przednią oponę. Dodatkową wielkością sterującą był współczynnik rozdzielający siłę hamowania na poszczególne koła. Siły przyczepności zostały przyłożone w punkcie styku toroidalnych opon z jezdnią oraz przyjęte zostało założenie o zerowym kącie skrętu kierownicy. Maksymalizowanym wskaźnikiem jakości był pokonywany w ustalonym czasie dystans. We wskaźniku jakości uwzględniono dodatkowo składnik penalizujący zmiany sterowania. Sformułowany problem optymalizacji został następnie rozwiązany za pomocą metody pośredniej.

Praca [13] stanowiła podstawę kolejnych publikacji w tematyce optymalizacji ruchu pojazdów jednośladowych. W pracach [14, 15] dodany został kolejny stopień swobody – kąt skrętu kierownicy, który zastąpił jako wielkość sterującą wprowadzoną w publikacji [13] poprzeczną reakcję nawierzchni na przednią oponę. Uwzględniony został również czas relaksacji sił przyczepności. Zadanie sterowania optymalnego sformułowano jako dwupunktowy problem brzegowy i rozwiązano za pomocą metody pośredniej.

Charakterystyka trakcyjna pojazdu została uwzględniona w publikacji [16], w której poszukiwane były optymalne przełożenia skrzyni biegów w motocyklu klasy Superbike poruszającym się po torze Mugello (Włochy).

Uogólnienie ruchu pojazdu na ruch po trójwymiarowej (przestrzennej) jezdni zaproponowano w pracy [17]. Równania ruchu wyprowadzono wówczas w układzie współrzędnych prostokątnych związanym z jezdnią.

Proces numerycznego odwzorowania geometrii rzeczywistej jezdni szczegółowo omówiono w pracy [18]. Sformułowane zostało zadanie optymalizacji (zadanie sterowania optymalnego), w którym minimalizowaną funkcją celu był błąd odległości pomiędzy numerycznie wyznaczanymi granicami jezdni, a dyskretnie opisanymi krawędziami rzeczywistymi. Jako wielkości sterujące wykorzystano pochodne kątów Eulera oraz pochodną szerokości jezdni. Autorzy wykazali, że tak sformułowane zadanie pozwala wyznaczyć krzywizny jezdni na podstawie zaszumionych danych wejściowych. Druga część wspomnianej publikacji została poświęcona analizie porównawczej optymalnej trajektorii bolidu Formuły 1 w ruchu po dwu i trójwymiarowej jezdni [19].

Analiza optymalnego przebiegu manewru wykonywanego przez pojazd jednośladowy poruszający się po jezdni trójwymiarowej została przedstawiona w publikacjach [20, 21, 22], w których wykorzystany został model jezdni zaprezentowany w pracach [17, 18]. W publikacji [20] zastosowano model roweru Francisa Whippla [23], w którym uwzględniono dodatkowo model opon Pacejki [24], różną szerokość opon oraz – wynikającą z przemieszczania się kierowcy – zmianę położenia środka ciężkości w kierunku prostopadłym do płaszczyzny symetrii motocykla. Rezultaty z modelu numerycznego zostały następnie porównane z wynikami badań drogowych na torze Mugello, podczas których profesjonalny kierowca poruszał się motocyklem klasy Superbike. Nieznane wielkości wektora stanu związanego z ruchem rzeczywistego pojazdu zostały estymowane za pomocą rozszerzonego filtru Kalmana. W pracy [21] uwzględniono dodatkowo podatność zawieszenia.

Publikacja [22] przedstawia analizę optymalnego powrotu pojazdu na właściwą (optymalną) trajektorię ruchu po popełnieniu przez kierowcę błędu związanego z nadmiernym opóźnieniem rozpoczęcia fazy hamowania lub zainicjowaniem skrętu z niewłaściwego względem krawędzi trasy miejsca na jezdni. W prezentowanych przykładach numerycznych wykorzystano dynamiczny model pojazdu z pracy [21], w którym uwzględniono dodatkowo sztywność opon w kierunku poprzecznym.

Kolejnym przykładem analizy ruchu motocykla po trójwymiarowej trasie jest praca [25], w której pod uwagę wzięto jedynie pochylenie podłużne jezdni.

Podejście łączące warunki ruchu quasi-statycznego z zadaniem optymalizacji trajektorii ruchu zaprezentowano po raz pierwszy w pracy [6], która stała się dla autora niniejszej dysertacji inspiracją do podjęcia badań obejmujących prezentowaną tematykę. Ruch pojazdu opisany został wówczas za pomocą trzyelementowego wektora stanu, podczas gdy osiągi pojazdu scharakteryzowano diagramami g-g. Pojazd sterowano przyspieszeniem w kierunku wzdłużnym oraz poprzecznym do trajektorii ruchu. W publikacji zawarte zostały przykłady rozwiązań dla samochodu i motocykla oraz została przedstawiona analiza wrażliwości modelu na zmiany wybranych właściwości pojazdu: rozdziału siły hamowania, przyczepności opon oraz sztywności kątowej zawieszenia.

Ruch płaski pojazdu zaprezentowany w [6] został następnie uogólniony na przypadek ruchu po jezdni trójwymiarowej [26]. Wykorzystany został model jezdni zaprezentowany w pracach [17, 18]. Różnice między ruchem pojazdu po jezdni 2D i 3D omówione zostały na przykładzie motocykla MotoGP (tor Mugello) oraz bolidu Formuły 1 (tor Catalunya).

Analogiczne względem [26] zadanie sterowania optymalnego sformułowano w pracy [27] poświęconej zagadnieniu minimalizacji czasu okrążenia na torze NASCAR. Przedstawiono wówczas zmodyfikowany model jezdni uwzględniający zmianę pochylenia poprzecznego w kierunku normalnym do krzywej szkieletowej trasy.

W pracy [28] opublikowanej przez autora oraz promotora niniejszej dysertacji opisano sterowanie pojazdem jednośladowym za pomocą zrywów (pochodnej przyspieszenia), których zbiór wartości dopuszczalnych uzależniono (na podstawie badań drogowych) od prędkości pojazdu. Rezultaty obliczeń numerycznych omówiono na przykładach dla lekkich motocykli wyścigowych: klasy PitBike oraz Supersport 300.

W wyszczególnionych do tego momentu publikacjach podstawowym modelem opon był model Pacejki. Bardziej szczegółowe modele opon zostały wykorzystane między innymi w pracach [29, 30, 31]. W pracy [29] zastosowano termodynamiczny model opony, zaś w pracach [30, 31] uwzględniono dodatkowo model zużycia. W publikacji [32] poddano analizie ruch pojazdu po nawierzchni o zmiennym współczynniku przyczepności, którego wartość uzależniono od współrzędnej krzywoliniowej oraz odległości w kierunku prostopadłym do krzywej szkieletowej jezdni.

W części publikacji podjęto problem optymalizacji wybranych charakterystyk pojazdu. W pracy [16] poszukiwano optymalnych przełożeń skrzyni biegów w motocyklu Superbike, w [33] optymalnego położenia środka ciężkości bolidu, zaś w [34] wzorcowego położenia środka ciężkości motocykla (wysokości oraz odległości od tylnego koła) w ruchu po mokrej i suchej nawierzchni. Rozbudowana analiza związana z optymalizacją charakterystyk bolidu Formuły 1 została przedstawiona w publikacji [35], w której poszukiwano optymalnego położenia środka ciężkości oraz środka ciśnienia, jak również optymalnej sztywności kątowej zawieszenia i stałej charakteryzującej pracę mechanizmu różnicowego o ograniczonym poślizgu. Zagadnienie optymalizacji charakterystyk bolidu Formuły 1 zostało poruszone również w pracach [36, 37], w których poszukiwano (odpowiednio) optymalnego położenia środka ciężkości w kierunku wzdłużnym oraz optymalnego prześwitu. Autorzy publikacji [25] skupili się na optymalizacji przełożenia przekładni łańcuchowej, pojemności baterii oraz liczby silników elektrycznych w motocyklu elektrycznym.

W przypadku publikacji dotyczących pojazdów jednośladowych, badano przede wszystkim motocykle o dużych pojemnościach oraz mocach silnika rozpatrując ruch na pełnowymiarowych torach wyścigowych. W pracy [20] modelowanym pojazdem był motocykl klasy Superbike, zaś w pracy [26] motocykl klasy MotoGP. Motocyklom o dużych pojemnościach silnika zostały poświęcone prace [6, 13, 21]. Ruch pojazdów rozpatrywano na torach: Mugello [13, 20, 26] oraz Adria International Raceway [6, 34]. Przykładem analizy na długim odcinku trasy (60 km) jest praca [25], w której poszukiwano optymalnej trajektorii motocykla elektrycznego przemierzającego trasę wyścigu Isle of Man TT Zero Challenge. Lekki motocykl wyścigowy klasy 125 cm^3 poddany został analizie w pracy [34]. Obliczenia przeprowadzono dla toru Valencia oraz toru Adria International Raceway. Przykładem analizy ruchu lekkiego motocykla wyścigowego na torze kartingowym jest praca autora dysertacji [28].

Rozbudowany przegląd literatury, poruszający dodatkowo aspekty nie poddane rozważaniom w niniejszej rozprawie, takie jak: optymalne wykorzystanie systemów odzyskiwania energii czy zarządzanie energią w pojazdach elektrycznych i hybrydowych, został zamieszczony w pracy [38].

W przedstawionym przeglądzie literatury pominięto techniki modelowania ruchu, w których układ wieloczłonowy kontrolowany jest regulatorami starającymi się podążać pojazdem wzdłuż predefiniowanej ścieżki. Ze względu na zależność rezultatu obliczeń od nastaw regulatora, trudno jest mówić o optymalności manewru. Przykładem takiej analizy poświęconej pojazdowi jednośladowemu jest praca [39].

Istotnymi pracami z punktu widzenia prezentowanej tematyki są również [40, 41], w których problematyka sterowania optymalnego została ujęta z punktu widzenia optymalizacji ruchu pojazdów.

2.2. Diagram przyspieszeń g-g

Warunki ruchu quasi-statycznego powiązane są z diagramami przyspieszeń g-g, których koncepcja pojawiła się po raz pierwszy w latach 70. XX wieku [42]. Diagramy g-g to wykresy przedstawiające obwiednię dopuszczalnych przyspieszeń pojazdu. Osią odciętych wykresu jest przyspieszenie poprzeczne pojazdu, zaś osią rzędnych przyspieszenie wzdłużne.

Diagram g-g pozwala na scharakteryzowanie osiągów układu pojazd-kierowca. Może być także wykorzystany do oceny wpływu zmian podstawowych charakterystyk pojazdu na poddawane analizie limity przyspieszeń. Diagramy g-g są również popularnym narzędziem stosowanym do oceny kierowców pod względem wykorzystywania potencjału pojazdu oraz dostępnej przyczepności opon.

Podstawowym ograniczeniem osiągów pojazdu jest przyczepność opon. Obwiednia wypadkowej wzdłużnej oraz poprzecznej siły przyczepności przyjmuje w ogólnym przypadku kształt zbliżony do elipsy. Na rys. 2.2a zostały przedstawione przykładowe wykresy granicznej siły przyczepności opony przy założeniu równej oraz różnej wartości współczynników μ_x i μ_y. Współczynniki μ_x i μ_y oznaczają odpowiednio współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku wzdłużnym oraz poprzecznym.

W trakcie tworzenia diagramu g-g (dla przyjętych warunków ruchu quasi-statycznego) uwzględnić można następujące, wyszczególnione w pracy [43] efekty:

- skończoną moc silnika limitującą maksymalne przyspieszenie wzdłużne pojazdu,
- opór aerodynamiczny oraz siłę nośną (lub siłę docisku),
- zmianę obciążenia kół związaną z przyspieszeniami działającymi na pojazd,
- rozdział siły hamowania,
- warunek przewrócenia pojazdu na bok pod wpływem siły bezwładności w kierunku poprzecznym do kierunku ruchu (samochód) lub oderwania od nawierzchni któregoś z kół w wyniku działania siły bezwładności wzdłuż kierunku ruchu (motocykl).

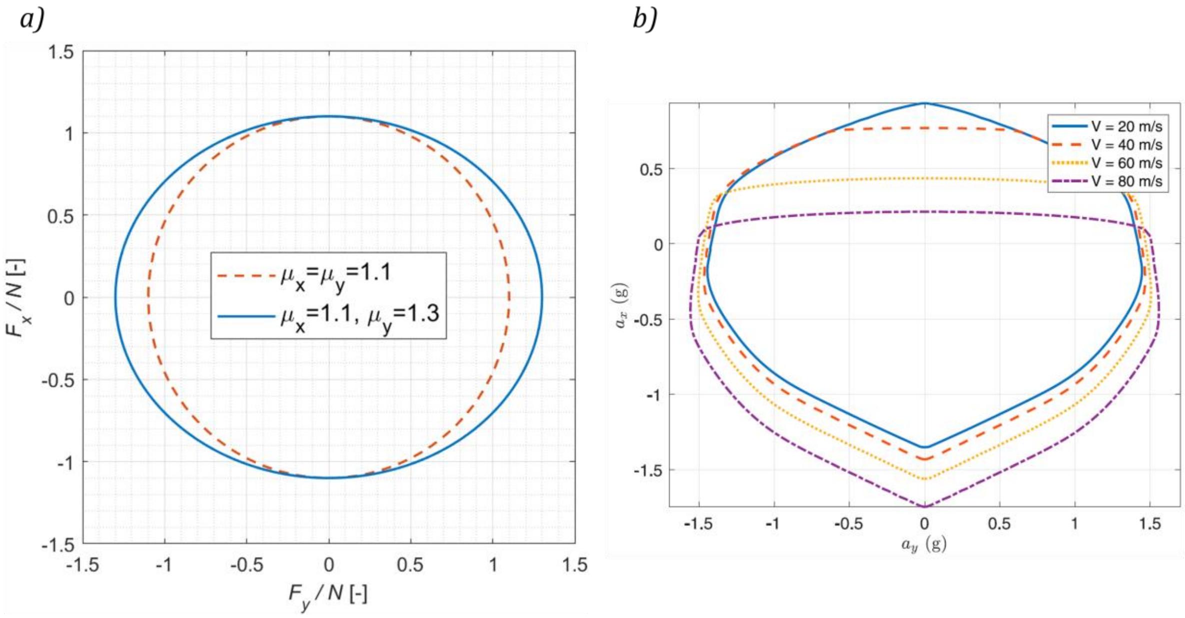
Wyszczególnione ograniczenia powodują widoczne na rys. 2.2 różnice między obwiednią przyczepności opon a obwiednią osiągów pojazdu.

Wpływ prędkości ruchu na obwiednię osiągów samochodu wyścigowego został zaprezentowany na rys. 2.2b. Rosnąca wraz ze wzrostem prędkości ruchu dopuszczalna wartość przyspieszenia poprzecznego wynika z aerodynamicznej siły docisku. Rosnący opór aerodynamiczny przesuwa obwiednię diagramu wzdłuż osi rzędnych, w kierunku mniejszych wartości przyspieszeń.

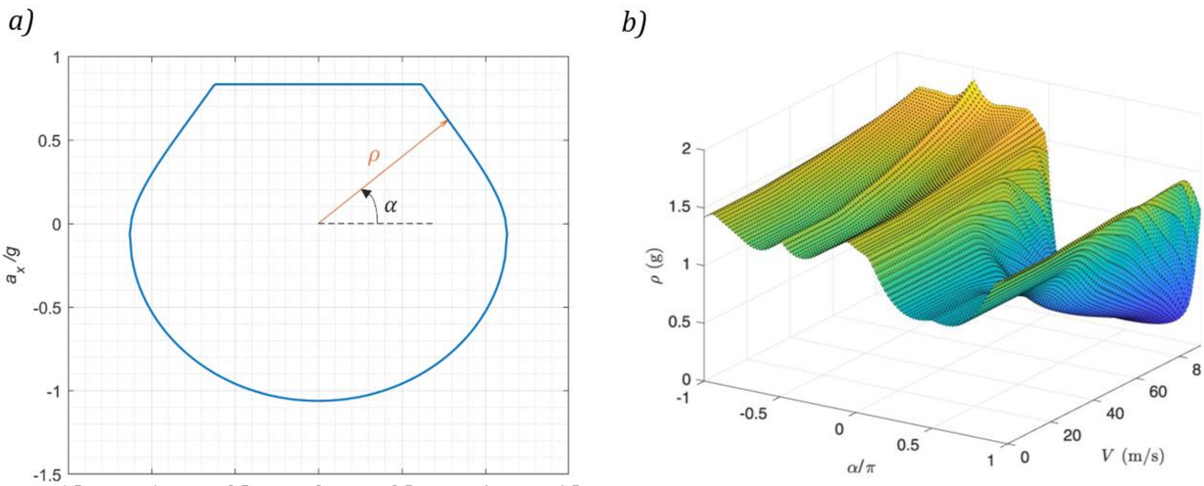
Diagram g-g dla pojazdu jednośladowego omówiono w podrozdziale 4.3 niniejszej rozprawy.

W pracy [6] przedstawiono opis diagramu g-g w biegunowym układzie współrzędnych (rys. 2.3a). Osiągi pojazdu w sformułowanym zadaniu sterowania optymalnego ograniczono przedstawioną na rys. 2.3b hiperpowierzchnią, którą sparametryzowano prędkością pojazdu V oraz amplitudą α zależną od przyspieszenia wzdłużnego a_x i poprzecznego a_y. Proces tworzenia diagramu g-g oraz przedstawionej hiperpowierzchni został szczegółowo opisany w pracy [12].

W publikacji [44] wyznaczono obwiednię osiągów pojazdu za pomocą zadania optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami, w którym maksymalizowane były wartości przyspieszeń w poszczególnych fazach ruchu. Procedury optymalizujące zostały wykorzystane także w pracy [45]. Maksymalizowano wówczas pole powierzchni figury ograniczonej obwiednią diagramu. Zadanie optymalizacji sformułowano na dwa sposoby: jako zadanie sterowania optymalnego oraz zadanie optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami.



Rys. 2.2. Granica przyczepności dla równej oraz różnej wartości współczynników przyczepności przylgowej μ_x i μ_y (a), diagram g-g osiągów samochodu wyznaczony dla różnej prędkości ruchu [6] (b)



Rys. 2.3. Współrzędne ρ oraz α w biegunowym układzie współrzędnych stosowane do parametryzacji obwiedni diagramu g-g (a), hiperpowierzchnia ograniczająca osiągi pojazdu w zadaniu sterowania optymalnego ruchem pojazdu w warunkach ruchu quasi-statycznego [6] (b)

Diagramy g-g, przy których tworzeniu uwzględniono przyspieszenie kątowe pojazdu, temperaturę opon oraz tłumienie w zawieszeniu, opisano w publikacjach [46, 47]. Uogólnienie diagramu g-g na ruch po trójwymiarowej jezdni zostało przedstawione w pracach [26, 27].

Zarejestrowane eksperymentalnie diagramy g-g porównano z obwiednią przyczepności opon w pracy [48]. Autorzy publikacji wyznaczyli teoretyczną obwiednię osiągów pojazdu jednośladowego, a następnie poddali analizie wpływ położenia środka ciężkości pojazdu na kształt obwiedni diagramu.

3. Sterowanie optymalne

Teoria sterowania optymalnego jest wynikiem rozwinięcia rachunku wariacyjnego. Jednym z pierwszych problemów dotyczących optymalizacji postawionych w rachunku wariacyjnym był sformułowany w 1696 roku przez Johana Bernoulliego problem brachistochrony (krzywej najkrótszego spadku). Został on rozwiązany niezależnie przez pięciu matematyków, którzy wykazali, że brachistochroną jest fragment cykloidy.

Gwałtowny rozwój teorii sterowania optymalnego nastąpił w okresie zimnej wojny. W tym czasie powstała teoria programowania dynamicznego opracowana przez amerykańskiego matematyka Richarda Bellmana [49]. Drugim fundamentalnym osiągnięciem z tego okresu jest zasada minimum Pontriagina (nazywana również zasadą maksimum Pontriagina) sformułowana w 1956 roku przez rosyjskiego uczonego Lwa Pontriagina. Zasada optymalności Bellmana oraz zasada minimum Pontriagina stały się podstawą dla wszystkich późniejszych prac poświęconych sterowaniu optymalnemu.

3.1. Sformułowanie problemu sterowania optymalnego

W ogólnym przypadku dynamika sterowanego układu opisana jest za pomocą równań stanu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{3.1}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_o, \tag{3.2}$$

w których $\mathbf{x}$ jest m-elementowym wektorem zmiennych stanu, $\mathbf{u}$ jest n-elementowym wektorem zmiennych sterujących, zaś $\mathbf{x}_0$ jest wektorem warunków początkowych. Zmienne stanu $\mathbf{x}$ oraz zmienne sterujące $\mathbf{u}$ należą (odpowiednio) do zbioru wartości dopuszczalnych $\mathbf{X}$ oraz $\mathbf{U}$.

W zadaniu sterowania optymalnego poszukiwany jest wektor sterowań $\mathbf{u}(t)$, który w czasie $t \in (t_0, t_k)$ minimalizuje wskaźnik jakości [50]:

$$\mathcal{J} = F_1\big(\mathbf{x}(t_k)\big) + \int_{t_0}^{t_k} F_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\mathrm{d}t. \tag{3.3}$$

Wielkości t_0 i t_k są odpowiednio chwilą początkową i końcową sterowania. Funkcja F_1 zależy od stanu końcowego (koszt końcowy), zaś F_2 od stanu i sterowań układu. Zadanie sterowania optymalnego, w którym wskaźnik jakości $\mathcal{J}$ przyjmuje pełną postać daną równaniem (3.3) nazywane jest problemem Bolzy. Zadanie, w którym $F_1 = 0$ nazywane jest problemem Lagrange'a, zaś w przypadku $F_2 = 0$ problemem Mayera.

Funkcjonał jakości jest minimalny, jeśli spełniony jest warunek

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) \leq \mathcal{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{U}, \tag{3.4}$$

gdzie $\mathbf{u}^*$ jest sterowaniem optymalnym, a $\mathbf{x}^*$ trajektorią stanu odpowiadającą temu sterowaniu.

3.1.1. <u>Zadanie sterowania optymalnego bez ograniczeń – podejście wariacyjne</u>

Funkcjonał jakości $\mathcal{J}$, do którego za pomocą mnożników Lagrange'a $\lambda = \lambda(t)$ wprowadzono równania stanu (3.1), przyjmuje postać

$$\mathcal{J} = F_1\big(\mathbf{x}(t_k)\big) + \int_{t_0}^{t_k} \{F_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T[\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)]\}\,\mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Wprowadzając funkcję Hamiltona $\mathcal{H}$ w postaci

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = F_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{3.6}$$

oraz całkując przez części składnik $\int_{t_0}^{t_k} \lambda^T \dot{\mathbf{x}}(t)\mathrm{d}t$, funkcjonał (3.5) przyjmuje postać

$$\mathcal{J} = F_1\big(\mathbf{x}(t_k)\big) + \int_{t_0}^{t_k} \big\{\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T \mathbf{x}(t)\big\}\,\mathrm{d}t - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{x}(t)\big|_{t_0}^{t_k}. \tag{3.7}$$

Zakładając, że czas końcowy t_k jest znany, wariacja $\delta\mathbf{u}(t)$ skutkuje wariacją $\delta\mathbf{x}(t)$ oraz $\delta\mathcal{J}$ i prowadzi do zależności

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J} = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T\right)\delta\mathbf{x}\right]_{t=t_k} + [\boldsymbol{\lambda}^T \delta\mathbf{x}]_{t=t_0} + \\ + \int_{t_0}^{t_k} \left\{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T\right)\delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}\right)\delta\mathbf{u}\right\}\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Wskaźnik jakości będzie minimalny, gdy jego wariacja będzie równa zeru. Ze względu na znajomość stanu układu w chwili początkowej t_0 wariacja składnika $[\boldsymbol{\lambda}^T \delta\mathbf{x}]_{t=t_0}$ jest równa zeru. Następnie, przyjmując

$$\boldsymbol{\lambda}_k^T = \left.\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_k}, \tag{3.9}$$

oraz

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}, \tag{3.10}$$

równanie (3.8) upraszcza się do postaci

$$\delta \mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_k} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} \right] \mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Warunkiem koniecznym istnienia minimum funkcjonału $\mathcal{J}$ jest więc zerowanie się pochodnej hamiltonianu

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}^*} = 0. \tag{3.12}$$

Wyznaczone zależności pozwalają na sformułowanie następujących warunków koniecznych minimalności funkcjonału $\mathcal{J}$:

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*), \tag{3.13}$$

$$0 = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*}, \tag{3.14}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{*T} = -\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*}, \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k^{*T} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*}. \tag{3.16}$$

Warunek istnienia minimum w punkcie stacjonarnym przedstawia zależność

$$\left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*, \mathbf{u}=\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\lambda}^*} > 0. \tag{3.17}$$

Zbiór równań (3.13) – (3.15) i (3.17) z warunkami brzegowymi (3.2) i (3.16) nosi nazwę dwupunktowego problemu brzegowego.

Warunki (3.14) i (3.17) uogólnione na przypadek, w którym $\mathbf{u}$ ograniczone jest do pewnego zbioru **U,** opisane są równaniem

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, t) \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}^*, t), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{U} \tag{3.18}$$

przedstawiającym zasadę minimum Pontriagina.

3.1.2. Zadanie sterowania optymalnego bez ograniczeń z czasem swobodnym

W przypadku zadania sterowania optymalnego bez ograniczeń z czasem swobodnym, funkcja F_1 (jeśli różniczkowalna) może zostać zapisana za pomocą równoważnej zależności

$$F_1\big(\mathbf{x}(t_k)\big) = \int_{t_0}^{t_k} \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[F_1(\mathbf{x}(t))\right]\right\} \mathrm{d}t + F_1\big(\mathbf{x}(t_0)\big). \tag{3.19}$$

Zastępując występujący w równaniu (3.7) składnik F_1 zapisaną zależnością (3.19), a następnie zakładając nieskończenie małą wariację δt, wariacja funkcjonału $\delta\mathcal{J}$ przyjmuje postać

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{J} = \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T\right)\delta\mathbf{x} + \left(\mathcal{H} + \frac{\partial F_1}{\partial t}\right)\delta t\right]_{t=t_k} + \\ + \int_{t_0}^{t_k}\left\{\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T\right)\delta\mathbf{x} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}\right)\delta\mathbf{u}\right\}\mathrm{d}t.\end{gathered} \tag{3.20}$$

Nowym składnikiem, względem zależności (3.8), jest składnik związany z wariacją δt. Pierwszy składnik równania (3.20) prowadzi do warunku transwersalności

$$\mathcal{H}_k = -\left.\frac{\partial F_1}{\partial t}\right|_{t=t_k}, \tag{3.21}$$

oraz znanego już warunku

$$\boldsymbol{\lambda}_k^T = \left.\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_k}. \tag{3.22}$$

W przypadku $F_1 = 0$ warunki (3.21) i (3.22) przyjmują zerową wartość.

3.1.3. Zadanie sterowania optymalnego z ograniczeniami

Bardziej ogólne sformułowanie zadania sterowania optymalnego z dodatkowymi ograniczeniami na zmienne stanu i zmienne sterujące przedstawione jest zależnościami:

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = F_1\big(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_k)\big) + \int_{t_0}^{t_k} F_2(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)dt, \tag{3.23}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \tag{3.24}$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0, \tag{3.25}$$

$$\mathbf{b}\big(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_k)\big)=0, \tag{3.26}$$

gdzie $\mathbf{c}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t),t)$ jest p-elementowym wektorem ograniczeń algebraicznych, a $\mathbf{b}\big(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_k)\big)$ jest q-elementowym wektorem warunków brzegowych. Funkcja F_1 zależy od stanu początkowego oraz końcowego.

Wprowadzone do (3.23) ograniczenia (3.24) – (3.26) prowadzą do zależności

$$\begin{gathered}\mathcal{J}(\mathbf{x},\mathbf{u})=F_1\big(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_k)\big)-\mathbf{v}^T\mathbf{b}\big(\mathbf{x}(t_0),\mathbf{x}(t_k)\big)+\\+\int_{t_0}^{t_k}\{F_2(\mathbf{x},\mathbf{u})+\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})-\dot{\mathbf{x}})+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{u})\}\mathrm{d}t,\end{gathered} \tag{3.27}$$

gdzie $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}$ oraz $\mathbf{v}$ są współczynnikami Lagrange'a związanymi odpowiednio z równaniami stanu, ograniczeniami algebraicznymi oraz warunkami brzegowymi.

Funkcja Hamiltona $\mathcal{H}$ przyjmuje wówczas postać

$$\mathcal{H}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu},\mathbf{v})=F_2(\mathbf{x},\mathbf{u})+\boldsymbol{\lambda}^T\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})+\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{c}(\mathbf{x},\mathbf{u}). \tag{3.28}$$

Nieskończenie mała wariacja δt powoduje następującą wariację funkcjonału jakości

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{J}=\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial\mathbf{x}}+\boldsymbol{\lambda}^T-\mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x}+\left(-\mathcal{H}+\frac{\partial F_1}{\partial t}-\mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right)\delta t\right]_{t=t_0}+\\+\left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial\mathbf{x}}-\boldsymbol{\lambda}^T-\mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{x}}\right)\delta\mathbf{x}+\left(\mathcal{H}+\frac{\partial F_1}{\partial t}-\mathbf{v}^T\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t}\right)\delta t\right]_{t=t_k}+\\+\int_{t_0}^{t_k}\left\{\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}}+\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T\right)\delta\mathbf{x}+\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{u}}\right)\delta\mathbf{u}\right\}dt.\end{gathered} \tag{3.29}$$

Z zerowania się wariacji $\delta\mathcal{J}$ wynikają warunki:

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{\lambda}}, \tag{3.30}$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^T=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathbf{x}}, \tag{3.31}$$

$$\mathbf{u}^*=\arg\min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}}\mathcal{H}\,. \tag{3.32}$$

Równanie (3.32) przedstawia alternatywne sformułowanie zasady minimum Pontriagina.

Związane z wariantem zadania warunki brzegowe przedstawiają się następująco:

- jeśli $\mathbf{x}(t_0)$ jest dowolne to

$$\boldsymbol{\lambda}_0^T = \left[-\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_0}, \tag{3.33}$$

- jeśli $\mathbf{x}(t_k)$ jest dowolne to

$$\boldsymbol{\lambda}_k^T = \left[\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}\right]_{t=t_k}, \tag{3.34}$$

- jeśli t_0 jest dowolne to

$$\mathcal{H}_0 = \left[\frac{\partial F_1}{\partial t} - \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\right]_{t=t_0}, \tag{3.35}$$

- jeśli t_k jest dowolne to

$$\mathcal{H}_k = \left[-\frac{\partial F_1}{\partial t} + \mathbf{v}^T \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}\right]_{t=t_k}. \tag{3.36}$$

Z ograniczeniami algebraicznymi związane są poniższe warunki narzucone na zmienne sprzężone μ_j

$$\begin{aligned} &\mu_j(t) = 0, \ \text{gdy} \ \ c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) < 0, \\ &\mu_j(t) < 0, \ \text{gdy} \ \ c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = 0, \\ &\mu_j(t) > 0, \ \text{gdy} \ \ c_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) > 0. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Tak sformułowane zadanie sterowania optymalnego nosi nazwę dwupunktowego problemu brzegowego Hamiltona.

3.1.4. Sterowanie „bang-bang" oraz sterowanie osobliwe

Omawiając tematykę sterowania optymalnego nie sposób pominąć klasę problemów, które charakteryzuje sterowanie „bang-bang", tym bardziej, że w rozdziałach prezentowanych w dalszej części dysertacji ten charakterystyczny sposób sterowania przywoływany będzie kilkukrotnie. Sterowanie „bang-bang" polega na przełączaniu zmiennej sterującej między granicznymi wartościami dopuszczalnymi i jest charakterystyczne dla problemów, w których stan układu oraz wskaźnik jakości są liniowo zależne od sterowania. Tego typu zagadnieniem jest również rozpatrywany w niniejszej pracy problem sterowania czasowo-optymalnego[6], w którym funkcjonał jakości nie zależy od sterowania. Rozwiązaniem zadania sterowania optymalnego jest wówczas

$$u^* = \begin{cases} u_{max} & , jeśli\ \Phi(t) < 0 \\ \text{nieznane} & , jeśli\ \Phi(t) = 0\ , \\ u_{min} & , jeśli\ \Phi(t) > 0 \end{cases} \tag{3.38}$$

gdzie $\Phi(t)$ jest funkcją przełączania.

Sterowanie „bang-bang" wygodnie jest przedstawić posługując się następującym przykładem: poszukiwane jest sterowanie u należące do pewnego zbioru wartości dopuszczalnych $u \in < u_{min}, u_{max} >$ przeprowadzające pojazd z pewnego punktu A do punktu B w najkrótszym czasie, przy założeniu, że prędkość pojazdu na początku i końcu manewru ma być równa zeru. Postawiony problem sterowania może zostać opisany równaniem

$$\ddot{x} = u, \tag{3.39}$$

w którym x jest położeniem pojazdu. Przekształcając równanie (3.39) do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu otrzymywany jest następujący układ równań stanu

$$\dot{x}_1 = x_2, \tag{3.40}$$

$$\dot{x}_2 = u. \tag{3.41}$$

Sformułowany za pomocą zależności (3.6) hamiltonian przyjmuje postać

$$\mathcal{H} = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u \tag{3.42}$$

i jest liniowo zależny od sterowania u, a więc zależność (3.12) nie pozwala na określenie sterowania optymalnego. Analityczne rozwiązanie zagadnienia za pomocą analizy trajektorii stanu przedstawione zostało w pracy [50]. Optymalny przebieg sterowania jest następujący: pojazd przyspiesza z maksymalnym dopuszczalnym przyspieszeniem u_{max}, a następnie zaczyna hamować z maksymalnym dopuszczalnym opóźnieniem u_{min}. Następujący przeskok sterowania pomiędzy granicami zbioru wartości dopuszczalnych jest przykładem sterowania „bang-bang".

---

[6] W problemie sterowania czasowo-optymalnego wskaźnik jakości przyjmuje postać $\int_{t_0}^{t_f} 1\,\mathrm{d}t$.

Z zadaniami optymalizacji o liniowo zależnym od sterowania hamiltonianie związany jest także problem sterowania osobliwego, czyli takiego, w którym funkcja przełączania $\Phi(t)$ przyjmuje wartość równą zeru w pewnym skończonym przedziale czasu. Postawiony wcześniej problem sterowania stałby się osobliwy w momencie, w którym prędkość pojazdu zostałaby ograniczona do pewnej prędkości maksymalnej V_{max} i prędkość ta zostałaby osiągnięta w pewnym skończonym przedziale czasu. W przypadku gdy sterowanie u należy do wnętrza zbioru wartości dopuszczalnych, co można zapisać za pomocą zależności $u_{min} < u^* < u_{max}$, wówczas zasada minimum Pontriagina nie pozwala wnioskować na temat sterowania optymalnego. Metody rozwiązywania wyszczególnionych zagadnień zostały opisane między innymi w pracy [51].

Zadania sterowania optymalnego, w których sterowanie jest osobliwe mogą sprawiać problemy w trakcie ich numerycznego rozwiązywania. Często stosowanym rozwiązaniem pozwalającym „ominąć" problem osobliwości jest modyfikacja funkcjonału jakości polegająca na wprowadzeniu małego składnika kwadratowo zależnego od sterowania [51]. W zadaniu sterowania czasowo-optymalnego funkcjonał jakości przyjmuje wówczas postać

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_k} \left\{ 1 + \sum_{i}^{n} \epsilon_i u_i^2 \right\} \mathrm{d}t. \tag{3.43}$$

Wartości wag ϵ_i dobierane są iteracyjnie do momentu wystąpienia niestabilności numerycznej lub spełnienia warunku granicznej dopuszczalnej wartości na ϵ_i.

3.2. Numeryczne metody rozwiązywania zadań sterowania optymalnego

Stosowane są dwie metody rozwiązywania zadań sterowania optymalnego: metoda pośrednia (z ang. *indirect*) oraz metoda bezpośrednia (z ang. *direct*).

Metody pośrednie wykorzystują zasadę minimum Pontriagina. Zadanie sterowania optymalnego rozwiązywane jest za pomocą warunków optymalności zdefiniowanych w podrozdziale 3.1. W metodzie bezpośredniej zaś sterowanie optymalne znajdowane jest w wyniku aproksymacji oryginalnego zadania sterowania optymalnego skończenie wymiarowym zadaniem optymalizacji. Zmienne w zadaniu poddawane są dyskretyzacji w dziedzinie zmiennej niezależnej.

Metody różnią się między sobą także etapem, na którym sformułowany problem podlega dyskretyzacji. W metodzie bezpośredniej dyskretyzacja ZSO następuje na samym początku procedury, a następnie zadanie rozwiązywane jest za pomocą algorytmów programowania nieliniowego (z ang. *nonlinear programming*, skrót: NLP). W metodzie pośredniej zaś najpierw definiowane są w sposób jawny warunki optymalności, a dopiero później problem poddawany jest dyskretyzacji w celu numerycznego rozwiązania zagadnienia.

Niezależnie od wyboru metody, sformułowane ZSO może zostać rozwiązane za pomocą metody sekwencyjnej lub równoczesnej.

3.2.1. <u>Metody sekwencyjne</u>

W metodach sekwencyjnych rozwiązanie w kolejnym kroku czasowym otrzymywane jest na podstawie rozwiązania w jednym lub kilku poprzednich krokach czasowych. Zagadnienie brzegowe zastępowane jest zagadnieniem początkowym, a podstawową stosowaną procedurą numeryczną jest wówczas metoda strzałów lub metoda strzałów wielokrotnych [51, 52]. W zależności od znajomości stanu układu na brzegu analizowanego przedziału czasowego, w miejsce nieznanego warunku brzegowego przyjmowany jest pewien warunek początkowy, a następnie rozwiązywane jest zagadnienie początkowe. Sterowanie w każdym kroku czasowym otrzymywane jest z zależności (3.32). Jeśli stan układu w ostatnim kroku czasowym jest zgodny ze znanym warunkiem końcowym wówczas znalezione zostało rozwiązanie zadania. W przeciwnym wypadku przyjęty warunek początkowy poddawany jest modyfikacji i zadanie rozwiązywane jest ponownie. Poszukiwania odpowiedniego warunku początkowego trwają do momentu, w którym różnica między rozwiązaniem zadania a znanym warunkiem końcowym będzie mniejsza od założonej.

W metodzie strzałów wielokrotnych [51, 52] analizowany przedział czasowy dzielony jest na mniejsze interwały, w których następnie stosowana jest metoda strzałów. Rozwiązania na brzegu interwałów muszą spełniać warunek ciągłości.

W przypadku sekwencyjnego rozwiązywania ZSO za pomocą metody bezpośredniej, sterowanie poddawane jest dyskretyzacji i reprezentowane jest funkcjami przedziałami wielomianowymi [53]. Parametry funkcji wielomianowych traktowane są następnie jako zmienne decyzyjne w zadaniu NLP, które może zostać rozwiązane za pomocą bibliotek IPOPT [54], SNOPT [55]. Równania stanu (3.24) rozwiązywane są krok po kroku, zaś wartość wskaźnika jakości obliczana jest za pomocą kwadratury odpowiadającej przyjętemu schematowi całkowania.

3.2.2. Metody równoczesne

Grupa metod równoczesnych utożsamiana jest z metodą kolokacji, w której zmienne stanu oraz zmienne sterujące poddawane są dyskretyzacji i stanowią zmienne decyzyjne w zadaniu NLP. Optymalne sterowanie oraz odpowiadające mu trajektorie zmiennych stanu wyznaczane są równocześnie.

Szeroko stosowaną metodą równoczesną jest pseudospektralna metoda kolokacji ortogonalnej, której szczegółowy opis matematyczny odnaleźć można w pracach [56, 57]. Analizowany przedział czasowy $t \in < t_0, t_k >$ zostaje przekształcony w przedział $\tau \in < -1,1 >$, który następnie dzielony jest na J kolejnych podprzedziałów. W każdym podprzedziale stan układu aproksymowany jest w węzłach kolokacji będących pierwiastkami przyjętego wielomianu ortogonalnego n-tego stopnia. Otrzymany po dyskretyzacji nieliniowy problem optymalizacji z ograniczeniami rozwiązywany jest następnie za pomocą algorytmów NLP.

Istotne aspekty z punktu widzenia praktycznej implementacji metody kolokacji ortogonalnej, omówione zostaną w podrozdziale 3.3 na przykładzie wykorzystywanego w niniejszej pracy oprogramowania GPOPS-II.

Opisywane metody zostały ze sobą zestawione między innymi w pracy [58], w której autorzy zaprezentowali analizę porównawczą rezultatów z programu PINS (metoda pośrednia) oraz GPOPS-II (metoda bezpośrednia), wykazując podobieństwa między rezultatami obliczeń oraz wskazując zalety i wady obydwu podejść.

Zagadnienia minimalizacji czasu manewru bywają również rozwiązywane metodami sterowania predykcyjnego [59].

Praca [60] wskazuje, że współczynniki Lagrange'a wykorzystywane w metodach bezpośrednich stanowią dyskretną aproksymację zmiennych sprzężonych w metodzie pośredniej. Metody te odpowiadają sobie.

3.3. Oprogramowanie GPOPS-II

Rozważane w niniejszej pracy zadania sterowania optymalnego zostały rozwiązane za pomocą oprogramowania GPOPS-II (*General Purpose Optimal Control Software*) [56] będącego zewnętrznym narzędziem rozszerzającym funkcjonalność oprogramowania MATLAB[7].

---

[7] Oprogramowanie GPOPS-II dostępne jest również jako zewnętrzna biblioteka języka C++ o nazwie CGPOPS.

Program GPOPS-II jest narzędziem ogólnego przeznaczenia wykorzystywanym do numerycznego rozwiązywania zadań sterowania optymalnego (metoda bezpośrednia, równoczesna), w którym zastosowana została *hp*-adaptacyjna wersja metody kolokacji Legendre'a-Gaussa-Radaua.

Program GPOPS-II umożliwia rozwiązywanie problemów jedno oraz wielofazowych (podrozdział 3.3.4). Sformułowanie zadania sterowania optymalnego wymaga zdefiniowania dwóch funkcji: funkcji punktu końcowego (*endpoint function*) oraz funkcji ciągłej (*continuous function*). W funkcji ciągłej należy zawrzeć dynamikę układu (3.24), ograniczenia algebraiczne (3.25) oraz funkcję podcałkową wskaźnika jakości (3.23). W funkcji punktu końcowego zdefiniować należy powiązania między całkami w poszczególnych fazach zadania, parametrami statycznymi[8] (jeśli występują) oraz sposobem rozpoczęcia i zakończenia każdej fazy problemu.

W dalszej kolejności zdefiniować należy: warunki brzegowe każdej fazy zadania, warunki na granicy faz, a także podać górną oraz dolną wartość przedziału wartości dopuszczalnych zmiennych stanu, zmiennych sterujących i ograniczeń algebraicznych. Wymagane jest również podanie początkowego przybliżenia sterowania oraz trajektorii stanu.

Procedura rozwiązywania zadania optymalizacji wygląda następująco:

1. Zmienne stanu oraz sterowania poddawane są dyskretyzacji.
2. Zadanie sterowania optymalnego przekształcane jest do problemu NLP.
3. Zadanie optymalizacji nieliniowej z ograniczeniami rozwiązywane jest za pomocą algorytmów programowania nieliniowego dla warunków Karusha-Kuhna-Tuckera[9].

---

[8] Parametrami statycznymi są zmienne decyzyjne w procesie optymalizacji, które są niezależne od fazy zadania oraz zmiennej niezależnej.

[9] Warunki Karusha-Kuhna-Tuckera w przypadku minimalizacji funkcji celu $F(\mathbf{x})$ przy ograniczeniach $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0$ oraz $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \leq 0$ opisane są zależnościami [51]

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_x + \mathbf{b}_x^T \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{c}}_x^T \boldsymbol{\mu} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{\boldsymbol{\mu}}} = \tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = 0, \tilde{\boldsymbol{\mu}} \geq 0,$$

gdzie $L = F + \mathbf{b}^T \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\mathbf{c}}^T \tilde{\boldsymbol{\mu}}$ jest Lagrangianem, $\mathbf{F}_x$ jest gradientem funkcji celu, zaś $\mathbf{b}_x$ oraz $\tilde{\mathbf{c}}_x$ Jakobianem związanym odpowiednio z ograniczeniami równościowymi i nierównościowymi. Znak tyldy nad symbolami oznacza w tym przypadku zbiór aktywnych ograniczeń.

4. Szacowany jest błąd rozwiązania na podstawie stopnia naruszenia ograniczeń dynamiki układu (równań stanu) w punktach środkowych między węzłami kolokacyjnymi.
5. Jeżeli błąd rozwiązania przekracza założoną wartość graniczną następuje zagęszczenie siatki obliczeniowej i ponowne rozwiązanie zadania optymalizacji.
6. Jeśli błąd rozwiązania jest mniejszy niż założona dokładność rozwiązania obliczenia uznawane są za zakończone.

3.3.1. Siatka obliczeniowa oraz metody zagęszczania siatki

Węzły kolokacji znajdują się w punktach Legendre'a-Gaussa-Radaua. Ponieważ stan układu oraz sterowania aproksymowane są w węzłach kolokacji, położenie węzłów odgrywa istotną rolę w procesie zbieżności rozwiązania. Siatka obliczeniowa poddanego dyskretyzacji problemu składa się z przedziałów oraz ulokowanych w ich wnętrzu węzłów kolokacji. W iteracyjnym procesie zagęszczania siatki, modyfikacji podlegać mogą: rząd p wielomianu aproksymującego oraz liczba przedziałów i ich szerokość. Dwa podstawowe typy (metody) zagęszczania siatki to:

- typ h – stały rząd wielomianu aproksymującego, zmienna liczba przedziałów,
- typ p – stała liczba przedziałów, zmienny rząd wielomianu aproksymującego.

Rozwinięciem obydwu metod jest procedura zagęszczania siatki typu hp, zaimplementowana w oprogramowaniu GPOPS-II, będąca połączeniem obydwu wymienionych podejść. W kompetencji użytkownika oprogramowania leży wybór odmiany metody hp, które różnią się między sobą warunkami, dla których zwiększeniu ulega rząd wielomianu lub dokonywany jest podział przedziałów na mniejsze. Użytkownik dysponuje możliwością zdefiniowania minimalnej oraz maksymalnej liczby węzłów kolokacji w pojedynczym przedziale, ustalenia parametrów początkowej siatki obliczeniowej oraz przesunięcia środka ciężkości metody hp w kierunku typu h lub typu p. W ogólności, jeżeli błąd w danym przedziale siatki rozłożony jest w sposób równomierny, zwiększeniu ulega rząd wielomianu aproksymującego, w przeciwnym wypadku przedział powinien zostać podzielony na mniejsze.

3.3.2. Obliczanie pochodnych oraz gradientów

W trakcie numerycznego rozwiązywania zadania NLP konieczne jest wyznaczenie gradientu funkcji celu, a także Jakobianu oraz macierzy Hessego (hesjanu). Pochodne w programie GPOPS-II obliczane są numerycznie za pomocą ilorazu różnicowego lub różniczkowania algorytmicznego. Mogą również zostać wprowadzone w formie analitycznej. Domyślnie pochodne obliczane są za pomocą ilorazu różnicowego, który w ogólnym przypadku, dla funkcji $f(x)$, może zostać zapisany jako

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{3.44}$$

gdzie h jest długością kroku obliczeniowego. Dokładność metody zależy od długości kroku h, który powinien być odpowiednio mały.

Oprogramowanie GPOPS-II umożliwia zastosowanie dedykowanego oprogramowaniu MATLAB narzędzia typu open-source o nazwie ADiGator [61]. Narzędzie to przeznaczone jest do różniczkowania algorytmicznego (nazywanego również różniczkowaniem automatycznym), w którym różniczkowalny problem rozkładany jest na funkcje elementarne, a następnie wartość pochodnej obliczana jest zgodnie z regułą łańcuchową. Narzędzie ADiGator przekształca wprowadzoną przez użytkownika funkcję (która ma zostać poddana operacji różniczkowania) w nową funkcję programu MATLAB, która umożliwia obliczenie pochodnej (lub pochodnych) funkcji źródłowej.

W przypadku metod pośrednich opisywanych we wstępie do rozdziału, operacje matematyczne na symbolach wykonywane są za pomocą programów algebry komputerowej (najczęściej: Maple, Mathematica czy Maxima).

3.3.3. Skalowanie problemu

Różnice między przedziałami zmienności wielkości w wektorach **x** i **u** mogą w negatywny sposób wpłynąć na proces zbieżności zadania do rozwiązania optymalnego. W celu poprawy uwarunkowania procesu optymalizacji zmienne poddawane są skalowaniu. Praktyczna zasada skalowania zakłada sprowadzenie przedziału wartości każdej zmiennej $x \in< a, b >$ do przedziału $\tilde{x} \in< -0.5{,}0.5 >$.

W niniejszej pracy zrezygnowano z automatycznych metod skalowania zaimplementowanych w oprogramowaniu GPOPS-II na rzecz wytycznych zamieszczonych w pracy [51]. Za wielkości odniesienia potraktowano:

- długość l_0 równą rozstawowi osi pojazdu,
- masę m_0 równą masie pojazdu.

Po przeskalowaniu, rozstaw osi oraz masa pojazdu przyjmują bezwymiarową wartość równą jedności. Wprowadzona za jednostkę czasu wielkość $\sqrt{l_0/\mathrm{g}}$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, powoduje, że bezwymiarowa wartość przyspieszenia pojazdu równa jedności odpowiada przyspieszeniu ziemskiemu g.

W przypadku jednego z pojazdów analizowanych obliczeniowo w dalszej części pracy, wielkości l_0, m_0 i $\sqrt{l_0/g}$ przyjmują odpowiednio wartości 1.18 m, 143.50 kg oraz 0.347 s. Skalując przykładowo pewną prędkość pojazdu równą 25 m/s otrzymywany jest jej bezwymiarowy odpowiednik o wartości równej 7.35.

3.3.4. Zadanie sterowania optymalnego o jednej lub wielu fazach

Zadanie sterowania optymalnego w programie GPOPS-II może zostać zdefiniowane jako jedno lub wielofazowe. Różnice między poszczególnymi fazami zadania mogą wynikać z dynamiki układu, funkcji podcałkowej oraz ograniczeń algebraicznych. Warunkiem koniecznym jest zachowany kierunek zmian zmiennej niezależnej.

Zadania wielofazowe są charakterystyczne na przykład dla problemów wynoszenia rakiet w przestrzeń kosmiczną. Poszczególne fazy zadania związane są wówczas z odłączaniem się kolejnych stopni rakiety.

Rozwiązywane w rozdziale 4 niniejszej pracy zadania sterowania optymalnego będą zadaniami wielofazowymi, zaś w rozdziałach 5 i 6 składającymi się z jednej fazy. Stosowane podejście wynikać będzie z przyjętego modelu jezdni.

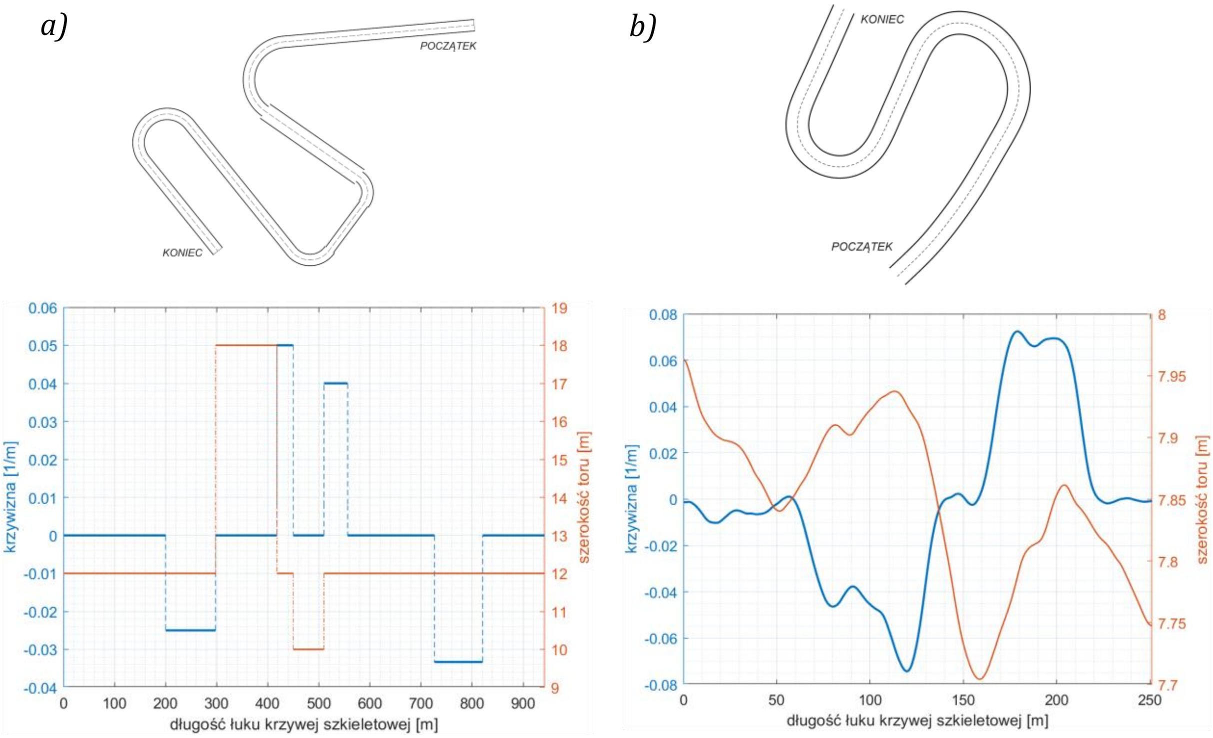
W zadaniach sterowania optymalnego z rozdziału 4 trasy manewrów opisane zostaną za pomocą pojedynczych segmentów: prostych oraz łuków o stałym promieniu. Przyjęta zostanie również stała szerokość jezdni w obrębie segmentów. W rozdziale 6 charakterystyki analizowanych tras opisane zostaną za pomocą funkcji w przybliżeniu ciągłych, których dziedziną będzie długość krzywej szkieletowej jezdni. Obydwie metody porównano na rys. 3.1.

Ze względu na skokową zmianę krzywizny oraz szerokości jezdni w segmentowym opisie trasy, każdemu segmentowi trasy przypisano osobną fazę zadania charakteryzującą się stałą wartością krzywizny oraz szerokości toru. W przypadku trasy z rys. 3.1a zdefiniowane w programie GPOPS-II zadanie sterowania optymalnego składałoby się z dziewięciu faz.

Dla tras opisanych za pomocą drugiej z wyszczególnionych metod, charakterystyki trasy interpolowano w węzłach kolokacji na podstawie zbioru dyskretnych wartości wyrażonych w funkcji długości krzywej szkieletowej jezdni.

3.3.5. Właściwości komputera wykorzystanego do obliczeń numerycznych

Prezentowane w dalszej części pracy przykłady obliczeniowe zostały rozwiązane za pomocą komputera przenośnego wyposażonego w procesor Intel Core i7-9750H oraz 16 GB pamięci RAM. Komputer pracował w systemie Windows 10. Obliczenia prowadzone były za pomocą środowiska MATLAB R2019a, programu GPOPS-II w wersji 2.3 oraz narzędzia ADiGator w wersji V1.5.



Rys. 3.1. Segmentowy opis trasy o skokowej zmianie krzywizny krzywej szkieletowej oraz szerokości jezdni (a), opis trasy z zachowaną ciągłością charakterystyk jezdni (b)

4. Zadanie minimalizacji czasu manewru

Formułując zadanie minimalizacji czasu manewru w warunkach ruchu quasi-statycznego potraktowano pojazd jako punkt materialny, zaś jego osiągi opisano za pomocą diagramów g-g. Na rys. 4.1 przedstawiono położenie pojazdu względem krzywej szkieletowej jezdni. Oś x układu współrzędnych A_{xyz} (związanego z pojazdem) jest styczna do trajektorii ruchu. Rozpatrywany będzie ruch płaski pojazdu.

Na podstawie rys. 4.1 mogą zostać zapisane następujące równania stanu

$$\dot{V} = a_x, \tag{4.1}$$

$$\dot{n} = V \sin \chi, \tag{4.2}$$

$$\dot{\chi} = \frac{a_y}{V} - \dot{\theta}, \tag{4.3}$$

gdzie V jest prędkością pojazdu wzdłuż trajektorii, a_x - przyspieszeniem wzdłużnym (stycznym), a_y - przyspieszeniem poprzecznym (dośrodkowym), n - położeniem poprzecznym względem krzywej szkieletowej, χ – odchyleniem stycznej do trajektorii ruchu względem stycznej do krzywej szkieletowej, zaś $\dot{n}$ rzutem prędkości V w kierunku środka krzywizny zakrętu.

Równanie (4.3) może zostać wyprowadzone z zależności wiążącej kąty θ i χ

$$\psi = \chi + \theta. \tag{4.4}$$

Zróżniczkowanie równania (4.4) prowadzi do zależności

$$\dot{\psi} = \dot{\chi} + \dot{\theta}. \tag{4.5}$$

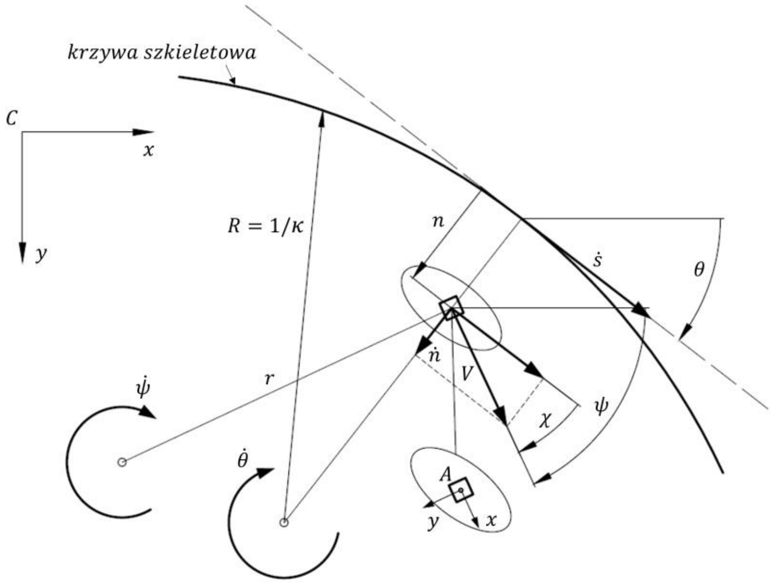
Przyspieszenie dośrodkowe a_y w chwilowym ruchu po okręgu opisuje równanie

$$a_y = \frac{V^2}{r}, \tag{4.6}$$

gdzie r jest chwilowym promieniem krzywizny trajektorii. Korzystając z rys. 4.1 można zapisać zależności

$$V = \dot{\psi} r, \tag{4.7}$$

$$\dot{s} = \dot{\theta}/\kappa, \tag{4.8}$$



Rys. 4.1. Położenie pojazdu względem krzywej szkieletowej jezdni

w których $\kappa = \kappa(s)$ oznacza krzywiznę krzywej szkieletowej jezdni. Zależności (4.6) – (4.8) pozwalają wyrazić równanie (4.3) jako

$$\dot{\chi} = \frac{a_y}{V} - \dot{s}\kappa. \tag{4.9}$$

W prezentowanych dalej rozważaniach, zmienna niezależna t zostanie zastąpiona parametrem naturalnym krzywej – współrzędną krzywoliniową s (długością krzywej). Przejście z dziedziny czasu t w dziedzinę współrzędnej s umożliwia reguła

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\dot{s}}. \tag{4.10}$$

Pochodną $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ opisuje zależność

$$\dot{s} = \frac{V\cos\chi}{1 - n\kappa}. \tag{4.11}$$

W sterowanym układzie opisanym równaniami różniczkowymi (4.1) – (4.3) zmiennymi sterującymi są: przyspieszenie wzdłużne a_x oraz przyspieszenie poprzeczne a_y. W niniejszej pracy jako zmienne sterujące wykorzystane zostały: pochodna przyspieszenia wzdłużnego (zryw wzdłużny j_x) oraz pochodna przyspieszenia poprzecznego (zryw poprzeczny j_y). Układ równań stanu został więc rozszerzony o dwa dodatkowe równania

$$a_x' = j_x, \tag{4.12}$$

$$a_y' = j_y. \tag{4.13}$$

Sterowany układ opisany jest za pomocą pięcioelementowego wektora zmiennych stanu

$$\mathbf{x} = \left[V\ n\ \chi\ a_x\ a_y\right]^T \tag{4.14}$$

oraz dwuelementowego wektora sterowań

$$\mathbf{u} = \left[j_x\ j_y\right]^T. \tag{4.15}$$

Analizowany problem jest zadaniem sterowania czasowo-optymalnego, w którym funkcjonał jakości $\mathcal{J}$ przyjmuje postać

$$\mathcal{J} = \int_{t_0}^{t_k} 1\mathrm{d}t = \int_{s_0}^{s_k} \frac{1}{\dot{s}}\mathrm{d}s. \tag{4.16}$$

Wielkości t_0 i t_k są odpowiednio chwilą początkową i końcową ruchu, zaś s_0 i s_k są odpowiednio długością krzywej szkieletowej w jej punkcie początkowym oraz końcowym.

Nierównościowe ograniczenie

$$-r_w(s)/2 \leq n \leq r_w(s)/2, \tag{4.17}$$

wymusza ruch pojazdu w obrębie jezdni o szerokości $r_w(s)$.

4.1. Ograniczenia algebraiczne na zmienne stanu i zmienne sterujące

4.1.1. Diagram przyspieszeń g-g

Obwiednia diagramu g-g została opisana w układzie współrzędnych biegunowych. Promień wodzący ρ dowolnego punktu obwiedni zdefiniowany został jako

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{a_x}{\mathrm{g}}\right)^2 + \left(\frac{a_y}{\mathrm{g}}\right)^2}, \tag{4.18}$$

zaś amplituda punktu α wyrażona została za pomocą wzoru

$$\alpha = \mathrm{arctan2}\left(a_y, a_x\right). \tag{4.19}$$

Zależności (4.18) i (4.19) pozwalają wygenerować hiperpowierzchnię $\rho_{max}(\alpha, V)$ ograniczającą przyspieszenia pojazdu dla różnych prędkości V (rys. 4.2), dla której obowiązujący jest warunek periodyczności

$$\rho(\pi, V) = \rho(-\pi, V). \quad (4.20)$$

Ograniczone obwiednią diagramu g-g osiągi pojazdu opisuje nierównościowe ograniczenie

$$\rho \leq \rho_{max}(\alpha, V). \quad (4.21)$$

Amplituda α została w niniejszej pracy zdefiniowana jako $\mathrm{arctan2}(a_y, a_x)$, zamiast wykorzystywanego w literaturze sformułowania $\mathrm{arctan2}(a_x, a_y)$, ponieważ zależność (4.19) zapewnia gładsze przejście na granicy $\alpha = \pi$ i $\alpha = -\pi$, co sprzyja dobremu uwarunkowaniu procesu poszukiwania optymalnej trajektorii ruchu. Graficzna interpretacja wielkości ρ oraz α została przedstawiona na rys. 2.3a w podrozdziale 2.2.

Hiperpowierzchnia $\rho_{max}(\alpha, V)$ powstaje w wyniku interpolacji funkcjami sklejanymi diagramów g-g wyznaczonych dla różnych wartości α oraz V.

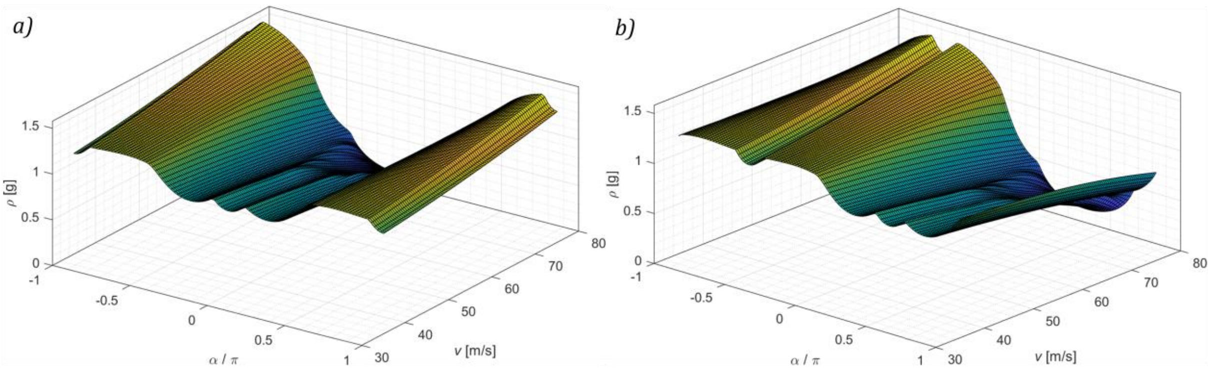
4.1.2. Zryw poprzeczny

Tempo zmian przyspieszenia poprzecznego ograniczone jest skończoną wartością momentu przykładanego do kierownicy oraz rosnącą wraz z prędkością jazdy wartością momentów żyroskopowych. W związku z tym zasadne jest wprowadzenie następującego ograniczenia na przedział wartości dopuszczalnych zrywu poprzecznego

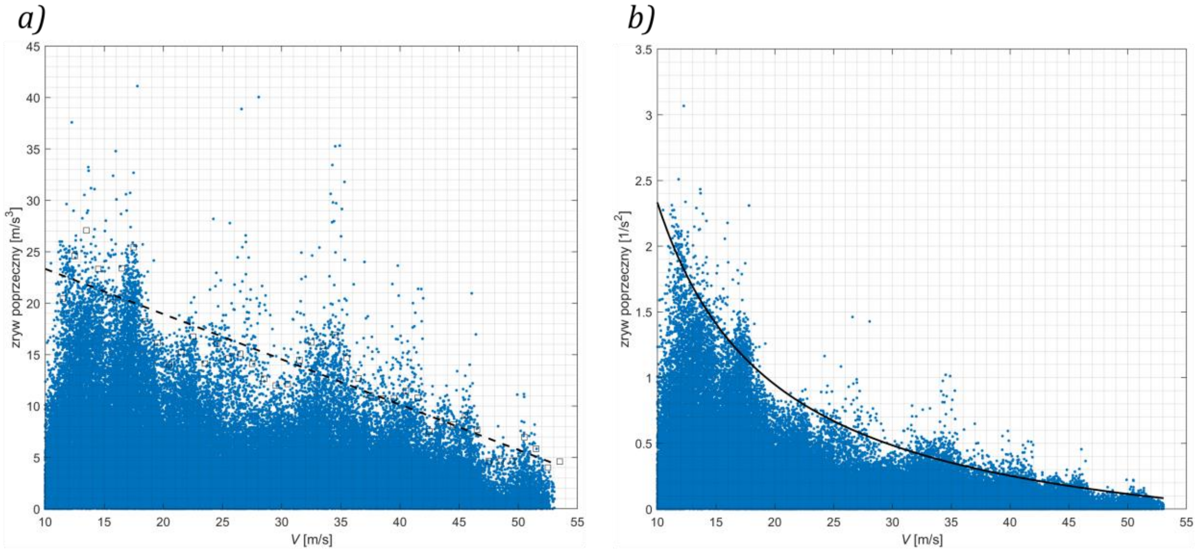
$$j_y^2 \leq J_y^2, \quad (4.22)$$

w którym $J_y = J_y(V)$ jest funkcją zależną od prędkości V.

Równanie funkcji J_y zostało w niniejszej pracy wyznaczone na podstawie danych eksperymentalnych. Na rys. 4.3 przedstawiony został wykres punktowy wartości



Rys. 4.2. Hiperpowierzchnia ograniczająca osiągi pojazdu: dla amplitudy α wyrażonej za pomocą wzoru $\alpha = \mathrm{arctan2}(a_y, a_x)$ (a) oraz $\alpha = \mathrm{arctan2}(a_x, a_y)$ (b)



Rys. 4.3. Eksperymentalnie zarejestrowane wartości zrywu poprzecznego wraz z wyznaczoną krzywą ograniczającą: w dziedzinie czasu (a) oraz w dziedzinie współrzędnej krzywoliniowej s (b)

bezwzględnej zarejestrowanego eksperymentalnie zrywu poprzecznego. Oś pozioma przedstawia prędkość V. Prezentowane dane empiryczne zostały zebrane za pomocą pokładowych układów pomiarowych rejestrujących dane satelitarne. W badaniach skorzystano z usług licencjonowanych zawodników sportu motocyklowego. Motocyklami testowymi były: minimotocykl PitBike oraz lekki motocykl wyścigowy klasy Supersport 300. Badania zostały przeprowadzone na różnych pełnowymiarowych oraz kartingowych torach wyścigowych.

Na podstawie analizy wykresu z rys. 4.3 stwierdzono, że obwiednia zaprezentowanych danych może zostać z wystarczającą dokładnością aproksymowana linią prostą opisaną równaniem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a_y\right) = \beta_0 + \beta_1 v, \tag{4.23}$$

gdzie β_0 oraz β_1 są współczynnikami poszukiwanej prostej. Opierając się na metodzie opisanej w pracach [62, 63], zbiór prędkości v podzielony został na przedziały o długości Δv. Następnie, dla każdego i-tego przedziału wyznaczony został punkt o współrzędnych

$$\left(\frac{v_i + v_{i+1}}{2}, 3\sigma_i\right), \tag{4.24}$$

gdzie σ_i jest odchyleniem standardowym, zaś v_{i+1} związane jest z v_i zależnością

$$v_{i+1} = v_i + \Delta v. \tag{4.25}$$

Zmienność przyspieszenia poprzecznego (przechylenia motocykla) jest niezależna od kierunku przechylania (abstrahując od preferencji i umiejętności kierowcy). W związku z tym posiadany zestaw danych uzupełniony został o nowy zbiór punktów, który powstał w wyniku odbicia lustrzanego danych doświadczalnych względem osi odciętych. W wyniku tej operacji otrzymano zerową wartość średnią w każdym z przedziałów. Następnie, aby wyznaczyć współczynniki β_0 i β_1 rozwiązany został problem regresji liniowej, w którym aproksymowanymi danymi były punkty o współrzędnych (4.24).

Wyrażone w dziedzinie czasu równanie (4.23) przyjmuje w dziedzinie współrzędnej krzywoliniowej s postać następującego hiperbolicznego ograniczenia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(a_y\right) = J_y(V) = \frac{\beta_0}{v} + \beta_1 = \frac{\beta_0}{V} + \beta_1. \tag{4.26}$$

Ograniczenia opisane równaniami (4.23) i (4.26) zostały przedstawione na rys. 4.3 odpowiednio linią przerywaną (4.3a) oraz linią ciągłą (rys. 4.3b).

4.1.3. Zryw wzdłużny

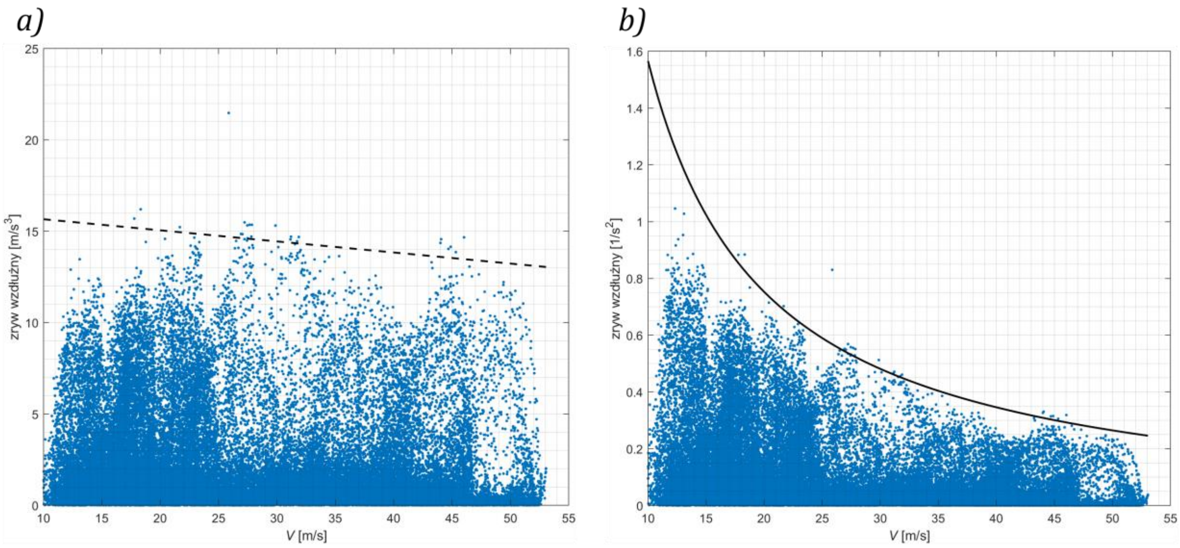
Nierównościowe ograniczenie nałożone na zryw wzdłużny j_x może zostać zapisane jako

$$J_{x_d} \leq j_x \leq J_{x_a}, \tag{4.27}$$

gdzie $J_{x_d} = J_{x_d}(V)$ jest funkcją ograniczającą dla ujemnych gradientów przyspieszenia a_x, zaś $J_{x_a} = J_{x_a}(V)$ funkcją ograniczającą dla dodatnich gradientów a_x.

Na rys. 4.4 przedstawiony został wykres punktowy modułu eksperymentalnie zarejestrowanego zrywu wzdłużnego j_x. Prezentowane dane ograniczono do zrywu j_x dla ujemnych gradientów przyspieszenia a_x. Graniczna wartość zrywu J_{x_d} jest w niewielkim stopniu zależna od prędkości pojazdu i powiązana jest ze zmianą obciążenia kół w fazie hamowania. Zryw wzdłużny dla dodatnich gradientów przyspieszenia a_x przyjmuje mniejsze wartości graniczne (rys. 6.34b w podrozdziale 6.5.3), ponieważ faza przejściowa między hamowaniem a przyspieszaniem, w której obserwowane jest ekstremum zrywu, następuje w środkowej części zakrętu przy maksymalnej wartości przechylenia. Wraz ze wzrostem prędkości V maleje także zdolność pojazdu do przyspieszania.

W prezentowanych w dalszej części rozdziału przykładach przyjęto, że graniczna dopuszczalna wartość zrywu wzdłużnego dla ujemnych i dodatnich gradientów a_x będzie równa co do modułu, co można zapisać zależnością $J_{x_a} = -J_{x_d} = J_x$.



Rys. 4.4. Eksperymentalnie zarejestrowane wartości zrywu wzdłużnego dla ujemnych gradientów a_x wraz z krzywą ograniczającą: w dziedzinie czasu (a) oraz w dziedzinie współrzędnej krzywoliniowej (b). Rysunek przedstawia moduł zrywu (wartość bezwzględną)

Alternatywnie do (4.24), rzędna aproksymowanych punktów może zostać przyjęta jako największa wartość zrywu zarejestrowana w danym przedziale prędkości Δv. Przykład wyznaczonego w ten sposób ograniczenia przedstawiony został na rys. 4.4.

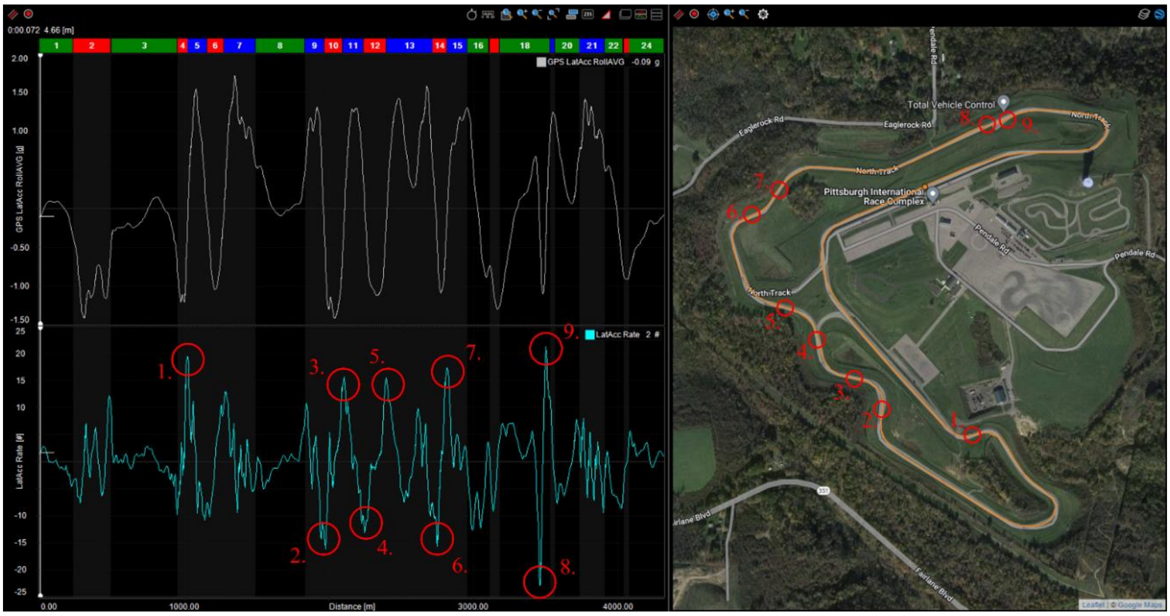
4.1.4. Komentarz dotyczący ograniczeń na zmienne sterujące

W przypadku ruchu po torze wyścigowym, ekstremalne wartości zrywu poprzecznego rejestrowane są przede wszystkim w szykanach (rys. 4.5). Oznacza to, że dla danej trasy, ekstremum zrywu j_y występować będzie co najwyżej kilkukrotnie i tylko dla pewnego przedziału prędkości ruchu. Jednakże, jak zostanie wykazane na prezentowanych w dalszej części pracy przykładach, ograniczenie J_y wyznaczone w oparciu o pomiary dla kilku obiektów wyścigowych będzie wystarczające do uzyskania satysfakcjonującej zgodności wyników ZSO z eksperymentem.

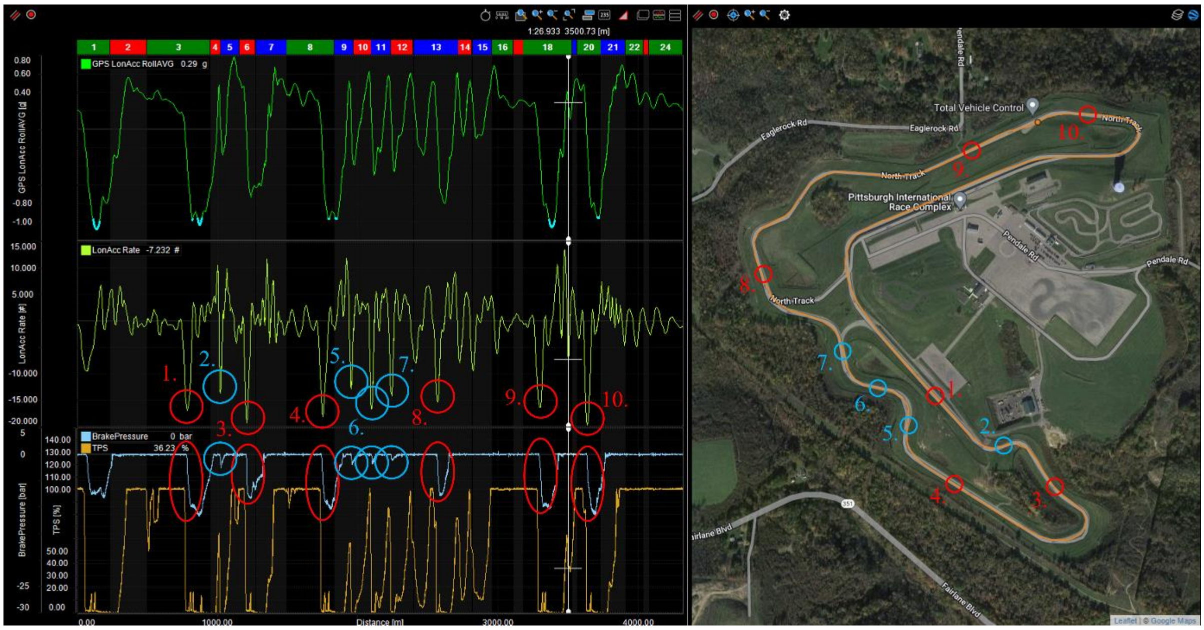
Powyższe uwagi dotyczą również zrywu wzdłużnego. Maksymalne wartości dla ujemnych gradientów przyspieszenia a_x osiągane są na początku fazy hamowania, zaś dla gradientów dodatnich we wczesnej fazie przyspieszania (rys. 4.6). Pokrycie pożądanego zakresu prędkości jest więc w tym przypadku łatwiejsze, ponieważ ekstremalne wartości zrywu wzdłużnego towarzyszą przebiegowi większości manewrów skręcania.

4.2. Opis jezdni

Opis trasy wymaga znajomości krzywizny krzywej szkieletowej $\kappa(s)$, a także szerokości



Rys. 4.5. Miejsca na trasie, dla których obserwowana jest maksymalna wartość zrywu poprzecznego. Przyspieszenie poprzeczne (u góry), pochodna przyspieszenia poprzecznego (na dole). Zrzut ekranu z aplikacji AIM Race Studio 3 stosowanej do analizy danych z pokładowych układów pomiarowych firmy AIM. Analizowane dane pochodzą ze strony internetowej *nolanlamkinracing.com*



Rys. 4.6. Miejsca trasy, dla których obserwowana jest maksymalna wartość zrywu wzdłużnego. Na wykresach (kolejno od góry): przyspieszenie wzdłużne, pochodna po czasie przyspieszenia wzdłużnego, procentowe otwarcie przepustnicy wraz z ciśnieniem w układzie hamulcowym przedniego koła. Niebieskimi okręgami oznaczono fragmenty toru, które zostały zlokalizowane wcześniej na rys. 4.5

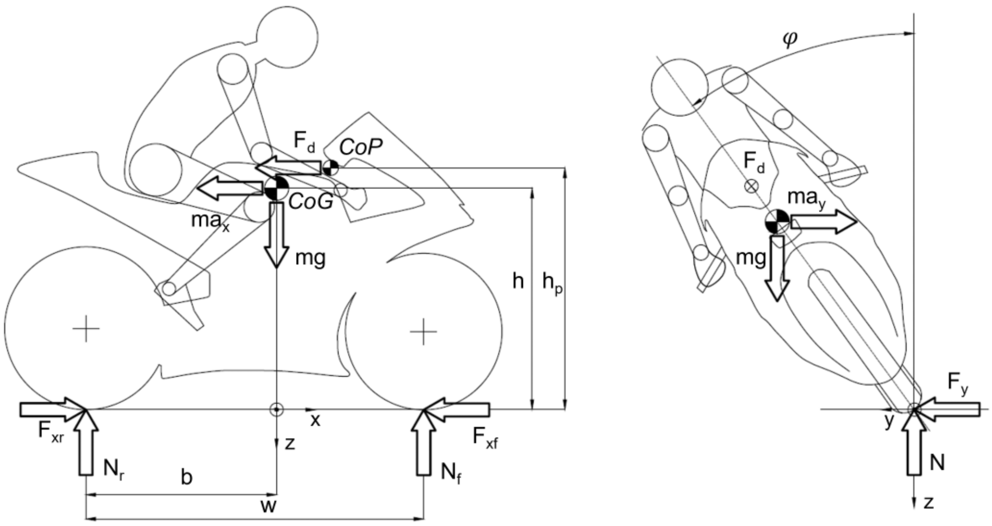
jezdni $r_w(s)$. Trasy manewrów w niniejszym rozdziale potraktowane zostały jako zbiory segmentów: łuków i prostych, o znanej długości linii środkowej, stałej krzywiźnie oraz szerokości. Ta znana z analiz o ustalonej trajektorii ruchu metoda, pozwala na odwzorowanie rzeczywistych tras manewrów na podstawie dokumentacji technicznej lub zdjęć satelitarnych. Umożliwia także szybkie generowanie fikcyjnych scenariuszy testowych oraz pozwala spełnić warunek domknięcia trasy (w przypadku torów o pętli zamkniętej).

Drugie z często stosowanych w literaturze podejść polega na sformułowaniu zadania sterowania optymalnego, w którym, na podstawie informacji o współrzędnych punktów na krawędziach rzeczywistego toru wyznaczane są niezbędne charakterystyki jezdni. Metoda ta zostanie szczegółowo omówiona w rozdziale 5.

Przyjęty opis trasy manewru wpływa na sposób definicji ZSO w programie GPOPS-II. Aspekt ten poruszony został w podrozdziale 3.3.4.

4.3. Model pojazdu

Osiągi analizowanych pojazdów zostały scharakteryzowane za pomocą diagramów g-g. W przyjętym quasi-statycznym modelu pojazdu pominięto: przyspieszenie kątowe pojazdu, kąty znoszenia oraz bezwładność elementów znajdujących się w ruchu obrotowym. Założono również stałą wartość przyspieszenia wzdłużnego i poprzecznego oraz przyjęto, że zawieszenie pojazdu jest sztywne, kąt skrętu kierownicy równy jest zeru, opony są dyskami o nieskończenie małej grubości, zaś współczynniki przyczepności przylgowej w kierunku wzdłużnym μ_x i poprzecznym μ_y są identyczne dla przedniej i tylnej opony. Model pojazdu przedstawiony został na rys. 4.7, na którym wprowadzono następujące oznaczenia: m – całkowita masa pojazdu (motocykla wraz z kierowcą), w – rozstaw osi, b – odległość środka ciężkości od punktu styku tylnego koła z jezdnią, h - wysokość środka ciężkości, h_p – wysokość środka ciśnienia, w którym przyłożona jest wypadkowa siła oporu aerodynamicznego F_d. Wielkości F_x, F_y i N oznaczają odpowiednio wzdłużną, poprzeczną oraz pionową siłę reakcji jezdni na tylną (indeks dolny r) oraz przednią (indeks dolny f) oponę. Model pojazdu bazuje na zależnościach zamieszczonych w pracy [6]. Uzupełniony został o dodatkowe źródło oporu (uszczegółowiony względem [28] opór toczenia) oraz charakterystykę trakcyjną. Przyjęty model umożliwia analityczny opis obwiedni osiągów (diagramu g-g) pojazdu jednośladowego.



Rys. 4.7. Model pojazdu

Na podstawie rys. 4.7 mogą zostać zapisane następujące quasi-statyczne równania ruchu

$$\sum F_x\colon\ ma_x = F_{xr} - F_{xf} - F_d, \tag{4.28}$$

$$\sum F_y\colon\ ma_y = F_{yr} + F_{yf}, \tag{4.29}$$

$$\sum F_z\colon\ mg = N_r + N_f, \tag{4.30}$$

$$\sum M_x\colon\ ma_y h\cos\varphi = mgh\sin\varphi, \tag{4.31}$$

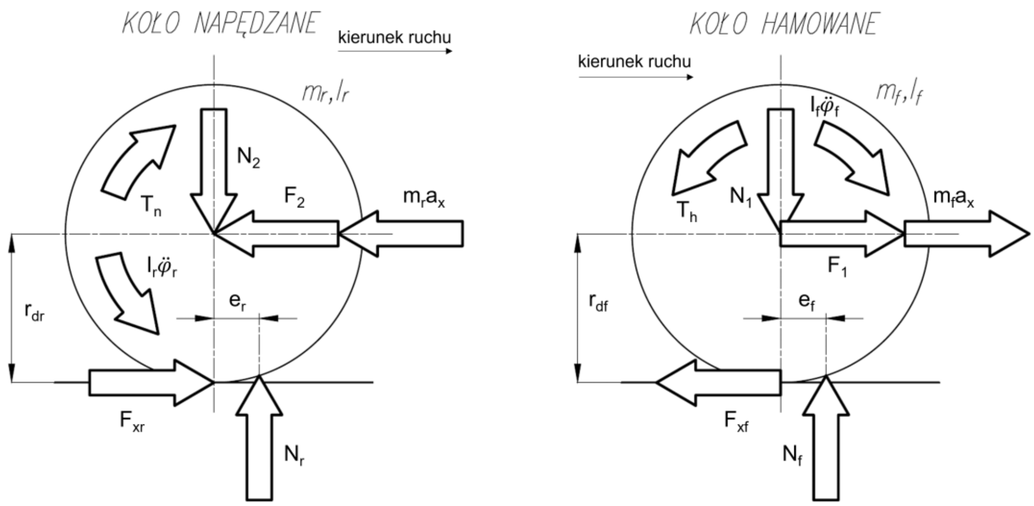
$$\sum M_y\colon\ ma_x h\cos\varphi = bN_r - (w-b)N_f - F_d h_p\cos\varphi\,, \tag{4.32}$$

$$\sum M_z\colon ma_x h\sin\varphi = bF_{yr} - (w-b)F_{yf} - F_d h_p\sin\varphi. \tag{4.33}$$

Zgodnie z rys. 4.8 przedstawiającym napędzane koło tylne o masie m_r oraz hamowane koło przednie o masie m_f zapisać można następujące zależności na siły wzdłużne F_{xr} oraz F_{xf}

$$F_{xr} = F_R - \frac{e_r}{r_{d_r}} N_r - \frac{I_r}{r_{d_r}}\ddot{\varphi}_r, \tag{4.34}$$

$$F_{xf} = F_F + \frac{e_f}{r_{d_f}} N_f - \frac{I_f}{r_{d_f}}\ddot{\varphi}_f, \tag{4.35}$$



Rys. 4.8. Siły i momenty działające na koło napędzane (a) oraz koło hamowane (b)

gdzie F_R jest siłą napędową związaną z momentem napędowym T_n zależnością $F_R = T_n/r_{dr}$, F_F – siłą hamowania związaną z momentem hamującym T_h zależnością $F_F = T_h/r_{df}$, e_r i e_f – przesunięciami pionowej reakcji nawierzchni w wyniku niesymetrycznego rozkładu nacisków w śladzie opony, r_{d_r} i r_{d_f} są odpowiednio promieniem dynamicznym tylnej oraz przedniej opony, I_r i I_f – momentem bezwładności tylnego oraz przedniego koła, zaś $\ddot{\varphi}_r$ i $\ddot{\varphi}_f$ są przyspieszeniami kątowymi kół (odpowiednio tylnego oraz przedniego). Wprowadzone na rys. 4.8 siły F_1, F_2, N_1 i N_2 symbolizują obciążenia działające na koła pojazdu. W zależności od warunków ruchu, koło tylne może być kołem napędzanym, kołem hamowanym, jak również kołem toczonym (siła F_R może przyjmować wartość ujemną, dodatnią lub równą zero). Koło przednie może być kołem toczonym albo kołem hamowanym (siła F_F może przyjmować wartość większą lub równą zero).

Pominięcie w (4.34) i (4.35) składników związanych z bezwładnością kół (zgodnie z przyjętymi założeniami modelu) oraz wprowadzenie współczynnika oporu toczenia $f_w = e_r/r_{dr} = e_f/r_{df}$ prowadzi do zależności

$$F_{xr} = F_R - f_w N_r, \tag{4.36}$$

$$F_{xf} = F_F + f_w N_f. \tag{4.37}$$

Składniki $f_w N_r$ i $f_w N_f$ reprezentują odpowiednio opór toczenia tylnej i przedniej opony, a ich suma równa jest sile całkowitego oporu toczenia

$$F_w = f_w N_r + f_w N_f = F_{wr} + F_{wf} = f_w m\mathrm{g}. \tag{4.38}$$

Normalne reakcje nawierzchni N_r oraz N_f mogą zostać wyznaczone za pomocą zależności

$$N_r = \frac{\left(ma_x h + F_d h_p\right)\cos\varphi + (w-b)m\mathrm{g}}{w}, \tag{4.39}$$

$$N_f = m\mathrm{g} - N_r. \tag{4.40}$$

Siła oporu aerodynamicznego F_d opisana jest równaniem

$$F_d = 0.5\rho_a C_d A V^2, \tag{4.41}$$

gdzie ρ_a jest gęstością powietrza, C_d - współczynnikiem oporu powietrza, zaś A jest polem powierzchni czołowej.

Przechylenie motocykla φ związane jest z przyspieszeniem ziemskim g i przyspieszeniem poprzecznym a_y zależnością

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_y}{\mathrm{g}}. \tag{4.42}$$

Obwiednia diagramu g-g jest konturem wewnętrznym powstałym z przecięcia wyznaczonych dla różnych warunków ruchu krzywych ograniczających osiągi pojazdu (rys. 4.9a).

Górna połowa diagramu g-g ograniczona jest przyczepnością tylnej opony, co można zapisać za pomocą równania

$$\left(\frac{F_{xr}}{\mu_x N_r}\right)^2 + \left(\frac{F_{yr}}{\mu_y N_r}\right)^2 = 1. \tag{4.43}$$

Przyjmując zerową wartość działającej na przednie koło siły hamowania F_F oraz korzystając z równań (4.28) – (4.33) i (4.43) wyprowadzić można zależność

$$\frac{1}{\mu_x^2}\left(\frac{w(ma_x + F_d + F_{wf})\sqrt{a_y^2 + \mathrm{g}^2}}{\mathrm{g}\left(m\left(a_x h + (w-b)\sqrt{a_y^2 + \mathrm{g}^2}\right) + F_d h_p\right)}\right)^2 + \frac{1}{\mu_y^2}\left(\frac{a_y}{\mathrm{g}}\right)^2 = 1, \tag{4.44}$$

którą przedstawia krzywa nr 1 na rys. 4.9a.

Dolną połowę diagramu g-g ogranicza przyczepność opon w trakcie manewru hamowania. Większość motocykli wyposażona jest w niezależny układ hamulcowy przedniego i tylnego koła. Rozdział siły hamowania na poszczególne koła zależy od techniki hamowania oraz preferencji kierowcy. Spotykane są dwie techniki hamowania:

- za pomocą obydwu układów hamulcowych – technika bardziej efektywna, lecz trudniejsza do kontroli,
- wyłącznie za pomocą układu hamulcowego przedniego koła.

Optymalna strategia hamowania zakłada jednoczesne wykorzystanie dostępnej przyczepności obydwu opon. Zgodnie z założeniem o równej wartości współczynnika przyczepności przylgowej przedniej i tylnej opony zapisać można zależność

$$\left(\frac{-F_{xf}+F_{xr}}{\mu_x(N_f+N_r)}\right)^2+\left(\frac{F_{yf}+F_{yr}}{\mu_y(N_f+N_r)}\right)^2=1, \tag{4.45}$$

która prowadzi do równania

$$a_x=-\left(\mu_x \mathrm{g}\sqrt{1-\frac{1}{\mu_y^2}\left(\frac{a_y}{\mathrm{g}}\right)^2}+\frac{F_d}{m}\right), \tag{4.46}$$

reprezentowanego na rys. 4.9a krzywą nr 5.

Limit osiągów w trakcie manewru hamowania wyłącznie za pomocą układu hamulcowego przedniego koła determinuje przyczepność przedniej opony, którą można zapisać za pomocą zależności

$$\left(\frac{F_{xf}}{\mu_x N_f}\right)^2+\left(\frac{F_{yf}}{\mu_y N_f}\right)^2=1. \tag{4.47}$$

Przyjmując zerową wartość siły wzdłużnej F_R, wzór opisujący krzywą nr 6 z rys. 4.9a przyjmuje postać

$$\frac{1}{\mu_x^2}\left(\frac{w(ma_x+F_d+F_{wr})\sqrt{a_y^2+\mathrm{g}^2}}{g\left(m\left(b\sqrt{a_y^2+\mathrm{g}^2}-a_xh\right)-F_dh_p\right)}\right)^2+\frac{1}{\mu_y^2}\left(\frac{a_y}{\mathrm{g}}\right)^2=1. \tag{4.48}$$

W trakcie intensywnego hamowania może dojść do sytuacji, w której tylne koło utraci kontakt z jezdnią (z ang. *stoppie*). Warunek podniesienia tylnego koła nad powierzchnię jezdni (zerowa pionowa reakcja N_r na tylną oponę) reprezentowany jest na rys. 4.9a krzywą nr 4 i opisany został zależnością

$$a_x=-\frac{1}{h}\left((w-b)\sqrt{a_y^2+\mathrm{g}^2}+\frac{1}{m}F_dh_p\right). \tag{4.49}$$

Analogiczna sytuacja dotyczy fazy przyspieszania. Przy dostatecznie dużej wartości dodatniego przyspieszenia wzdłużnego a_x może dojść do sytuacji, w której przednie koło utraci kontakt z nawierzchnią (z ang. *wheelie*). Przypadek ten opisany jest równaniem

$$a_x = \frac{1}{h}\left(b\sqrt{a_y^2 + g^2} - \frac{1}{m}F_d h_p\right), \tag{4.50}$$

które zostało otrzymane na podstawie zależności (4.40) dla zerowej wartości pionowej reakcji N_f. Warunek oderwania przedniego koła od nawierzchni został zobrazowany na rys. 4.9a krzywą oznaczoną numerem 3.

Maksymalne dodatnie przyspieszenie wzdłużne ograniczone jest ponadto maksymalną wartością siły napędowej $F_{R_{max}} = F_{R_{max}}(V)$. Ograniczenie to może zostać zapisane równaniem

$$a_x = \frac{1}{m}\left(F_{R_{max}} - F_d - F_w\right) \tag{4.51}$$

i przedstawione jest na rys. 4.9a za pomocą krzywej oznaczonej numerem 2. W przypadku znajomości momentów bezwładności wirujących elementów motocykla, masa m w równaniu (4.51) może zostać zastąpiona masą zastępczą m^* [64].

Układ napędowy motocykla składa się z silnika spalinowego lub elektrycznego, skrzyni biegów oraz przekładni końcowej. W celu opisania siły napędowej wykorzystywany jest wykres zwany charakterystyką trakcyjną, którego przykład przedstawiony został na rys. 4.9b. Szarym kolorem oznaczono krzywe reprezentujące siłę napędową na każdym biegu, zaś kolorem niebieskim oznaczono obwiednię wykresu przedstawiającą maksymalną siłę napędową $F_{R_{max}}$.

Charakterystyki trakcyjne analizowanych w dalszej części rozprawy pojazdów zostały wyznaczone na podstawie charakterystyki zewnętrznej ich silników. Charakterystyka zewnętrzna silnika przedstawia zależność między momentem obrotowym silnika a jego prędkością obrotową i wyznaczana jest przy pełnym jego obciążeniu.

Aby wyznaczyć charakterystykę trakcyjną pojazdu należy w pierwszej kolejności określić relację między liniową prędkością pojazdu (liniową prędkością tylnego koła), a prędkością obrotową silnika n_e, która zwyczajowo wyrażona jest w jednostkach [obr/min]. Relacja między wielkościami V i n_e [obr/min] opisana jest za pomocą zależności

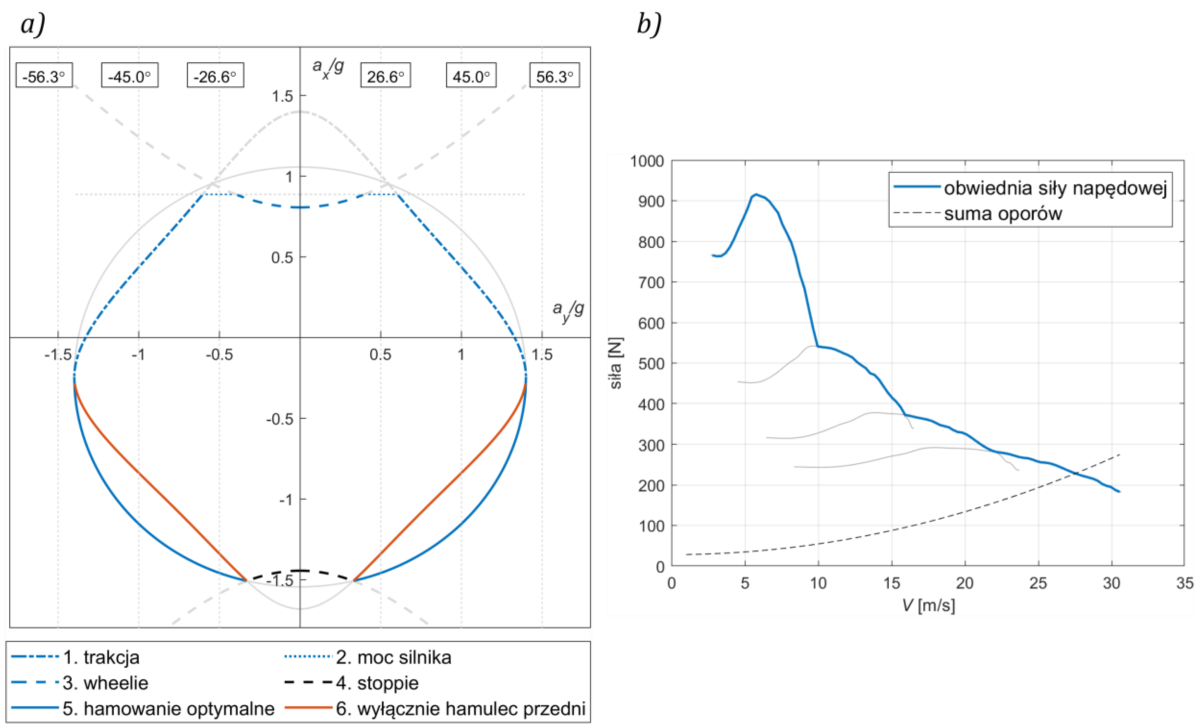
$$n_e = \frac{30\, i_p i_g i_s V}{\pi r_{d_r}}, \tag{4.52}$$

gdzie V jest prędkością liniową pojazdu, i_p - przełożeniem pierwotnym, i_g - przełożeniem skrzyni biegów, i_s - przełożeniem przekładni końcowej. Wielkość r_{d_r} jest promieniem dynamicznym tylnej opony zależnym od warunków ruchu, ciśnienia powietrza w oponie, obciążenia i prędkości ruchu, jak również kąta przechylenia motocykla. Ze względu na zbliżony do eliptycznego kształt przekroju poprzecznego ogumienia pojazdu jednośladowego, zwiększeniu kąta przechyłu towarzyszy zwiększenie prędkości obrotowej n_e. Przechył motocykla powoduje więc zmianę położenia punktu pracy na charakterystyce silnika. Zależność tę jednak pominięto, ponieważ wprowadzała nieregularności obwiedni diagramu g-g skutkujące problemami z uzyskaniem zbieżności w procesie rozwiązywania zadania sterowania optymalnego.

Niezbędny do wyznaczenia charakterystyki trakcyjnej pojazdu moment napędowy T_n na tylnym kole może zostać obliczony z zależności

$$T_n = T_e i_p i_g i_s \eta v_e, \tag{4.53}$$

gdzie T_e jest momentem obrotowym silnika odpowiadającym prędkości obrotowej n_e, zaś $\eta = \eta_s \eta_g$ jest sprawnością układu napędowego. Symbolem η_g oznaczono sprawność



Rys. 4.9. Analitycznie wyznaczony diagram g-g osiągów motocykla (a) oraz przykład charakterystyki trakcyjnej (b)

skrzyni biegów, zaś symbolem η_s sprawność przekładni końcowej. Wielkość v_e jest współczynnikiem charakteryzującym stosunek momentu silnika pracującego w stanie nieustalonym względem silnika pracującego w stanie ustalonym (z punktu widzenia rozwiązywanego zagadnienia interesujący jest nieustalony stan pracy silnika). W niniejszej pracy przyjęto $v_e = 1.00$ ze względu na to, że charakterystyki prędkościowe silników rejestrowane były na hamowni podwoziowej w stanie nieustalonym. W przypadku charakterystyki silnika rejestrowanej w stanie ustalonym, wielkość v_e może zostać wyznaczona z zależności zamieszczonych w pracy [65].

Poszukiwaną siłę napędową $F_{R_{max}}$ opisuje wzór

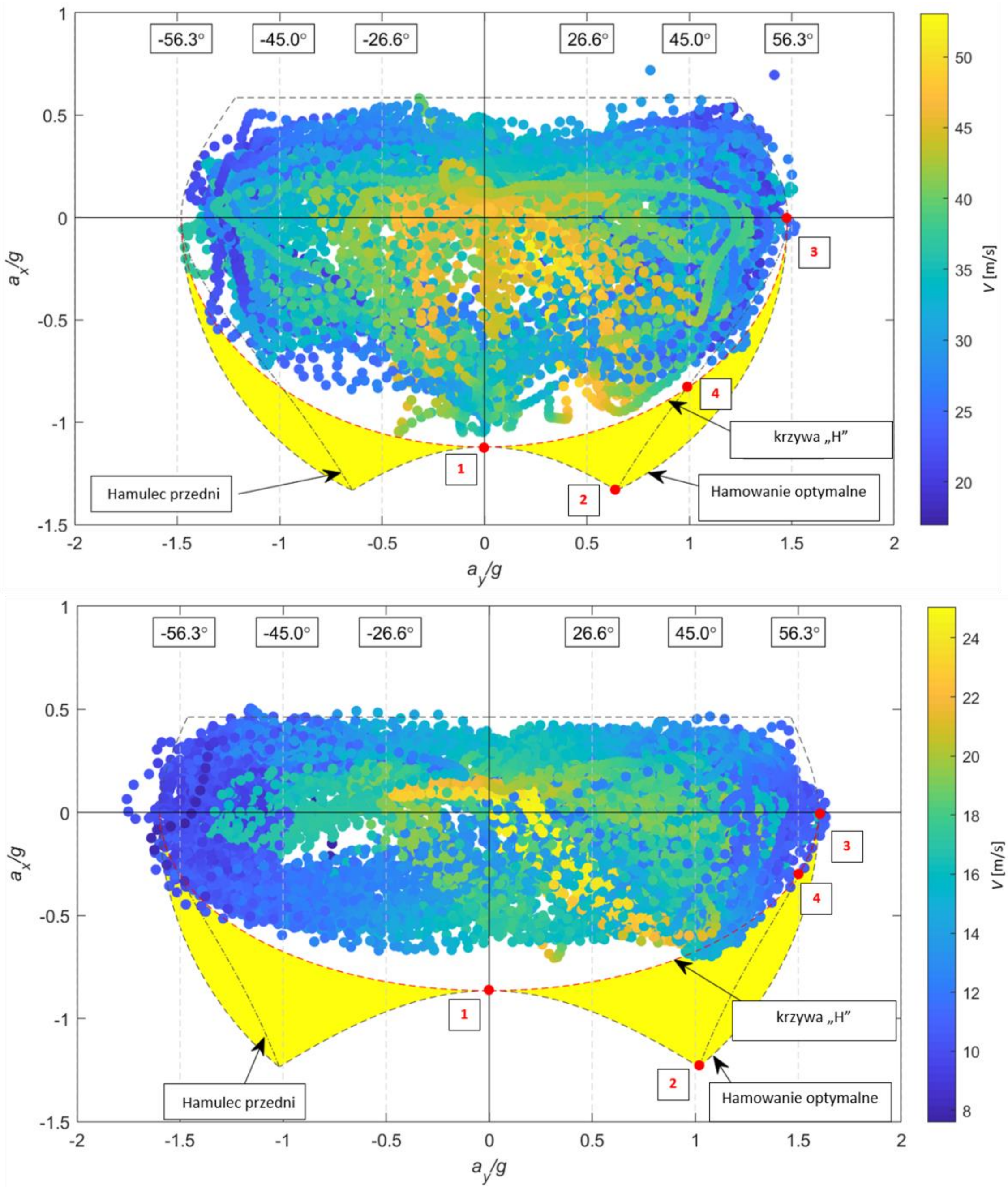
$$F_{R_{max}}(V) = \frac{T_{n_{max}}(V)}{r_{d_r}}. \tag{4.54}$$

4.3.1. <u>Różnice między analityczną i eksperymentalną obwiednią diagramu g-g</u>

Obwiednia diagramu g-g może zostać wyznaczona w sposób analityczny, eksperymentalny bądź jako kombinacja obydwu metod. Na rys. 4.10 zostały przedstawione eksperymentalne wartości przyspieszeń zarejestrowane dla motocykla klasy Supersport 300 (rys. 4.10a) oraz minimotocykla PitBike (rys. 4.10b). Przyspieszenia (punkty) na rys. 4.10 pokolorowano zgodnie z wartością prędkości, przy której zostały zarejestrowane. Dane z rys. 4.10a pochodzą od kierowcy, który korzystał z obydwu układów hamulcowych, zaś przedstawione na rys. 4.10b od zawodnika, który hamował wyłącznie za pomocą układu hamulcowego przedniego koła. Na rys. 4.10 zostały również naniesione analityczne diagramy g-g, które w celu ułatwienia interpretacji wyników wygenerowane zostały dla najmniejszej zarejestrowanej prędkości danego pojazdu.

Pokolorowany na żółto obszar jest niewykorzystanym fragmentem analitycznego diagramu g-g. Powód występowania tego obszaru wyjaśnić można za pomocą przykładu, w którym kierowca inicjuje hamowanie przy zerowej wartości przyspieszenia poprzecznego (zerowe przechylenie) i zaczyna przechylać motocykl w kierunku zakrętu. Następnie, podążając zgodnie z obwiednią analitycznego diagramu g-g, kierowca powinien zwiększać wartość opóźnienia, aż do osiągnięcia przyspieszenia poprzecznego odpowiadającego punktowi nr 2 na rys. 4.10, by następnie progresywnie zmniejszać opóźnienie aż do punktu nr 3 odpowiadającego maksymalnej wartości przyspieszenia poprzecznego. Ścieżka między punktami 1 i 2 jest nieintuicyjna i trudna do kontroli ze względu na konieczność jednoczesnego przechylania motocykla i zwiększania wartości a)

b)



Rys. 4.10. Eksperymentalnie zarejestrowane diagramy g-g oraz propozycja półempirycznej obwiedni diagramu: motocykl klasy Supersport 300 (a), minimotocykl PitBike (b)

opóźnienia. Należy jednak zaznaczyć, że wykorzystanie pokolorowanego na żółto obszaru nie jest niemożliwe, jednakże wymaga od kierowcy wysokich umiejętności kontroli pojazdu.

W przypadku większości kierowców, w tym licznej części zawodników sportu motocyklowego, dolna połowa eksperymentalnego diagramu g-g może zostać ograniczona krzywą, dla której maksymalna wartość opóźnienia osiągana jest w trakcie jazdy na wprost (krzywa oznaczona literą „H" na rys. 4.10). Krzywa „H" jest obrazem równania (4.46), w którym współczynnik przyczepności wzdłużnej μ_x przyjmuje wartość

$$\mu_x = \mu_h = \frac{w-b}{h} + \frac{F_d^*}{mg}\left(\frac{h_p}{h} - 1\right). \tag{4.55}$$

Równanie (4.45) zostało wyznaczone z zależności (4.39) i (4.47) dla a_y, N_r i F_{xr} równych zeru oraz $N_f = mg$. Siła oporu aerodynamicznego F_d^* w równaniu (4.55) przyjmuje wartość

$$F_d^* = 0,\ \text{jeżeli}\ \frac{h_p}{h} \geq 1 \tag{4.56}$$

lub

$$F_d^* = 0.5\rho C_d A V_{max}^2,\ \text{jeżeli}\ \frac{\mathrm{h_p}}{\mathrm{h}} < 1, \tag{4.57}$$

gdzie V_{max} jest maksymalną prędkością pojazdu.

W dalszej części pracy została przyjęta konwencja, wedle której diagram g-g zawierający krzywą „H" nazywany będzie diagramem hybrydowym, w odróżnieniu od diagramu z rys. 4.9a, który przyjęto nazywać analitycznym lub teoretycznym.

W przypadku techniki hamowania wyłącznie za pomocą układu hamulcowego przedniego koła, dolna połowa hybrydowego diagramu g-g opisana jest za pomocą dwóch łuków: pierwszego - pomiędzy punktami 1 i 4 oraz drugiego - pomiędzy punktami 4 i 3.

4.4. Przykłady obliczeniowe

Wpływ kształtu obwiedni diagramu g-g oraz wprowadzonych ograniczeń na sterowania omówiony zostanie za pomocą literaturowych przykładów szykany oraz nawrotu o zmiennym promieniu, zwanych dalej torami o pętli otwartej. Przedstawione zostanie także porównanie wyników „symulacji" z badaniem drogowym na torze o pętli zamkniętej.

Formułując zadanie sterowania optymalnego dla toru o pętli otwartej należy określić prędkość początkową pojazdu V_0. Wskazać można również jego początkowe położenie poprzeczne n_0 oraz wstępną orientację χ_0. Stan układu na końcu trasy traktowany jest w większości przypadków jako swobodny.

W przypadku toru o pętli zamkniętej stan układu na początku i końcu trasy wyznaczany jest w trakcie rozwiązywania ZSO. Dodatkowy warunek brzegowy w postaci $\mathbf{x}(s = 0) = \mathbf{x}(s = L)$, gdzie L jest całkowitą długością krzywej szkieletowej jezdni zapewnia cykliczność wektora zmiennych stanu na początku i końcu okrążenia.

Prezentowane w dalszej części rozdziału przykłady obliczeniowe dotyczyć będą lekkich motocykli wyścigowych: minimotocykla klasy PitBike o pojemności silnika 140 cm^3 oraz motocykla klasy Supersport 300 (SSP300). Właściwości pojazdów zamieszczono w tabeli 4.1. Zadania sterowania optymalnego zostały rozwiązane za pomocą oprogramowania GPOPS-II, narzędzia ADiGator oraz biblioteki do rozwiązywania nieliniowych zagadnień optymalizacji IPOPT.

4.4.1. Analiza wpływu kształtu obwiedni diagramu g-g oraz ograniczeń na sterowania na optymalną trajektorię ruchu

Wpływ kształtu obwiedni diagramu g-g oraz ograniczeń (4.22) i (4.27) na wyniki prezentowanych analiz omówiony zostanie na przykładzie szykany i motocykla klasy SSP300. Przyjęto konwencję, wedle której rezultaty dla ZSO, w którym pojazd sterowany był za pomocą zrywów oznaczone będą literami (JC), zaś gdy sterowany był za pomocą przyspieszeń a_x i a_y oznaczone zostaną jako (AC).

Pojazdy zaczynały manewr od lewej krawędzi jezdni z prędkością początkową $V_0 = 40$ m/s. Czas optymalnego manewru wyniósł 10.656 s (AC) i 10.799 s (JC) dla hybrydowego diagramu g-g oraz 10.604 s (AC) i 10.740 s (JC) dla diagramu analitycznego. Optymalne trajektorie ruchu wraz z wykresem położenia poprzecznego n zostały przedstawione na rys. 4.11.

Manewr optymalny dla hybrydowego diagramu g-g

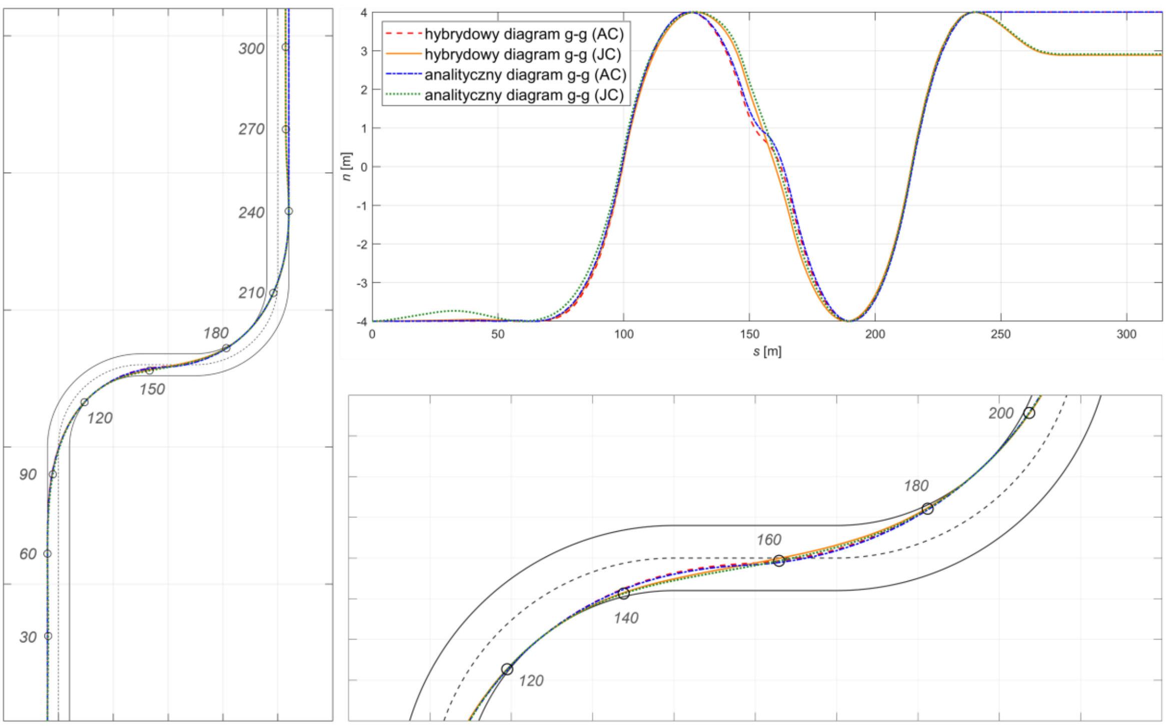
W przypadku analiz dla hybrydowych diagramów g-g, trajektorie ruchu zaczynają się różnić począwszy od szczytu pierwszego zakrętu trasy. Pojazd JC pozostaje bliżej prawej krawędzi jezdni w fazie wyjścia z pierwszego zakrętu szykany i obiera trajektorię bliższą wewnętrznej krawędzi toru w początkowej fazie manewru skręcania przypadającego na zakręt nr 2.

Tabela 4.1. Charakterystyki pojazdów wykorzystanych w analizach

Symbol	Charakterystyka	PB140	SSP300
M	masa pojazdu [kg]	68.50	139.50
m	masa pojazdu wraz z kierowcą [kg]	143.50	214.50
w	rozstaw osi [m]	1.18	1.38
b	odległość wypadkowego środka ciężkości (pojazdu wraz z kierowcą) od punktu styku tylnego koła z jezdnią [m]	0.53	0.65
h	wysokość wypadkowego środka ciężkości [m]	0.75	0.69
h_p	wysokość środka ciśnienia [m]	0.60	0.60
P_{max}	moc maksymalna [kW]	7.42	33.56
f_w	współczynnik oporu toczenia [-]	0.02	0.02
$C_d A$	iloczyn współczynnika oporu aerodynamicznego oraz pola powierzchni czołowej [m^2]	0.44	0.25
ρ_a	gęstość powietrza [kg/m^3]	1.20	1.20
μ_x	współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku wzdłużnym [-]	1.10	1.10
μ_y	współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku poprzecznym [-]	1.20	1.20
i_p	przełożenie pierwotne [-]	3.72	3.04
i_{g_1}	przełożenie pierwszego biegu [-]	3.27	2.50
i_{g_2}	przełożenie drugiego biegu [-]	1.97	1.82
i_{g_3}	przełożenie trzeciego biegu [-]	1.35	1.35
i_{g_4}	przełożenie czwartego biegu [-]	1.04	1.09
i_{g_5}	przełożenie piątego biegu [-]	-	0.92
i_{g_6}	przełożenie szóstego biegu [-]	-	0.8
i_s	przełożenie przekładni łańcuchowej [-]	2.29	3.06
η_s	sprawność przekładni łańcuchowej [-]	0.88	0.88
r_{d_r}	promień dynamiczny tylnej opony [m]	0.25	0.31
$\beta_0^{j_y}$	pierwszy współczynnik funkcji ograniczającej wartości dopuszczalne zrywu poprzecznego [m/s^3]	23.51	23.51
$\beta_1^{j_y}$	drugi współczynnik funkcji ograniczającej wartości dopuszczalne zrywu poprzecznego [$1/s^2$]	-0.31	-0.31
$\beta_0^{j_x}$	pierwszy współczynnik funkcji ograniczającej wartości dopuszczalne zrywu wzdłużnego [m/s^3]	15.70	15.7
$\beta_1^{j_x}$	drugi współczynnik funkcji ograniczającej wartości dopuszczalne zrywu wzdłużnego [$1/s^2$]	-0.15	-0.15

Pojazd AC kończy manewr poruszając się wzdłuż prawej krawędzi trasy, podczas gdy motocykl sterowany zrywami (JC) porusza się równolegle do krawędzi jezdni będąc od niej oddalonym o 2.9 m w kierunku linii środkowej toru. Analizując szerzej fazę wyjścia z zakrętu nr 2, motocykl (JC) dotyka prawej krawędzi toru ($s = 240$ m) poruszając się z niezerowym przyspieszeniem poprzecznym a_y wynoszącym -0.65 g (rys. 4.12). Ograniczona możliwość zmiany przyspieszenia poprzecznego skutkuje ruchem pojazdu w kierunku linii środkowej toru (240-276 m). Maksymalne przyspieszenie wzdłużne ograniczone jest wówczas mocą silnika, dlatego też pozostały odcinek trasy pokonywany jest wzdłuż najkrótszej ścieżki. Dodatni „szczyt" przyspieszenia a_y pomiędzy 254., a 276. metrem trasy nadaje pojazdowi pożądany kierunek jazdy, równoległy do krawędzi toru.

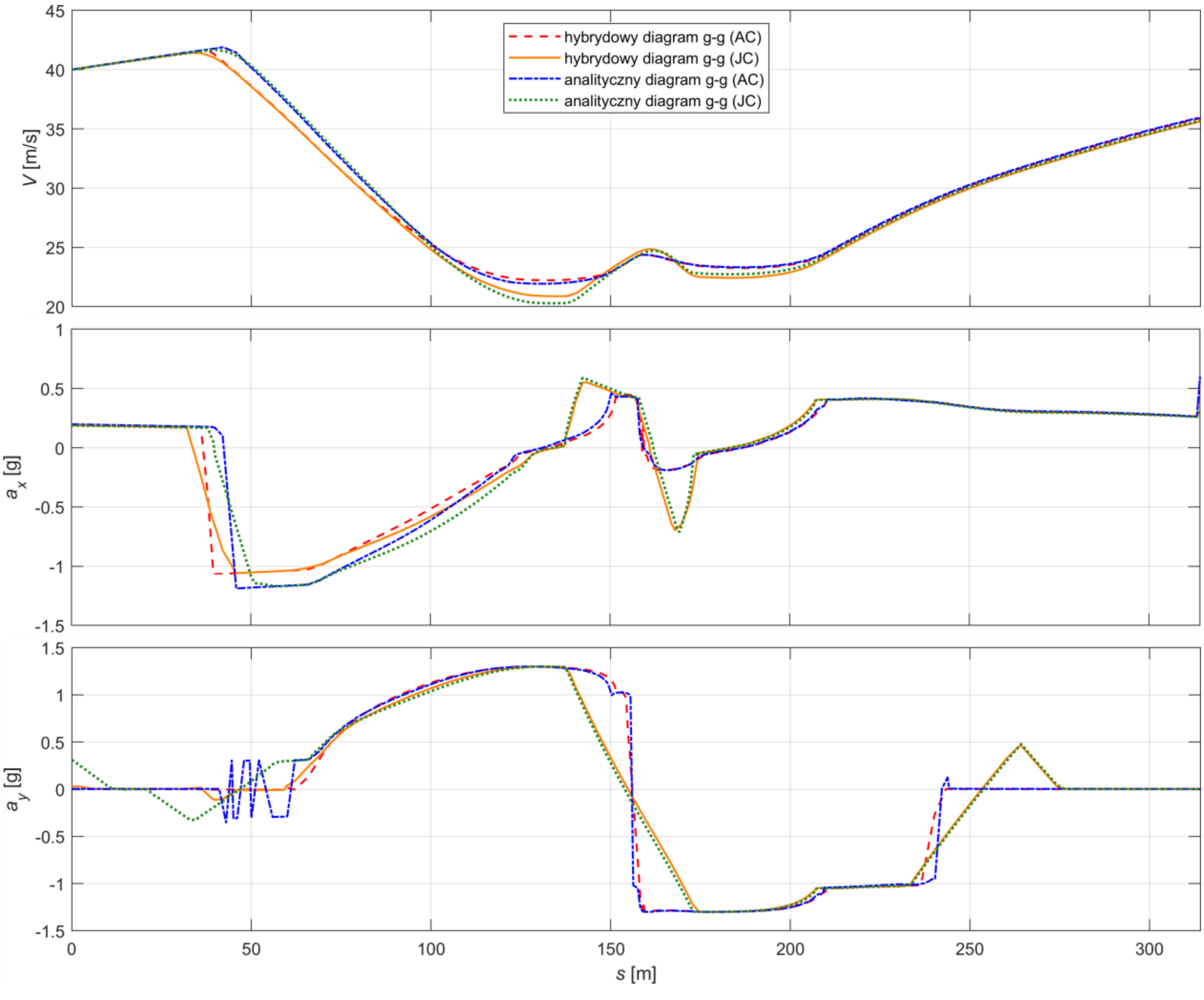
Sterowanie pojazdem za pomocą przyspieszeń a_x i a_y charakteryzuje sterowanie „bang-bang". Natychmiastowa zmiana wartości zmiennej sterującej obserwowana jest w trakcie manewru zmiany kierunku ruchu w szykanie ($s = 156$ m), w fazie przejściowej między przyspieszaniem a hamowaniem ($s = 36$ m) oraz w fazie wyjścia z łuku nr 2. Poddając szerszej analizie ostatni wymieniony manewr, pojazd (AC) dociera do prawej krawędzi toru poruszając się z przyspieszeniem poprzecznym a_y równym 0.96 g. Po zetknięciu z krawędzią toru, przyspieszenie a_y przyjmuje (natychmiastowo) wartość równą zeru i pojazd kontynuuje ruch dokładnie po granicy jezdni.



Rys. 4.11. Optymalna trajektoria ruchu w szykanie (po lewej), położenie poprzeczne n (po prawej u góry), zbliżenie na środkową część szykany (po prawej na dole)

Manewr optymalny dla teoretycznej obwiedni diagramu g-g

Analityczny diagram g-g dopuszcza, w pewnym zakresie przyspieszeń poprzecznych, większą wartość opóźnienia niż możliwa do osiągnięcia podczas jazdy na wprost. Zgodnie z rys. 4.12, pojazd JC zaczyna hamować przy niezerowym przyspieszeniu poprzecznym $a_y = -0.23$ g, które odpowiada przechyleniu $\varphi = -13.0°$ (ujemna wartość oznacza, że pojazd skręca w lewo). Dwadzieścia metrów dalej, przyspieszenie poprzeczne przyjmuje wartość $a_y = 0.30$ g (przechylenie $\varphi = 16.7°$ w kierunku pierwszego prawego zakrętu), zaś opóźnienie osiąga maksymalną dopuszczalną diagramem g-g wartość 1.17 g. W porównaniu do manewru wyznaczonego dla hybrydowej obwiedni diagramu g-g, możliwość uzyskania większej wartości opóźnienia wiąże się z przebyciem przez pojazd nieznacznie dłuższej drogi.



Rys. 4.12. Manewr optymalny przejazdu przez szykanę (w kolejności od góry): prędkość V, przyspieszenie w kierunku wzdłużnym a_x, przyspieszenie w kierunku poprzecznym a_y

Trajektorie ruchu dla analitycznego oraz hybrydowego diagramu g-g (układ sterowany zrywami) różnią się maksymalnie o 0.3 m w fazie hamowania, oraz o 0.2 m w środku szykany.

Sterowany przyspieszeniami a_x i a_y pojazd porusza się na początku manewru wzdłuż lewej krawędzi trasy do $s = 41$ m. Następnie rozpoczyna manewr hamowania i osiąga maksymalną dopuszczalną diagramem g-g wartość opóźnienia wynoszącą 1.18 g, podczas gdy przyspieszenie poprzeczne osiąga na przemian wartości między -0.31 g a 0.31 g (41-62 m). Punkt o współrzędnych (± 0.31 g, -1.18 g) odpowiada punktowi nr 2 na rys. 4.10. Następująca po sobie zmiana znaku sterowania pozwala na ruch pojazdu wzdłuż lewej krawędzi trasy (po najkrótszej ścieżce) przy jednoczesnym hamowaniu z maksymalną wartością opóźnienia. Otrzymany przebieg przyspieszeń jest niemożliwy do odtworzenia w rzeczywistości oraz prowadzi do zaniżenia czasu trwania manewru.

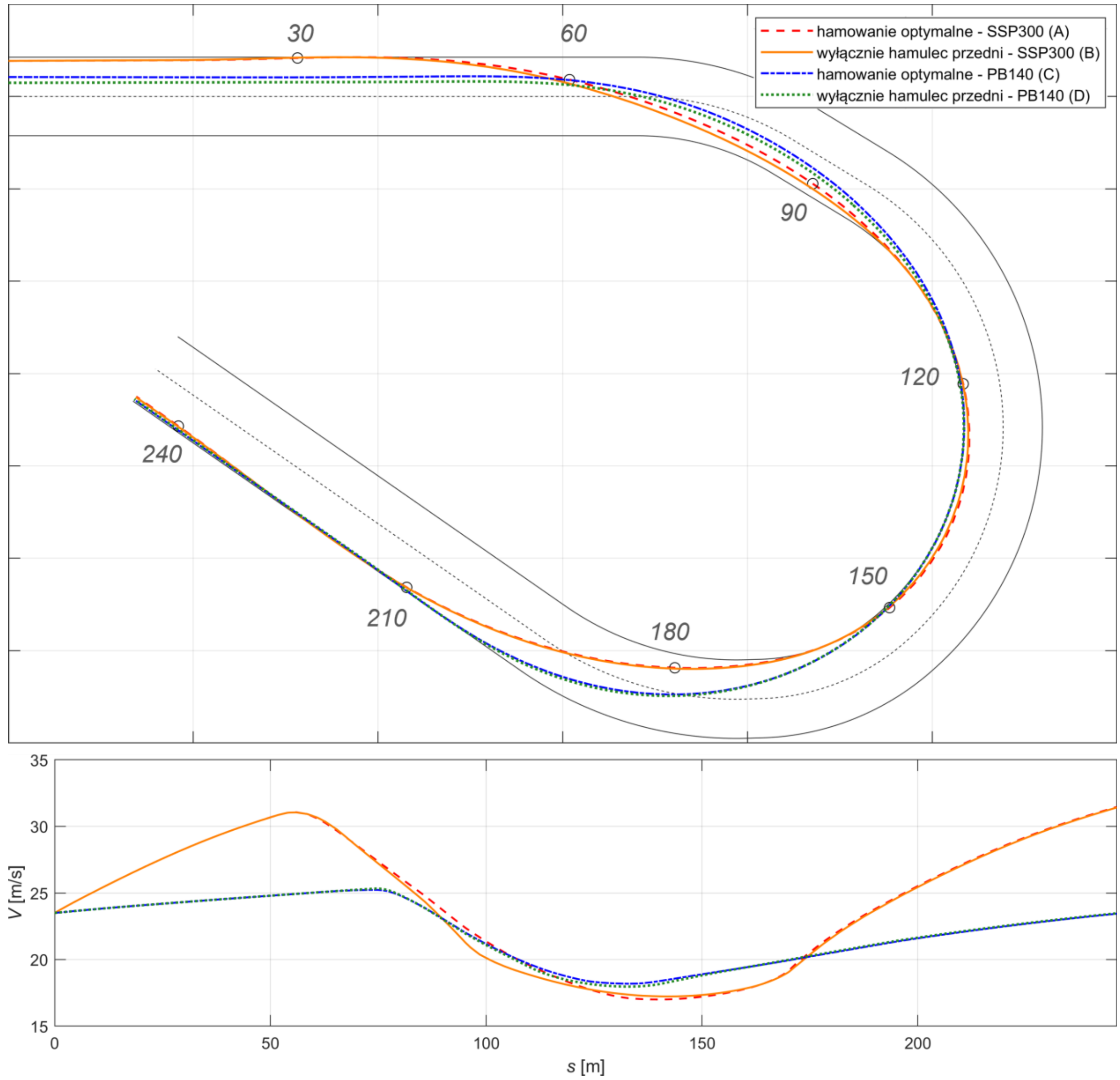
Przedstawiony przykład pozwala stwierdzić, że sterowanie pojazdem za pomocą zrywów w znaczący sposób wpływa na czas manewru, przebieg optymalnej trajektorii ruchu oraz trajektorię zmiennych stanu.

4.4.2. Analiza wpływu techniki hamowania na optymalną trajektorię ruchu

W prezentowanym przykładzie obliczeniowym omówiony zostanie wpływ techniki hamowania na optymalną trajektorię ruchu. Analizie poddano ruch minimotocykla PB140 oraz lekkiego motocykla wyścigowego SSP300. Przyjęty został hybrydowy diagram g-g oraz sterowanie zrywami, zaś scenariuszem testowym był nawrót o zmiennym promieniu.

Pojazdy ruszały z prędkością początkową $V_0 = 23.5$ m/s, a położenie poprzeczne n_0 na początku manewru było dowolne (w ramach szerokości jezdni). Czas manewru optymalnego wyniósł 9.944 s dla motocykla SSP300 i optymalnej strategii hamowania (A), 9.981 s dla SSP300 i techniki hamowania za pomocą wyłącznie układu hamulcowego przedniego koła (B), 10.866 s dla minimotocykla PB140 i hamowania optymalnego (C) oraz 10.868 s dla PB140 i hamulca przedniego (D). Wykres prędkości oraz trajektorie zostały przedstawione na rys. 4.13. Rys. 4.14 przedstawia położenie poprzeczne n oraz przyspieszenia a_x i a_y.

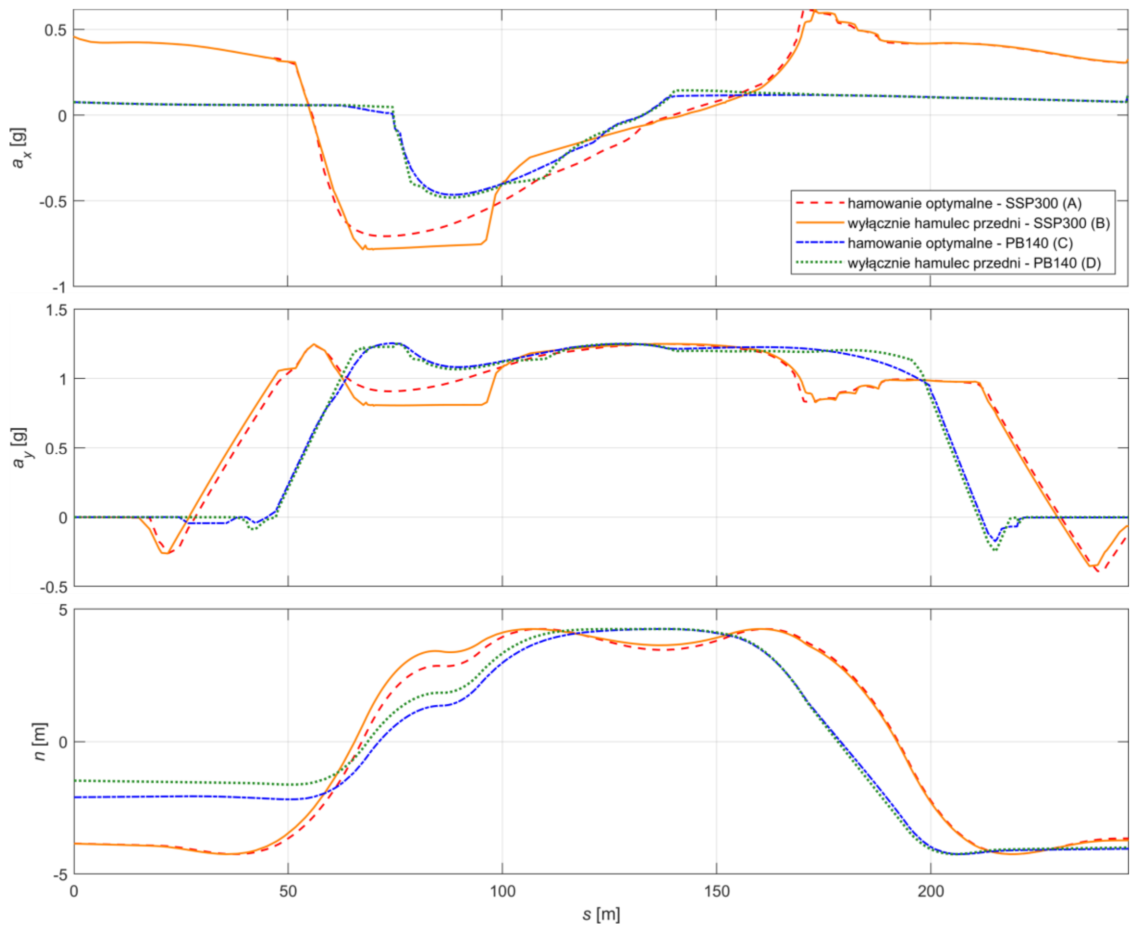
Pojazdy A i B dotykają wewnętrznej krawędzi jezdni dwukrotnie oraz inicjują skręt z jej zewnętrznej granicy. Pojazdy C i D nie wykorzystują dostępnej szerokości toru w początkowej fazie manewru oraz stykają się z wewnętrzną krawędzią trasy tylko raz.



Rys. 4.13. Optymalna trajektoria poruszania się po nawrocie o zmiennym promieniu (u góry) oraz prędkość V (na dole) dla dwóch pojazdów i różnych strategii hamowania

Trajektoria motocykli C i D charakteryzuje się mniejszą krzywizną w początkowej (60–120 m) oraz końcowej fazie manewru skrętu (150–210 m).

Pojazdy A i B, dwadzieścia pięć metrów za punktem o największej krzywiźnie trajektorii ($s = 135$ m) zmniejszają kąt przechyłu do wartości bliskiej 40° (160–210 m). Dla osiąganej w $s = 171$ m prędkości $V \approx 20.0$ m/s, wartość przyspieszenia wzdłużnego $a_x \approx 0.6$ g oraz przyspieszenia poprzecznego $a_y = 0.83$ g ($\varphi \approx 40°$) odpowiada na diagramie g-g punktowi przecięcia krzywych oznaczonych cyframi 1 i 2 na rys. 4.9a. Ruch pojazdów A i B odbywa się z maksymalnym dopuszczalnym dla danej prędkości V przyspieszeniem wzdłużnym a_x przy jednocześnie możliwie dużej wartości przyspieszenia poprzecznego a_y.



Rys. 4.14. Przebiegi (w kolejności od góry): przyspieszenia w kierunku wzdłużnym a_x, przyspieszenia w kierunku poprzecznym a_y, położenia poprzecznego n dla nawrotu o zmiennym promieniu

Mniejsza moc silnika minimotocykla PB140 powoduje, że czas jazdy w maksymalnym przechyleniu ulega wydłużeniu. Pojazdy B i C uzyskują minimalną prędkość w szczycie zakrętu o około 1.3 m/s większą niż pojazdy A i B.

Pojazdy B i D (technika hamowania hamulcem przedniego koła) inicjują skręt wcześniej niż w przypadku hamowania optymalnego. Ze względu na węższą dolną część obwiedni diagramu g-g, motocykl B hamuje mocniej niż A i przy mniejszej wartości przyspieszenia poprzecznego (65–90 m), następnie szybko zmniejsza wartość opóźnienia jednocześnie zwiększając kąt przechyłu (90–140 m).

Optymalne trajektorie pojazdów C i D nie wykazują znaczących różnic ze względu na krótki rozstaw osi pojazdu. Jak można zauważyć na rys. 4.10b, w przypadku motocykla PB140, fragment krzywej odpowiadający przypadkowi hamowania za pomocą hamulca przedniego koła (pomiędzy punktami 3 i 4) jest niemal identyczny z krzywą diagramu hybrydowego. W związku z tym różnica czasu manewru pojazdów C i D jest pomijalnie mała i wynosi 0.002 s na korzyść optymalnej strategii hamowania. W przypadku pojazdu SSP300 optymalna strategia hamowania powoduje, że zmiany przyspieszenia poprzecznego w początkowej fazie manewru skręcania są bardziej płynne.

Wprowadzone ograniczenia na sterowania pozwalają na zaobserwowanie charakterystycznej cechy techniki jazdy zawodowych kierowców wyścigowych. Zauważyć można, że pojazdy A i B poruszają się w pierwszej fazie manewru równolegle do krawędzi trasy (w odległości $n_0 = 3.85$ m od linii środkowej jezdni). Następnie (dla $s = 16$ m) obierają kurs na zewnętrzną krawędź jezdni (skręcają w lewo) by po chwili rozpocząć manewr skręcania w kierunku zbliżającego się zakrętu w prawo. Rozpoczęcie manewru skrętu w pewnym oddaleniu od zewnętrznej krawędzi jezdni powoduje, że dotykający zewnętrznej krawędzi trasy pojazd porusza się w kierunku zbliżającego łuku z pewnym niezerowym przyspieszeniem poprzecznym, które w analizowanym przypadku wynosi $a_y = 0.59$ g i odpowiada przechyłowi o kąt 30.5°. Wyznaczona trajektoria wzorcowa pozwala zmaksymalizować prędkość na zakręcie w warunkach skończonych zmian przyspieszenia poprzecznego.

4.4.3. Analiza porównawcza z badaniami drogowymi - minimotocykl PitBike

Jako obiekt testowy wybrany został 1037. metrowy, liczący 16 zakrętów tor kartingowy AWIX Racing Arena zlokalizowany w Toruniu. Cechą charakterystyczną toruńskiego toru jest blisko zerowe pochylenie podłużne oraz poprzeczne jezdni, dzięki czemu możliwe było zarejestrowanie danych porównawczych odpowiadających przyjętemu płaskiemu modelowi jezdni. Przeprowadzone zostały dwie tury badań. W pierwszej zlokalizowane zostały fragmenty toru, w których osiągi układu pojazd-kierowca cechowały się największymi różnicami w stosunku do obliczeń numerycznym, zaś w trakcie drugiej tury badań skupiono się na poprawie jazdy kierowcy w wyznaczonych wcześniej obszarach trasy.

Dane eksperymentalne zostały zarejestrowane za pomocą przenośnego urządzenia pomiarowego AIM Solo. Badanym pojazdem był minimotocykl PitBike o pojemności silnika 140 cm^3. Przyjęte charakterystyki pojazdu były identyczne z zestawionymi w tabeli 4.1, za wyjątkiem współczynnika przyczepności przylgowej w kierunku poprzecznym μ_y, którego wartość przyjęto na podstawie danych z układu pomiarowego równą 1.1. Krzywizna krzywej szkieletowej trasy (w tym przypadku linii środkowej) została odtworzona na podstawie zdjęcia satelitarnego w sposób przedstawiony na rys. 4.15.

Rys. 4.15. Zdjęcie satelitarne z aplikacji *Google Earth* umożliwiające odtworzenie krzywizny krzywej szkieletowej

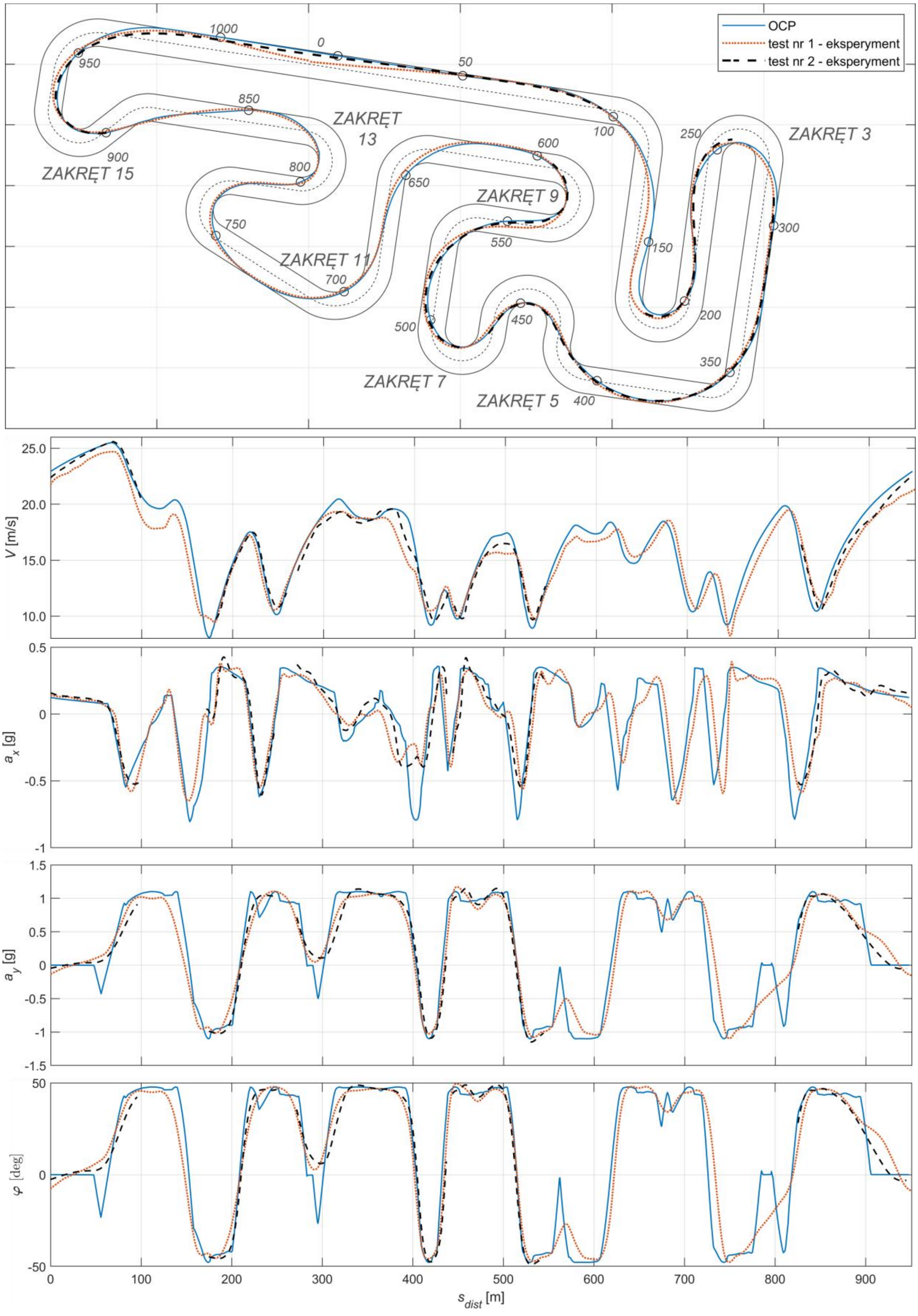
Rezultaty obliczeń zestawiono z pomiarami drogowymi na rys. 4.16. Jako oś poziomą przyjęto pokonany dystans s_{dist} zamiast stosowanej dotychczas współrzędnej krzywoliniowej s. Najlepszy czas okrążenia zarejestrowany podczas pierwszego dnia badań wyniósł 61.322 s, zaś czas manewru optymalnego równy jest 60.501 s.

W trakcie pierwszego dnia badań zlokalizowane zostały cztery fragmenty trasy, w których kierowca uzyskał mniejszą prędkość niż wyznaczona w „symulacji". Były to: zakręt nr 1, sekwencja zakrętów nr 4, 5 i 6, łuk nr 8 oraz szykana utworzona z zakrętów nr 10 i 11. Zwrócono również uwagę na różnicę w prędkościach maksymalnych pojazdów na końcu prostej startowej.

W trakcie drugiej tury badań skupiono się na poprawie rezultatów we wskazanych wcześniej obszarach. Wybrane wycinki zarejestrowanych wówczas danych zostały naniesione na rys. 4.16 pogrubioną linią przerywaną. Poprawie uległa:

- prędkość w szczycie zakrętu nr 8 - dzięki modyfikacji linii przejazdu,
- prędkość na końcu prostej startowej – dzięki modyfikacji trajektorii na zakrętach nr 15 i 16 oraz dzięki wcześniejszemu rozpoczęciu fazy przyspieszania, zgodnie z sugestią otrzymaną w wyniku „symulacji",
- prędkość w szczycie zakrętu nr 5 – dzięki opóźnieniu rozpoczęcia fazy hamowania przed zakrętem nr 6.

Największą różnicę między trajektoriami zaobserwowano w ruchu krzywoliniowym na zakręcie nr 1. Poruszający się wzorcową trajektorią pojazd powinien zetknąć się w końcowej fazie manewru skręcania z zewnętrzną krawędzią trasy (zakręt nr 1),



Rys. 4.16. Porównanie rezultatów obliczeń numerycznych z danymi eksperymentalnymi (w kolejności od góry: trajektorie ruchu, prędkość V, przyspieszenie wzdłużne a_x, przyspieszenie poprzeczne a_y, teoretyczny kąt przechyłu φ

a następnie zainicjować skręt w stronę zakrętu nr 2 znajdując się blisko wewnętrznej krawędzi jezdni. Kierowca testowy docierał do ¾ szerokości toru w końcowej części zakrętu nr 1, a następnie inicjował skręt w kierunku łuku nr 2 blisko linii środkowej trasy. Trajektoria kierowcy charakteryzowała się mniejszą minimalną prędkością w szczycie łuku nr 1 oraz większą minimalną prędkością w szczycie łuku nr 2. Modyfikacja trajektorii w rzeczywistych warunkach ruchu nie była jednak możliwa ze względu na rezonans masy nieresorowanej przedniego zawieszenia (z ang. *chatter*), który spowodowany był następującymi po sobie nierównościami nawierzchni w pierwszym zakręcie trasy. Problemy z pojazdem w omawianym fragmencie toru widoczne są na wykresie przyspieszenia poprzecznego jako mniejsza niż dla pozostałych zakrętów maksymalna wartość osiąganego przyspieszenia a_y.

W trakcie prowadzonej analizy porównawczej stwierdzono również, że „symulowany kierowca" szybciej zmienia kierunek ruchu pomiędzy łukami nr 2 i 3. Po zwróceniu uwagi na ten aspekt jazdy, kierowca zbliżył się do manewru optymalnego (180-230 m), przy czym szybciej wykonany manewr zmiany kierunku ruchu nie wpłynął negatywnie na maksymalną wartość osiąganego w tym miejscu opóźnienia.

Czas okrążenia względem pierwszej tury badań poprawiony został o 0.415 s i uzyskano go pomimo gorszych warunków atmosferycznych (tabela 4.2).

Zaproponowane zmiany w sformułowaniu ZSO pozwoliły na uzyskanie bardzo dobrej zgodności z pomiarami drogowymi. Przeprowadzona analiza porównawcza umożliwiła poprawę czasu okrążenia w rzeczywistych warunkach ruchu.

Tabela 4.2. Temperatura powietrza oraz nawierzchni w trakcie badań drogowych

	Data	Temperatura powietrza	Temperatura nawierzchni
Test nr 1	27.09.2021	19 °C	27 °C
Test nr 2	08.10.2021	9 °C	14 °C

4.4.4. Analiza porównawcza zbiorów wartości dopuszczalnych sterowania

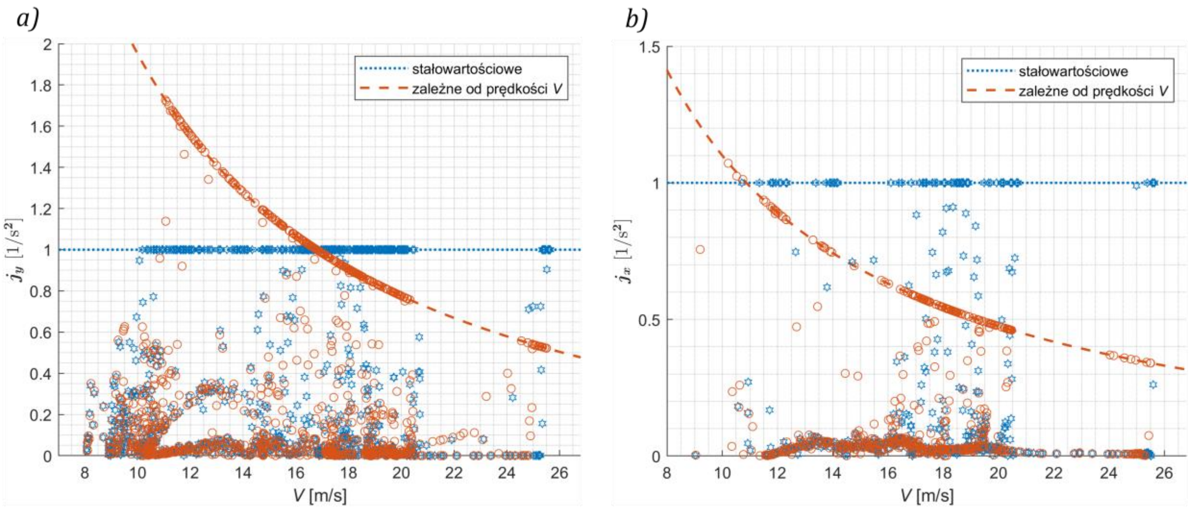
Aby zobrazować wpływ wprowadzonych ograniczeń na wartości dopuszczalne zrywów, przykład z podrozdziału 4.4.3 został rozwiązany za pomocą sterowań o stałej maksymalnej wartości dopuszczalnej (niezależnej od prędkości ruchu). Sterowania porównano na rys. 4.17, którego oś pozioma odpowiada prędkości V. Znaczniki w kształcie okręgów reprezentują ZSO, w którym wykorzystane zostały ograniczenia (4.22) i (4.27), zaś heksagramami („sześciokątami gwiaździstymi") oznaczono ZSO o stałej wartości granicznej sterowania. Na wykresach naniesiono dodatkowo:

- moduły zależnych od prędkości V ograniczeń $|J_y(V)|$ i $|J_x(V)|$ – oznaczone linią przerywaną,
- ograniczenia stałowartościowe $|J_x| = |J_y| = 1\left[\frac{1}{s^2}\right] = const.$ – oznaczone linią przerywaną.

Ograniczenia są aktywne w całym zakresie osiąganych prędkości. Widać więc, że stała wartość dopuszczalna zrywów powodować będzie niedoszacowanie lub przeszacowanie części wykonywanych manewrów. Wpływ zależnych od prędkości ruchu ograniczeń $J_x(V)$ i $J_y(V)$ będzie zatem tym większy im większa będzie różnica między minimalną a maksymalną prędkością uzyskiwaną w danym manewrze.

4.4.5. Czasochłonność procesu obliczeniowego

W zaprezentowanych w niniejszym rozdziale przykładach numerycznych wykorzystano przekształconą postać równań stanu przedstawioną w pracy [28], która pozwoliła na nieznaczne skrócenie czasu obliczeń. Prezentowana analiza czasochłonności procesu obliczeniowego dotyczyć będzie najbardziej wymagającego obliczeniowo przykładu z podrozdziału 4.4.3.



Rys. 4.17. Porównanie wartości zmiennych sterujących: zrywu poprzecznego (a) i zrywu wzdłużnego (b) w ZSO o stałych (heksagramy) i zależnych od prędkości V (okręgi) zbiorach dopuszczalnych wartości sterowania

Jako początkowe przybliżenie wektora stanu oraz wektora sterowań przyjmowane były różne wartości stałej na dystansie manewru prędkości V_0 (między 9 a 19 m/s z krokiem 2 m/s), podczas gdy pozostałe zmienne przyjęto równe zeru. Zmienne przeskalowano zgodnie ze wskazówkami zawartymi w podrozdziale 3.3.3. Dla każdego niezależnego uruchomienia procedury obliczeniowej otrzymano identyczny rezultat. Obliczenia rozpoczynano od „rzadkiej" siatki obliczeniowej liczącej 100 węzłów kolokacyjnych, w której maksymalna oraz minimalna odległość między węzłami wynosiła odpowiednio 34.21 m oraz 1.28 m. Przyjęto oczekiwaną dokładność rozwiązania równą 10^{-4}. Proces obliczeniowy wymagał od pięciu do sześciu iteracji zagęszczania siatki, co przełożyło się na 972-1009 węzłów i maksymalną oraz minimalną odległość między węzłami równą 8.55 i 0.18 m. Średni czas rozwiązania zadania wyniósł 308 s. W przypadku układu sterowanego przyspieszeniami a_x i a_y czas obliczeń wydłużył się o średnio 122 s.

4.5. Podsumowanie

Niniejszy rozdział poświęcony został analizie wpływu zaproponowanych zmian w sformułowaniu ZSO na otrzymywane rezultaty obliczeń. Pojazd sterowano zrywami (pochodnymi przyspieszenia), których wartości dopuszczalne ograniczono hiperbolicznymi funkcjami zależnymi od prędkości ruchu. Ograniczenia wyznaczono na podstawie zbiorów danych, które zawierały zarejestrowane eksperymentalnie wartości pochodnych przyspieszenia wzdłużnego oraz poprzecznego. Zaproponowane zmiany miały na celu uwzględnienie cech dynamiki pojazdu oraz fizycznych uwarunkowań kierowcy (skończona wartość momentu jaka może zostać przyłożona do kierownicy), mających w rzeczywistości wpływ na zmienność przyspieszeń. Na podstawie przedstawionego porównania z badaniami jezdnymi stwierdzono, że sformułowany cel został osiągnięty. Uzyskano satysfakcjonującą zgodność trajektorii zmiennych stanu z ich rzeczywistymi odpowiednikami. Przeprowadzona na podstawie obliczeń numerycznych analiza jazdy kierowcy testowego pozwoliła na poprawę czasu okrążenia w rzeczywistych warunkach ruchu. Wprowadzone zmiany w sposobie pokonywania trasy dotyczyły aspektów: rozpoczęcia faz hamowania oraz przyspieszania, prędkości realizacji manewrów w przejściowych fazach ruchu, jak również modyfikacji obieranej trajektorii przejazdu.

Zwrócona została również uwaga na przebieg manewru optymalnego w zależności od techniki hamowania oraz zaproponowana została półempiryczna obwiednia diagramu przyspieszeń g-g. W analizie porównawczej lekkich motocykli sportowych różnych klas wyścigowych stwierdzono znaczące różnice między optymalnymi trajektoriami ruchu, które wynikały z różnej maksymalnej mocy silników. Pojazd o mniejszej mocy poruszał się trajektorią o mniejszej krzywiźnie, którą charakteryzował dłuższy odcinek trasy pokonywany z przyspieszeniem poprzecznym bliskim maksymalnemu.

Wprowadzone modyfikacje w sformułowaniu ZSO pozwoliły także na zaobserwowanie pewnych charakterystycznych cech jazdy sportowej po torze wyścigowym.

Oprócz przedstawionych w niniejszym rozdziale możliwych zastosowań prezentowanej metody, może ona zostać ponadto wykorzystana jako narzędzie wspierające proces projektowania obiektów wyścigowych lub wytyczania tras zawodów. Wszystkie istotne aspekty z punktu widzenia projektowania i bezpieczeństwa użytkowania toru wyścigowego, takie jak: wymiary żwirowych pułapek zwalniających, odległości barier energochłonnych od krawędzi toru, położenie oraz wymiary dodatkowych krawężników i wybiegów asfaltowych wymagają wiarygodnej informacji o prędkościach i trajektoriach ruchu pojazdów mających użytkować dany tor.

Wykorzystanie zaproponowanej metody w rzeczywistych problemach projektowych ułatwia wygodny opis geometrii jezdni (budowa segmentowa), niewielka liczba wielkości potrzebnych do budowy modelu pojazdu, a także krótki czas rozwiązania pojedynczego zadania optymalizacji.

5. Numeryczne odwzorowanie trójwymiarowej jezdni

W rozdziale 4 poddany został analizie ruch pojazdu po jezdni dwuwymiarowej. Jeden z zaprezentowanych przykładów obliczeniowych dotyczył toru kartingowego zlokalizowanego w Toruniu. Wyniki obliczeń numerycznych zostały wówczas porównane z pomiarami zarejestrowanymi w trakcie badań drogowych. Wybór obiektu do badań był nieprzypadkowy. Toruński tor kartingowy wyróżniał się spośród pozostałych polskich obiektów wyścigowych charakterystyką odpowiadającą przyjętemu w rozdziale 4 dwuwymiarowemu modelowi jezdni.

W ogólnym przypadku jezdnia toru wyścigowego scharakteryzowana będzie zmiennym na dystansie trasy pochyleniem podłużnym oraz poprzecznym[10]. Naturalnym następstwem prowadzonych rozważań jest więc uogólnienie analizowanego problemu minimalizacji czasu manewru na ruch przestrzenny pojazdu. W niniejszym rozdziale zaprezentowane zostanie przyjmowane w literaturze podejście, w którym trójwymiarowa trasa manewru modelowana jest jako znana z geometrii różniczkowej rozpięta na krzywej szkieletowej powierzchnia zorientowana. Proces numerycznego odwzorowania geometrii trasy polega wówczas na sformułowaniu zadania optymalizacji (zadania sterowania optymalnego), za pomocą którego pozyskiwane są informacje o charakterystykach jezdni: krzywiznach oraz wspomnianych już pochyleniach. Geometria trasy odwzorowywana jest na podstawie informacji o współrzędnych kartezjańskich punktów położonych na krawędziach trasy. Główna część prowadzonych w niniejszym rozdziale rozważań dotyczyć będzie metod pozyskiwania danych wejściowych do zadania optymalizacji. Ocenie zostanie poddana wierność numerycznego odwzorowania geometrii jezdni.

Zamieszczony w załączniku A matematyczny opis jezdni jako rozpiętej na krzywej szkieletowej powierzchni zorientowanej można podsumować w formie następującej listy:

1. Z krzywą szkieletową związany jest układ współrzędnych O_{TNB} nazywany trójścianem Freneta (rys. 5.1).
2. Parametrami powierzchni zorientowanej są: długość krzywej s (krzywej szkieletowej) oraz położenie poprzeczne n względem krzywej szkieletowej.

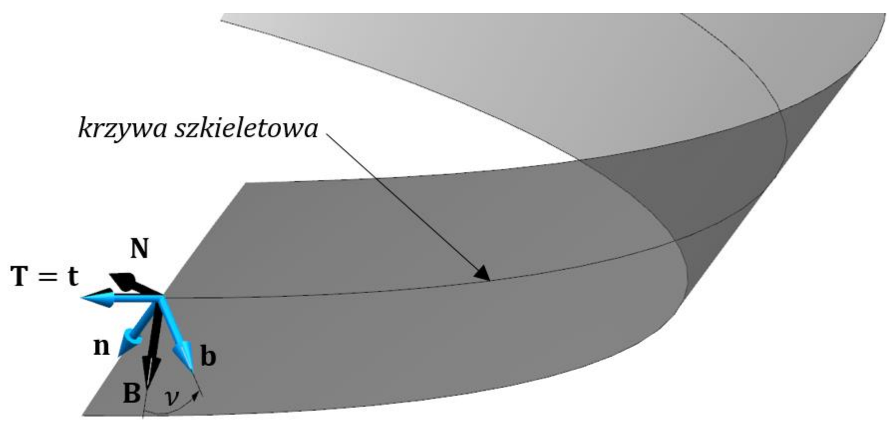
---

[10] Przyjęto umownie, że pochylenie podłużne oraz pochylenie porzeczne jezdni będzie podawane jako wartość kątowa.

3. Z powierzchnią zorientowaną związany jest układ współrzędnych O_{tnb}, który nazywany jest reperem Darboux (rys. 5.1). Oś t reperu jest styczna do krzywej szkieletowej i zwrócona zgodnie z kierunkiem wzrostu współrzędnej krzywoliniowej s, oś b jest prostopadła do płaszczyzny powierzchni zorientowanej, zaś oś n jest prostopadła do osi t oraz b w taki sposób, że osie t, n i b tworzą prawoskrętny układ współrzędnych prostokątnych. Płaszczyzna O_{tn} jest płaszczyzną jezdni.
4. Reper Darboux jest obrócony względem trójścianu Freneta o kąt ν zaznaczony na rys. 5.1.
5. Powierzchnia zorientowana opisana jest za pomocą trzech krzywizn: skręcenia geodezyjnego Ω_t, krzywizny normalnej Ω_n oraz krzywizny geodezynej Ω_b. Wielkości Ω_t, Ω_n i Ω_b wyrażone są w układzie reperu Darboux i opisują jego prędkość kątową.
6. Orientacja reperu Darboux względem inercjalnego układu współrzędnych prostokątnych opisana jest za pomocą kątów Eulera w kombinacji obrotów zyx (załącznik A). Kąty Eulera oznaczono wielkościami θ, ϕ oraz μ i przyjęto nazywać odpowiednio odchyleniem, pochyleniem poprzecznym oraz pochyleniem podłużnym.

5.1. Sformułowanie zadania numerycznego odwzorowania jezdni

Wielkościami wejściowymi w procesie numerycznego odwzorowania jezdni są dyskretne zbiory informacji o położeniu krawędzi toru. Wybrane metody pozyskiwania danych wejściowych zostaną przedstawione w dalszej części rozdziału, lecz każda z nich będzie cechować się pewnym poziomem zakłóceń. Dobre uwarunkowanie



Rys. 5.1. Układ współrzędnych krzywej szkieletowej – trójścian Freneta O_{TNB} oraz powierzchni zorientowanej – reper Darboux O_{tnb}

numerycznego procesu poszukiwania optymalnej trajektorii ruchu (prezentowanego w rozdziałach 4 i 6) wymaga gładkiego przebiegu interpolowanych wielkości. Dotyczy to również charakterystyk toru. Z tego też względu proces numerycznego odwzorowania jezdni formułowany jest jako zadanie sterowania optymalnego [18, 27, 58], w którym minimalizowanym wskaźnikiem celu jest odległość między odwzorowywanymi numerycznie krawędziami, a zadanymi dyskretnymi danymi wejściowymi. ZSO przyjmuje postać

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \mathcal{J} = \int_{s_0}^{s_k} F_1\big(s, \mathbf{x}(s)\big) + F_2\big(s, \mathbf{u}(s)\big) \mathrm{d}s, \tag{5.1}$$

dla

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \mathbf{f}\big(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)\big), \tag{5.2}$$

gdzie

$$\mathbf{x} = [x \;\; y \;\; z \;\; \theta \;\; \mu \;\; \phi \;\; \theta' \;\; \mu' \;\; \phi' \;\; r_w]^T, \tag{5.3}$$

$$\mathbf{u} = [\theta'' \;\; \mu'' \;\; \phi'' \;\; r_w']^T = \big[u_\theta \;\; u_\mu \;\; u_\phi \;\; u_w\big]^T. \tag{5.4}$$

Za zmienne stanu $\mathbf{x}$ przyjmowane są współrzędne krzywej szkieletowej (x, y, z), kąty Eulera θ, ϕ i μ oraz ich pierwsze pochodne, jak również szerokość jezdni r_w. Sterowaniami są drugie pochodne kątów Eulera oraz pochodna szerokości toru. Składniki $F_1\big(s, \mathbf{x}(s)\big)$ i $F_2\big(s, \mathbf{u}(s)\big)$ funkcjonału jakości $\mathcal{J}$ mogą zostać zapisane w postaci

$$\begin{aligned} F_1\big(s, \mathbf{x}(s)\big) = {} & \big(x_r - x_{r_0}\big)^2 + \big(y_r - y_{r_0}\big)^2 + \big(z_r - z_{r_0}\big)^2 \\ & + \big(x_l - x_{l_0}\big)^2 + \big(y_l - y_{l_0}\big)^2 + \big(z_l - z_{l_0}\big)^2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$F_2\big(s, \mathbf{u}(s)\big) = w_\theta {u_\theta}^2 + w_\mu u_\mu^2 + w_\phi u_\phi^2 + w_w u_w^2. \tag{5.6}$$

Współrzędne odwzorowywanej prawej i lewej krawędzi toru, w globalnym, nieruchomym układzie współrzędnych określają równania macierzowe

$$\mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ r_w/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\mathbf{x}_l = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 \\ r_w/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.8}$$

gdzie $\mathbf{R}$ jest macierzą obrotu opisaną zależnością (A.26) zamieszczoną w załączniku A. Zależności (5.7) i (5.8) mogą zostać rozpisane jako

$$x_r = x + (r_w/2)\left(c_\theta s_\mu s_\phi - s_\theta c_\phi\right), \tag{5.9}$$

$$y_r = y + (r_w/2)\left(s_\theta s_\mu s_\phi + c_\theta c_\phi\right), \tag{5.10}$$

$$z_r = z + (r_w/2)c_\mu s_\phi, \tag{5.11}$$

$$x_l = x - (r_w/2)\left(c_\theta s_\mu s_\phi - s_\theta c_\phi\right), \tag{5.12}$$

$$y_l = y - (r_w/2)\left(s_\theta s_\mu s_\phi + c_\theta c_\phi\right), \tag{5.13}$$

$$z_l = z - (r_w/2)c_\mu s_\phi. \tag{5.14}$$

Dynamika układu opisana jest zależnością

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}\big(s, \mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s)\big) = \begin{bmatrix} c_\theta c_\mu \\ s_\theta c_\mu \\ -s_\mu \\ \theta' \\ \mu' \\ \phi' \\ u_\theta \\ u_\mu \\ u_\phi \\ u_w \end{bmatrix}. \tag{5.15}$$

Pochodne trzech pierwszych składników wektora stanu (5.3) – x', y' i z' - reprezentowane są przez pierwszą kolumnę macierzy obrotu (A.26) zamieszczonej w załączniku A.

W przypadku trasy manewru o pętli zamkniętej, wektor zmiennych stanu na początku i końcu trasy powinien spełniać warunek cykliczności $\mathbf{x}(s_k) = \mathbf{x}(s_0)$.

W zaprezentowanym ZSO poszukiwane jest sterowanie $\mathbf{u}$ minimalizujące błąd odwzorowania krawędzi trasy (składnik $F_1\big(s, \mathbf{x}(s)\big)$ we wskaźniku jakości $\mathcal{J}$). Błąd odwzorowania zdefiniowany jest jako odległość między wyznaczaną numerycznie krawędzią trasy a danymi wejściowymi. Składnik $F_2\big(s, \mathbf{u}(s)\big)$ w funkcjonale $\mathcal{J}$ penalizuje zmiany zmiennych sterujących. Wagi (współczynniki kary) w_θ, w_μ, w_ϕ oraz w_w pozwalają sterować poziomem filtracji danych wejściowych.

Przedstawione ZSO może być również wykorzystane w procesie numerycznego odwzorowania toru płaskiego (dwuwymiarowego). Pominąć należy wówczas składniki związane ze współrzędną z oraz kątami Eulera ϕ i μ. Pominąć należy również powiązane z nimi zmienne sterujące. Wektor zmiennych stanu upraszcza się wówczas do postaci $\mathbf{x} = [x, y, \theta, r_w]^T$.

5.2. Dane wejściowe w procesie optymalizacji

Danymi wejściowymi w procesie numerycznego odwzorowania jezdni są odpowiednio przygotowane dyskretne zbiory informacji o położeniu krawędzi toru. Przyjąć można, że surowe dane wejściowe będą charakteryzować się różną licznością punktów na lewej ($\mathbf{x}_{l_i}: i = 1, \dots, N$) oraz prawej ($\mathbf{x}_{r_j}: j = 1, \dots, M$) krawędzi trasy. W punktach tych znane będą trzy współrzędne kartezjańskie (dwie w przypadku odwzorowywania jezdni płaskiej). Przez odpowiednio przygotowane dane wejściowe rozumiana jest równa liczba unikalnych (różniących się przynajmniej jedną współrzędną) punktów na obydwu krawędziach jezdni. Ponadto, odpowiadające tej samej współrzędnej krzywoliniowej s punkty obydwu zbiorów powinny znajdować się na wspólnej prostej prostopadłej do krzywej szkieletowej.

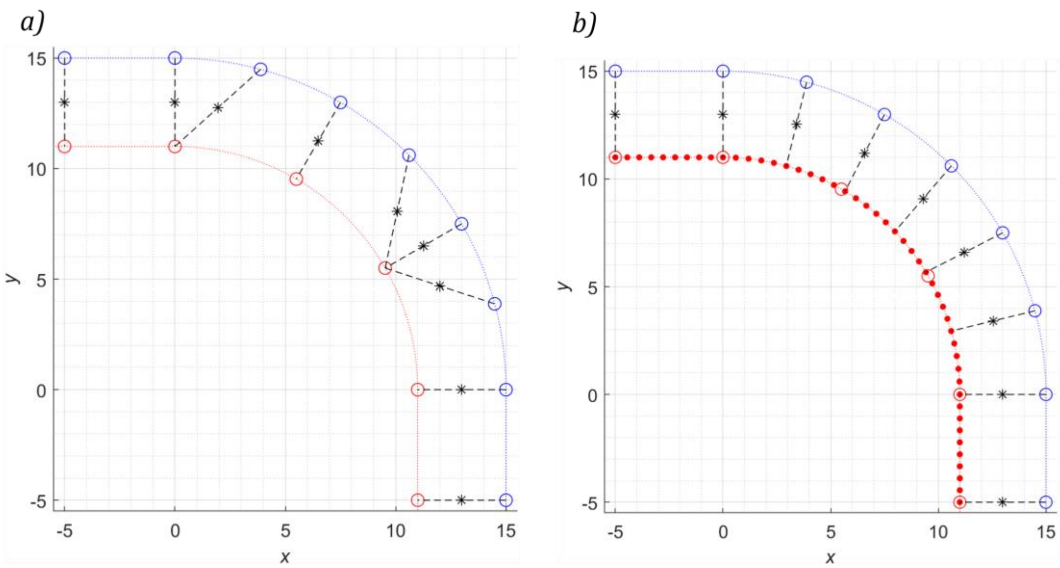
Dla różnej początkowej liczności obydwu zbiorów (surowe dane wejściowe), przy założeniu, że $N \ll M$, przyjęta procedura przygotowania danych wejściowych przebiegała w sposób następujący:

1. Dla każdego i-tego punktu $\mathbf{x}_{l_i}$ lewej krawędzi jezdni znajdowany był najbliższy punkt położony na krawędzi prawej.
2. Dla każdej z N znalezionych par punktów $(\mathbf{x}_{l_i}, \mathbf{x}_{r_i})$ określano punkt środkowy $\mathbf{c}_i = (\mathbf{x}_{l_i} + \mathbf{x}_{r_i})/2$ rozciągniętego między punktami $\mathbf{x}_{l_i}$ i $\mathbf{x}_{r_i}$ odcinka (punkty $\mathbf{c}_i$ oznaczone na rys. 5.2 stanowią dyskretną reprezentację krzywej szkieletowej).
3. Obliczano odległość pomiędzy kolejnymi punktami krzywej środkowej $\Delta s_i = |\mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i|$, a następnie każdemu punktowi $\mathbf{c}_i$, $\mathbf{x}_{l_i}$ i $\mathbf{x}_{r_i}$ przypisywano współrzędną $s_i = \sum_{k=1}^{i-1} \Delta s_k$, gdzie $i = 2, \dots, N$.

Jeżeli punkty pomiarowe były rzadko położone (nieregularne oraz duże odległości między punktami), to warunek prostopadłości odcinka łączącego punkty $\mathbf{x}_{l_i}$ oraz $\mathbf{x}_{r_i}$ względem krzywej szkieletowej nie był w dostatecznym stopniu spełnionym, jak na rys. 5.2a. W przypadku $N > M$ nie był również spełniony warunek unikalności punktów. Zagęszczano wówczas (w procesie interpolacji funkcjami wielomianowymi) dyskretną reprezentację krzywej szkieletowej, na której poszukiwany był najbliższy „sąsiad" (rys 5.2b).

5.2.1. Numeryczne modele terenu o zasięgu globalnym

W sieci dostępne są liczne zbiory danych, które mogą znaleźć zastosowanie w omawianym problemie numerycznego odwzorowania jezdni. W niniejszym



Rys. 5.2. Graficzna interpretacja procesu poszukiwania najbliższego „sąsiada": niedostateczna liczba punktów na krawędzi przeszukiwanej (a) oraz po interpolacji (b)

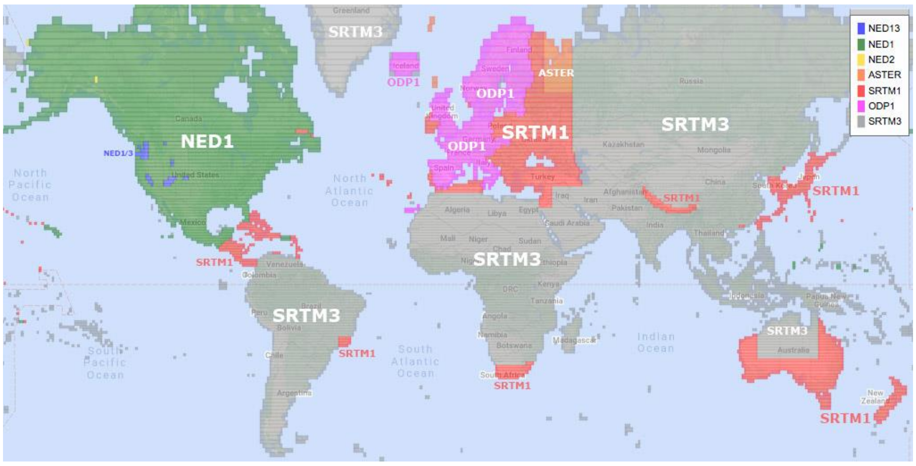
podrozdziale poddane zostały analizie bazy danych nazywane numerycznymi modelami terenu (NMT).

Numeryczny model terenu jest to chmura punktów o znanych współrzędnych geograficznych oraz wysokości, dla której znany jest algorytm interpolacyjny pozwalający na wyznaczenie wysokości terenu w dowolnym punkcie obszaru objętego modelem. Dane wysokościowe zawarte w takiej bazie danych dotyczą wyłącznie rzeźby terenu[11]. Zabudowania, roślinność oraz inne obiekty nie będące formami ukształtowania terenu są cyfrowo usuwane. NMT mogą być siatką kwadratów, prostokątów lub trójkątów. Rozmiar siatki prostokątnej oznaczany jest parą liczb $a \times b$ [m], gdzie a i b są długościami krawędzi elementów siatki.

W pierwszej kolejności omówione zostaną globalne numeryczne modele terenu, do których dostęp możliwy jest na przykład za pomocą darmowego portalu *GPS Visualizer*[12]. Portal ten umożliwia dostęp do baz danych NED (USGS), SRTM1 i SRTM3 (NASA), ODP, ODP1 oraz ASTER, których domyślne przypisanie do regionów świata zostało przedstawione na rys. 5.3. Najlepszą rozdzielczością przestrzenną charakteryzuje się baza ODP1 (30×20 m), najgorszą zaś zbiór danych wysokościowych SRTM3 (90 ×90 m).

Narzędzie *GPS Visualizer* umożliwia przypisanie punktom o znanych współrzędnych

[11] Bazy danych uwzględniające roślinność oraz obiekty infrastruktury noszą nazwę numerycznych modeli pokrycia terenu (NMPT).
[12] URL: gpsvisualizer.com [dostęp: 03.2023].



Rys. 5.3. Domyślne przyporządkowanie baz danych wysokościowych do regionów świata w narzędziu udostępnionym na portalu *GPS Visualizer*[13]

geograficznych informacji o ich wysokości. Współrzędne geograficzne mogą zostać pozyskane za pomocą pomiarów satelitarnych, jak również za pośrednictwem aplikacji przeznaczonych do pracy z mapami oraz zdjęciami satelitarnymi (rys. 5.4).

5.2.2. <u>Numeryczne modele terenu o zasięgu lokalnym</u>

Rezultaty numerycznego odwzorowania trasy za pomocą NMT o zasięgu globalnym zostaną przedstawione w dalszej części rozprawy, jednakże porównując szerokość toru wyścigowego (rzadko przekraczającą 15 m) do rozmiarów siatek wyszczególnionych modeli terenu trudno spodziewać się satysfakcjonujących rezultatów.

Oprócz NMT o zasięgu globalnym, w sieci dostępne są także szczegółowe bazy danych dotyczące regionów, państw lub miast, które charakteryzują się wysoką rozdzielczością oraz średnim błędem wysokości rzędu dziesiątych metra. Przyjęto nazywać je w dalszej części pracy szczegółowymi numerycznymi modelami terenu. Przykładowe szczegółowe bazy danych wysokościowych to:

- Numeryczny model terenu dla Polski podany w siatce 1×1 m, o średnim błędzie wysokości 0.1 m, udostępniony przez Główny Urząd Geodezji i Kartografii na Geoportalu Infrastruktury Informacji Przestrzennej[14].
- NMT obejmujący większość obszaru Stanów Zjednoczonych, podany w siatce 1×1 m i średnim błędzie wysokości 0.1 m, udostępniony przez *United States Geological Survey*[15] (USGS).

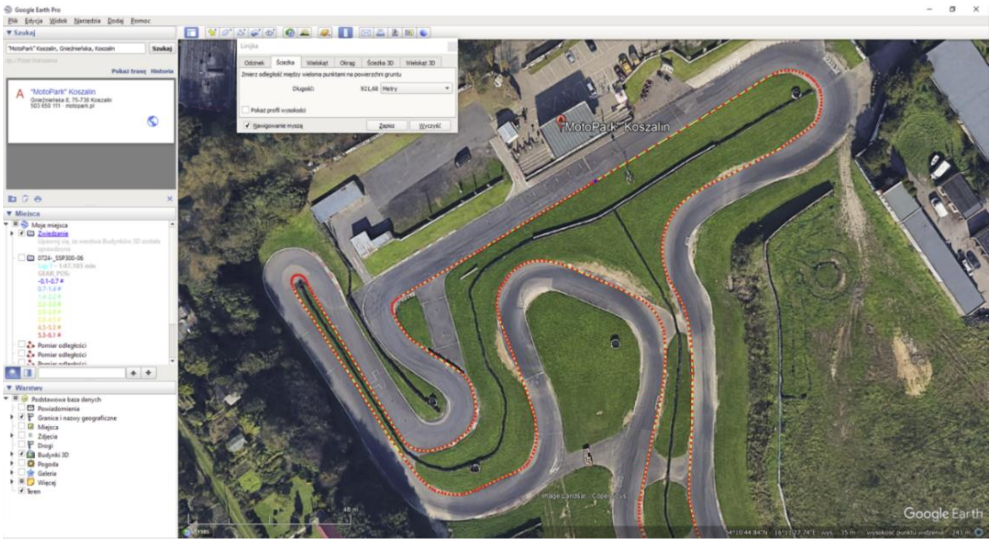
---

[13] URL: gpsvisualizer.com/elevation [dostęp: 04.2023].
[14] URL: geoportal.gov.pl/dane/numeryczny-model-terenu [dostęp: 04.2023].
[15] URL: apps.nationalmap.gov/downloader [dostęp: 04.2023].

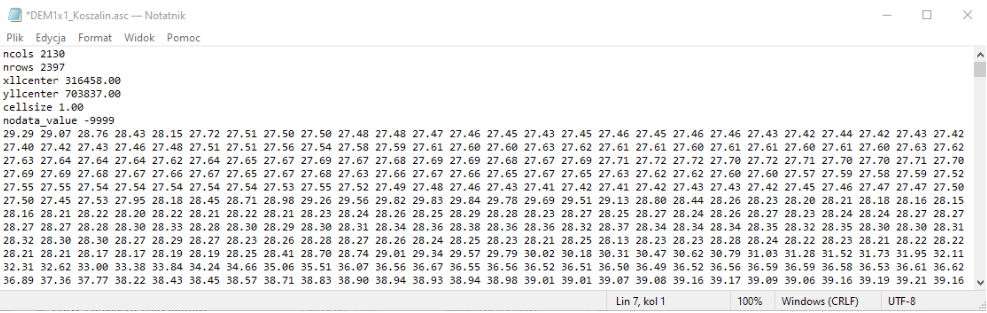
- NMT dla regionu Katalonia w siatce 2×2 m i średnim błędzie wysokości 0.15 m, obejmujący między innymi Tor Catalunya pod Barceloną (poddawany analizie w wielu publikacjach naukowych). Model terenu udostępniony został przez *Institut Cartogràfic i Geològic de Catalunya*[16].

Szczegółowe NMT różnią się między sobą formatem plików, jak również układem współrzędnych. Na rys. 5.5 przedstawiony został fragment pliku w formacie *ArcInfo Grid* o rozszerzeniu *.asc* zawierający NMT dla obszaru obejmującego tor kartingowy w Koszalinie. Pierwsze sześć wierszy pliku zawiera informacje dotyczące siatki modelu.

Pliki o rozszerzeniu *.asc* wczytywano do pamięci programu MATLAB za pomocą wbudowanej funkcji *arcgridread*, która zwraca macierz danych wysokościowych oraz informacje o rozmiarze siatki i położeniu geograficznym pierwszego punktu siatki. Wizualizacja NMT zapisanego w tym formacie pliku została przedstawiona na rys. 5.6a.



Rys. 5.4. Pobieranie współrzędnych krawędzi jezdni koszalińskiego toru kartingowego – zrzut ekranu z aplikacji *Google Earth*



*DEM1x1_Koszalin.asc — Notatnik

Plik Edycja Format Widok Pomoc

```
ncols 2130
nrows 2397
xllcenter 316458.00
yllcenter 703837.00
cellsize 1.00
nodata_value -9999
29.29 29.07 28.76 28.43 28.15 27.72 27.51 27.50 27.50 27.48 27.48 27.47 27.46 27.45 27.43 27.45 27.46 27.45 27.46 27.46 27.43 27.42 27.44 27.42 27.43 27.42
27.40 27.42 27.43 27.46 27.48 27.51 27.51 27.56 27.54 27.58 27.59 27.61 27.60 27.60 27.63 27.62 27.61 27.61 27.60 27.61 27.61 27.60 27.61 27.60 27.63 27.62
27.63 27.64 27.64 27.64 27.62 27.64 27.65 27.67 27.69 27.67 27.68 27.69 27.69 27.68 27.67 27.69 27.71 27.72 27.72 27.70 27.72 27.71 27.70 27.70 27.71 27.70
27.69 27.69 27.68 27.67 27.66 27.67 27.65 27.67 27.68 27.63 27.66 27.67 27.66 27.65 27.67 27.65 27.63 27.62 27.62 27.60 27.60 27.57 27.59 27.58 27.59 27.52
27.55 27.55 27.54 27.54 27.54 27.54 27.54 27.53 27.55 27.52 27.49 27.48 27.46 27.43 27.41 27.42 27.41 27.42 27.43 27.43 27.42 27.45 27.46 27.47 27.47 27.50
27.50 27.45 27.53 27.95 28.18 28.45 28.71 28.98 29.26 29.56 29.82 29.83 29.84 29.78 29.69 29.51 29.13 28.80 28.44 28.26 28.23 28.20 28.21 28.18 28.16 28.15
28.16 28.21 28.22 28.20 28.22 28.21 28.22 28.21 28.23 28.24 28.26 28.25 28.29 28.28 28.23 28.27 28.25 28.27 28.24 28.26 28.27 28.23 28.24 28.24 28.27 28.27
28.27 28.27 28.28 28.30 28.33 28.28 28.30 28.29 28.30 28.31 28.34 28.36 28.38 28.36 28.36 28.32 28.37 28.34 28.34 28.34 28.35 28.32 28.35 28.30 28.30 28.31
28.32 28.30 28.30 28.27 28.29 28.27 28.23 28.26 28.28 28.27 28.26 28.24 28.25 28.23 28.21 28.25 28.13 28.23 28.23 28.28 28.24 28.22 28.23 28.21 28.22 28.22
28.21 28.21 28.17 28.17 28.19 28.19 28.25 28.41 28.70 28.74 29.01 29.34 29.57 29.79 30.02 30.18 30.31 30.47 30.62 30.79 31.03 31.28 31.52 31.73 31.95 32.11
32.31 32.62 33.00 33.38 33.84 34.24 34.66 35.06 35.51 36.07 36.56 36.67 36.55 36.56 36.52 36.51 36.50 36.49 36.52 36.56 36.59 36.59 36.58 36.53 36.61 36.62
36.89 37.36 37.77 38.22 38.43 38.45 38.57 38.71 38.83 38.90 38.94 38.93 38.94 38.98 39.01 39.01 39.07 39.08 39.16 39.17 39.09 39.06 39.16 39.19 39.21 39.16
```

Lin 7, kol 1 100% Windows (CRLF) UTF-8

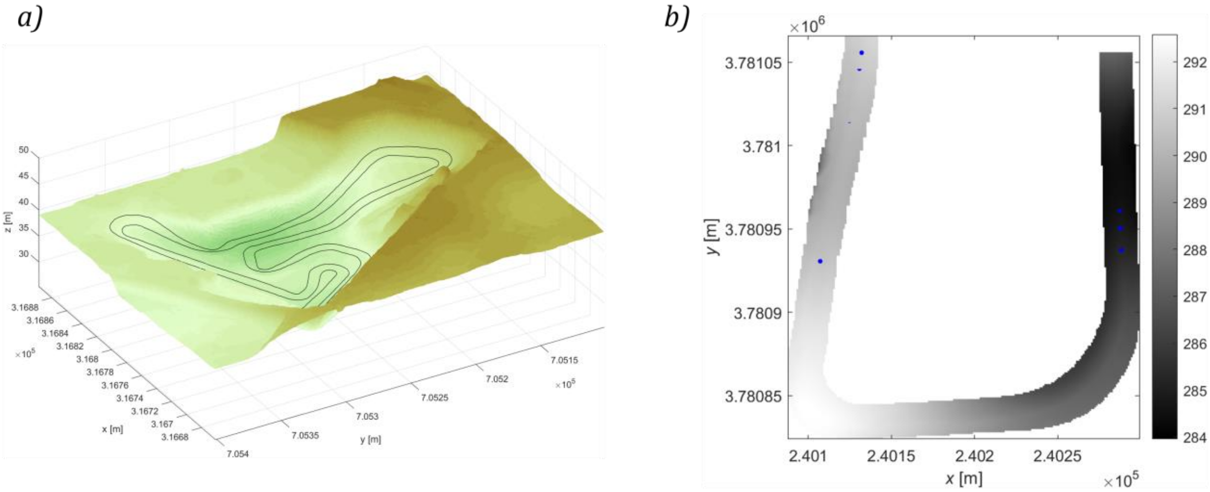
Rys. 5.5. Zawartość pliku w formacie *ArcInfo Grid*

---

[16] URL: icc.cat/appdownloads/index.html [dostęp: 04.2023].

Format *GeoTIFF* pozwala na uzupełnienie pliku o rozszerzeniu *TIFF* (fotografii lotniczej lub satelitarnej) o informacje georeferencyjne. W przypadku numerycznego modelu terenu każdemu pikselowi obrazu przypisywana jest informacja o współrzędnych geograficznych oraz wysokości. Graficzna reprezentacja danych z pliku o rozszerzeniu *GeoTiff* została przedstawiona na rys. 5.6b i dotyczy fragmentu toru Road Atlanta (baza danych wysokościowych USGS), który będzie omawiany w dalszej części rozprawy. Dane wysokościowe reprezentowane są odcieniami szarości pojedynczych pikseli. Odczyt metadanych w wykorzystywanym w niniejszej pracy środowisku MATLAB został przeprowadzony za pomocą programu *geotiffinterp*[17] dostępnego w bazie programów typu open-source MATLAB *File Exchange.*

Podstawowym układem współrzędnych w nawigacji satelitarnej jest układ współrzędnych WGS 84. Jest to również domyślny układ, w którym eksportowane są współrzędne punktów z aplikacji przeznaczonych do pracy z mapami oraz zdjęciami satelitarnymi. Numeryczne modele terenu są zazwyczaj wyrażone w układach współrzędnych charakterystycznych dla danego obszaru. Szczegółowy NMT obejmujący obszar Polski określany jest w układzie współrzędnych EPSG:2180, zaś NMT obejmujący region Katalonii w układzie EPSG:25831. Niezbędna transformacja pobranych współrzędnych krawędzi toru do układu współrzędnych danej bazy informacji wysokościowych możliwa jest między innymi za pomocą dostępnych w sieci



Rys. 5.6. Wizualizacja w środowisku MATLAB danych wysokościowych: NMT w formacie *ArcInfo Grid* (a) oraz w formacie *GeoTiff* (b)

[17] URL: mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/47899-geotiffinterp [dostęp: 04.2023].

nieodpłatnych kalkulatorów. Może zostać również przeprowadzona w środowisku MATLAB za pomocą dodatku o nazwie MATLAB *Geodetic Toolbox* rozszerzającego funkcjonalność oprogramowania lub zostać dokonana poprzez zmianę domyślnego układu współrzędnych eksportowanych danych z aplikacji przeznaczonej do pracy z mapami.

5.2.3. Układ współrzędnych prostokątnych UTM

Sformułowane w podrozdziale 5.1 zadanie numerycznego odwzorowania trasy wymaga danych wejściowych wyrażonych w układzie współrzędnych prostokątnych, którego oś z skierowana będzie zgodnie ze zwrotem przyspieszenia ziemskiego g. Współrzędne krawędzi trasy wyrażone są natomiast w układzie współrzędnych elipsoidalnych. Wobec braku możliwości rozwinięcia elipsoidy na płaszczyznę, należy posłużyć się jedną z metod odwzorowania kartograficznego, które pozwalają na konwersję współrzędnych z układu współrzędnych geograficznych do układu współrzędnych prostokątnych płaskich.

W niniejszej pracy wykorzystano uniwersalne poprzeczne odwzorowanie Mercatora (z ang. *Universal Transverse Mercator*, skrót: UTM) [66]. Układ współrzędnych prostokątnych UTM powstaje w wyniku podziału elipsoidy odniesienia na 60 pasów (stref) o długości 6° każdy. Następnie, każdemu punktowi elipsoidy przyporządkowywany jest punkt na płaszczyźnie zgodnie z przyjętym odwzorowaniem. Maksymalne zniekształcenie liniowe występuje na południku osiowym danej strefy (południk dzielący strefę na połowy) i wynosi 40 cm/km (współczynnik skali liniowej $m_0 = 0.9996$). Dla każdej strefy istnieją dwie linie równoległe do południka osiowego oddalone od niego o 180 km, dla których $m_0 = 1$. Współczynnik skali w punktach najbardziej oddalonych od południka osiowego wynosi $m_0 = 1.00097$. Skala liniowa jest stała wzdłuż południka i zmienia się w sposób paraboliczny wraz ze wzrostem odległości od południka osiowego strefy. Ze względu na znaczący wzrost błędu odwzorowania poza strefą, układ UTM powinien być stosowany w obrębie jednej strefy.

Zbiory punktów charakteryzujące krawędzie trasy (opisane za pomocą szerokości oraz długości geograficznej w układzie współrzędnych WGS 84) przekształcono do układu współrzędnych prostokątnych UTM za pomocą wbudowanej funkcji programu MATLAB o nazwie *mfwdtran.* Funkcja *mfwdtran*, po wcześniejszym wskazaniu odpowiedniej strefy UTM, dostarcza współrzędne w układzie współrzędnych prostokątnych płaskich. Ponieważ odwzorowywany obiekt wyścigowy może znajdować się na granicy stref, przyjęto, że wybór strefy UTM warunkować będzie liczność punktów w danej strefie.

5.2.4. Analiza rezultatów numerycznego odwzorowania jezdni

W niniejszym przykładzie omówiony zostanie rezultat numerycznego odwzorowania toru kartingowego zlokalizowanego w Koszalinie. Tor ten charakteryzuje się zróżnicowaną geometrią jezdni, zmianami wysokości terenu oraz zróżnicowanym pochyleniem poprzecznym.

Wykorzystanymi w zadaniu danymi wysokościowymi były: globalny NMT podany w siatce 30×20 m oraz szczegółowy NMT podany w siatce 1×1 m. Współrzędne krawędzi toru określono za pomocą aplikacji *Google Earth* na podstawie zdjęcia satelitarnego (rys. 5.4). Współczynniki kary obecne w składniku $F_2\left(s, \mathbf{u}(s)\right)$ wskaźnika jakości (5.1) dobierane były metodą prób i błędów do momentu uzyskania satysfakcjonujących rezultatów. Ich wartości zostały zebrane w tabeli 5.1.

Odwzorowany numerycznie tor został przedstawiony na rys. 5.7. Danymi wejściowymi było łącznie 879 punktów położonych na obydwu jego krawędziach. Moduł błędu odwzorowania[18] krawędzi toru przedstawiony został na rys. 5.8, a uśrednione jego wartości (dla NMT o rozdzielczości 1 m) wyniosły: 0.19 m (w płaszczyźnie jezdni) oraz 0.02 m (w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny jezdni). Maksymalne wartości błędu odwzorowania w płaszczyźnie jezdni przypadły na zakręty nr 11, 12 oraz 13 (rys. 5.9) i dotyczą zewnętrznych krawędzi łuków, w miejscach, w których nie należy spodziewać się przebiegu optymalnej trajektorii ruchu pojazdu. Uwzględniając zastosowaną metodę pozyskiwania danych wejściowych polegającą na ręcznym wskazywaniu krawędzi toru na zdjęciu satelitarnym oraz mając na uwadze dokładność NMT, jak również interpolację danych wysokościowych w punktach międzywęzłowych, uzyskany średni błąd odwzorowania uznany został za satysfakcjonujący.

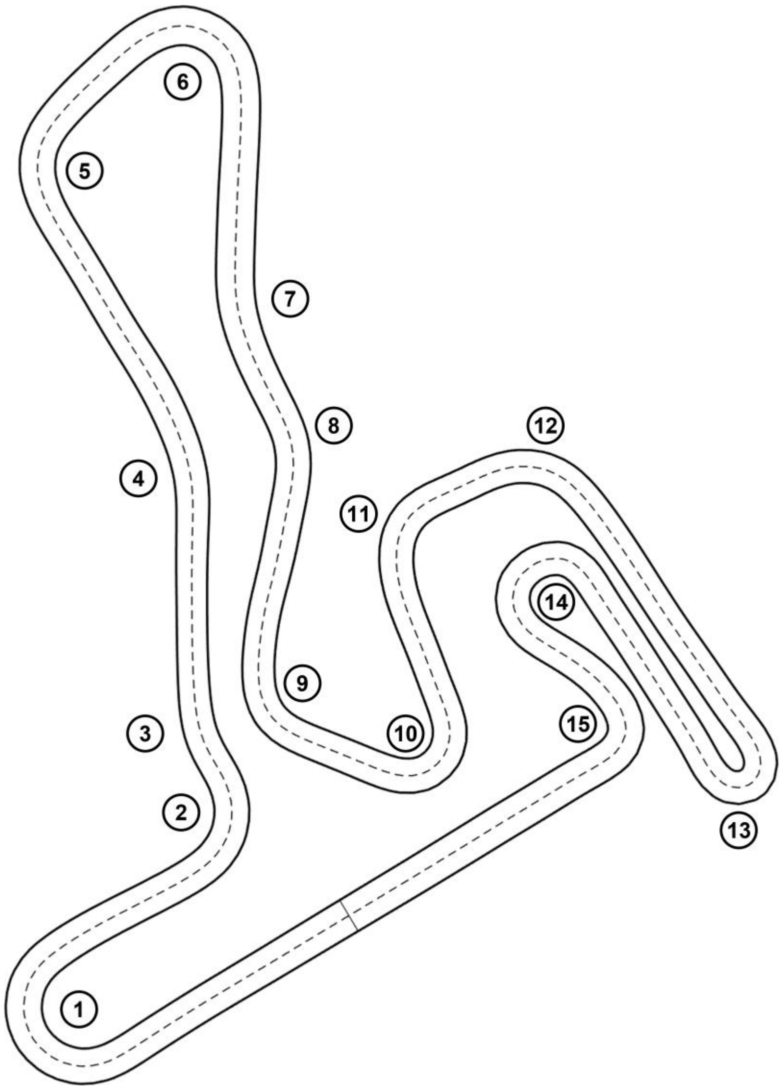
Na rys. 5.10 została przedstawiona trójwymiarowa wizualizacja koszalińskiego toru kartingowego pokolorowana w zależności od pochylenia podłużnego, zaś na rys. 5.11

---

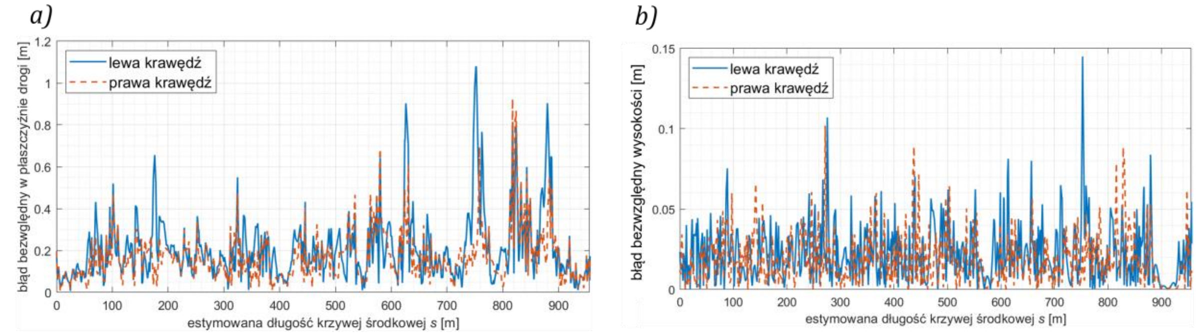
[18] Wyróżnione zostały dwa błędy odwzorowania: w płaszczyźnie jezdni oraz w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny jezdni. Błąd odwzorowania w płaszczyźnie jezdni zdefiniowany został jako odległość mierzona w płaszczyźnie jezdni między dowolnym punktem danych wejściowych a odpowiadającym mu punktem na wyznaczonej numerycznie krawędzi. Błąd odwzorowania wysokości sformułowany został w sposób analogiczny, z tą różnicą, że odległość między punktami odmierzana była w kierunku prostopadłym do płaszczyzny jezdni.

Tabela 5.1. Wagi w zadaniu numerycznego odwzorowania jezdni

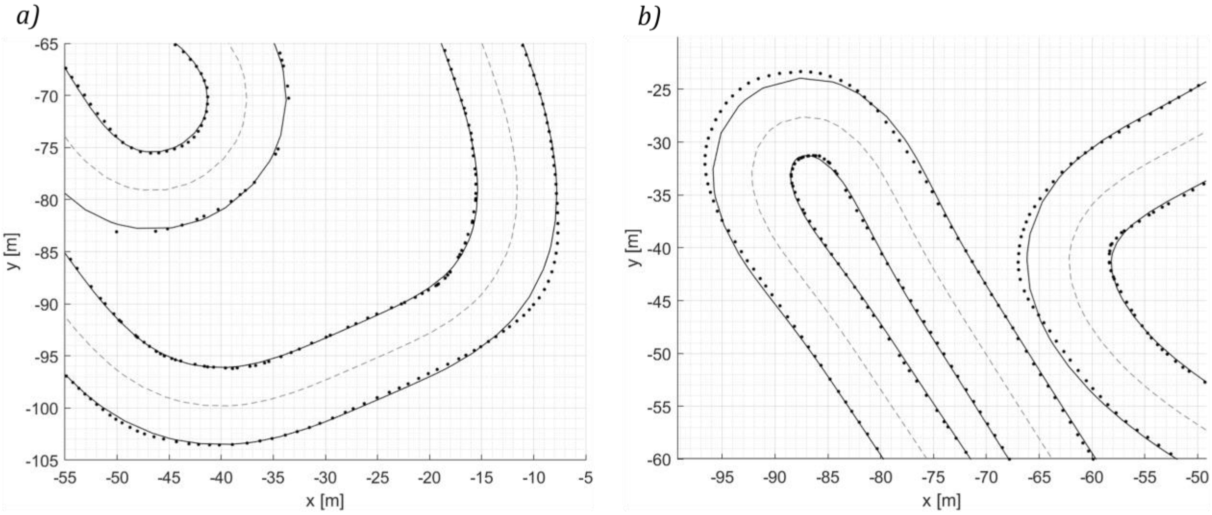
Waga	Wartość
w_θ	10^4
w_ϕ	10^4
w_μ	10^4
w_w	10^2



Rys. 5.7. Mapa odwzorowanego numerycznie toru kartingowego w Koszalinie wraz z przyjętą przez autora pracy numeracją zakrętów



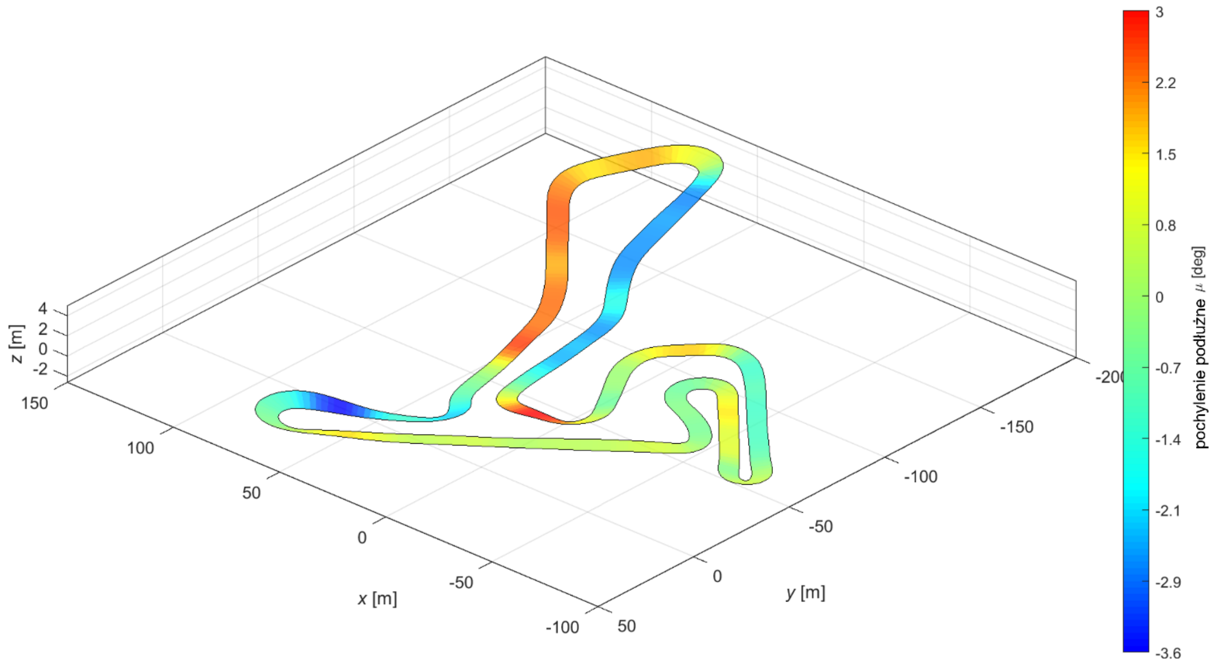
Rys. 5.8. Błąd odwzorowania w płaszczyźnie jezdni (a), błąd odwzorowania wysokości (b)



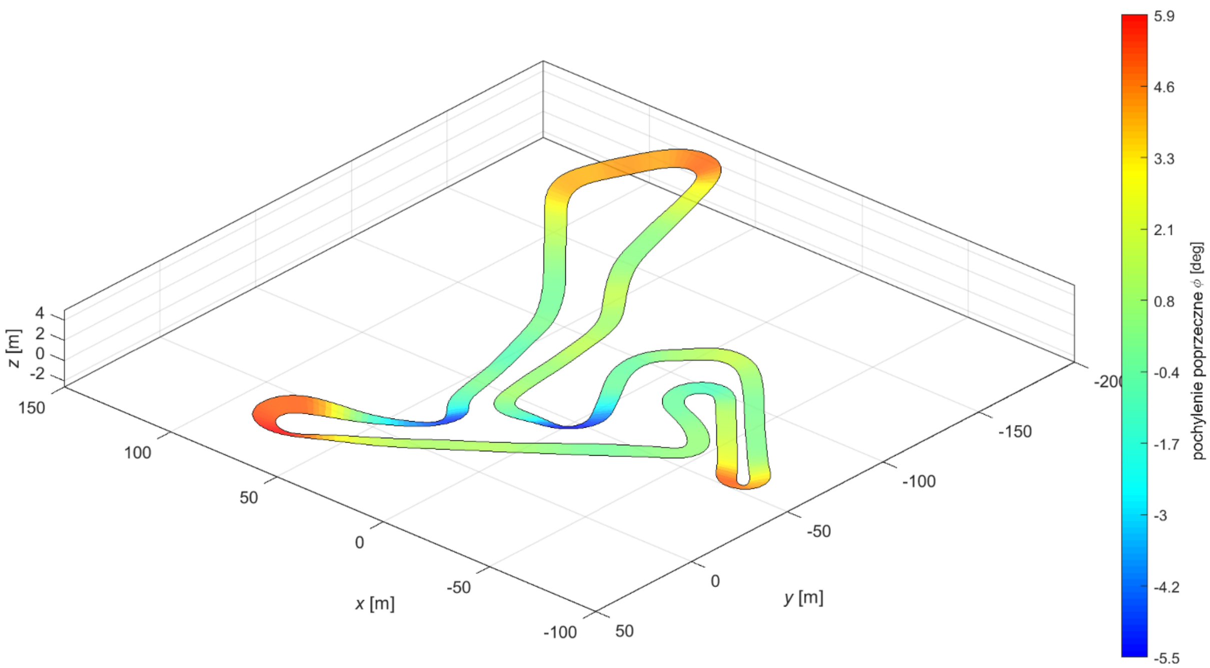
Rys. 5.9. Zbliżenie na fragmenty trasy o największym błędzie odwzorowania w płaszczyźnie jezdni: zakręty nr 11 i 12 (a), zakręt nr 13 (b)

pokolorowana w funkcji pochylenia poprzecznego jezdni. Aby uwidocznić różnice między pionowymi współrzędnymi trasy, modyfikacji poddane zostały proporcje osi z, w taki sposób, że pojedyncza jednostka na osi z przyjmuje długość równą trzem jednostkom na osi x lub y. Prezentowane na rys. 5.10 pochylenie podłużne μ przyjmuje wartość dodatnią, gdy jezdnia wznosi się, zaś prezentowane na rys. 5.11 pochylenie poprzeczne ϕ jest dodatnie, gdy kierunek pochylenia jezdni względem osi t reperu Darboux jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

Odwzorowany numerycznie tor o długości krzywej szkieletowej wynoszącej 947.3 m charakteryzuje się przewyższeniem równym 6.1 m, maksymalnym bezwzględnym pochyleniem poprzecznym $|\phi_{max}| = 5.9°$ oraz maksymalnym dodatnim i ujemnym pochyleniem podłużnym wynoszącym odpowiednio $\mu_{max} = 3.0°$ i $\mu_{min} = \text{-}3.6°$. Długość linii środkowej podawana na oficjalnej stronie internetowej toru wynosi 1050 m, jest więc o ponad 100 m większa od estymowanej. Otrzymany numerycznie wynik został



Rys. 5.10. Trójwymiarowa wizualizacja toru pokolorowana w funkcji pochylenia podłużnego μ



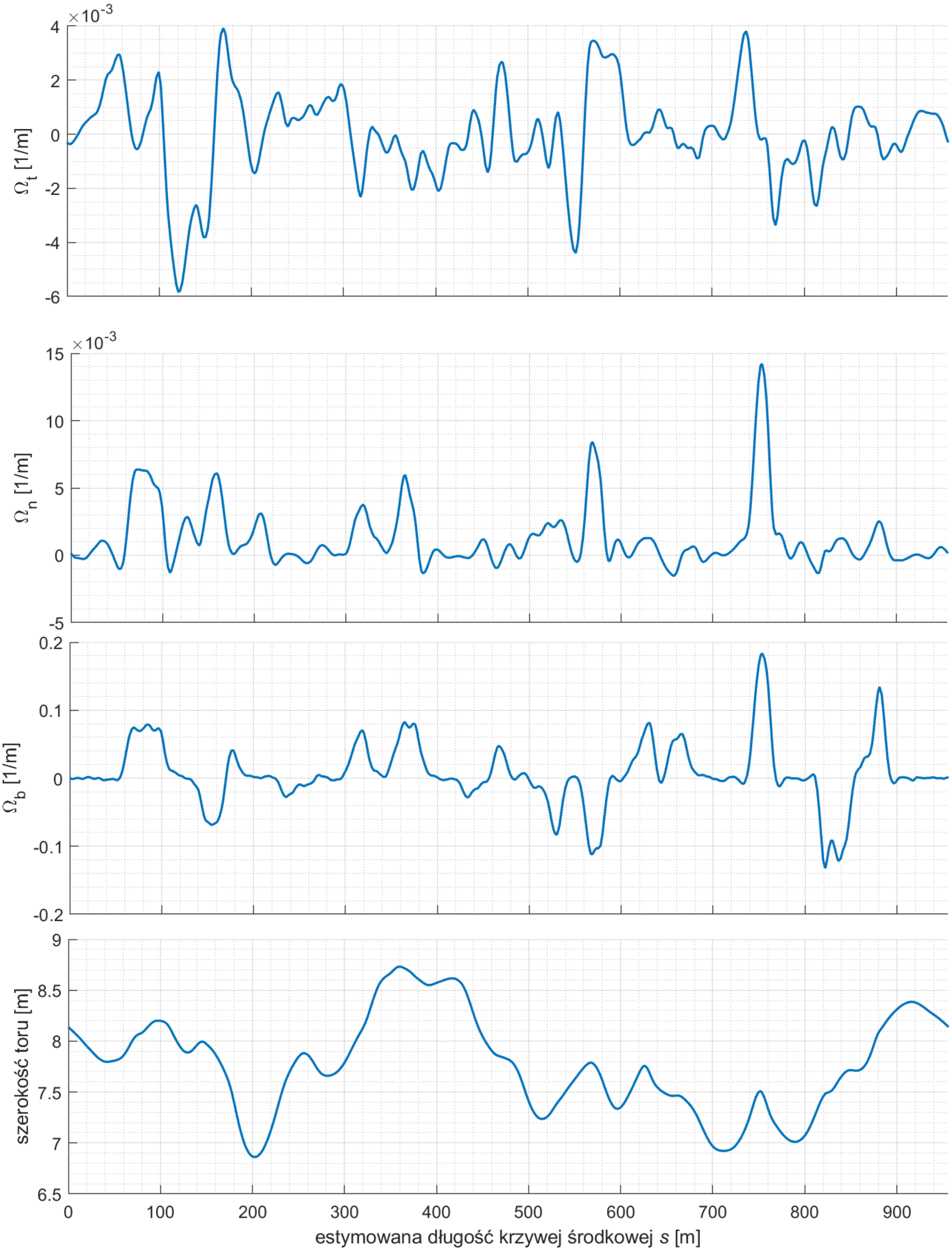
Rys. 5.11. Trójwymiarowa wizualizacja toru pokolorowana w funkcji pochylenia poprzecznego ϕ

potwierdzony za pomocą pomiaru długości ścieżki linii środkowej toru korzystając z narzędzia *Google Earth*. Wyznaczone w zadaniu sterowania optymalnego krzywizny Ω_t, Ω_n i Ω_b oraz szerokość toru r_w zostały przedstawione na rys. 5.12.

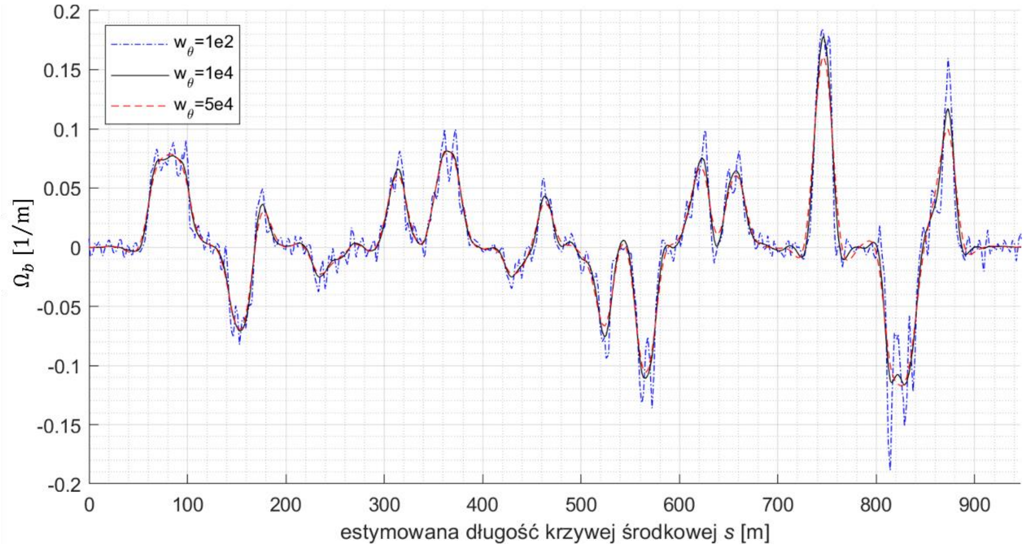
We wstępie do niniejszego rozdziału została zamieszczona informacja, że obecne we wskaźniku jakości współczynniki kary dobrane zostały metodą prób i błędów. Różnice w krzywiźnie Ω_b w zależności od wartości wagi w_θ zostały zilustrowane na rys. 5.13. Prezentowane krzywe dotyczą rezultatów dla następujących wartości wagi w_θ: 10^2 (linia kreska-kropka w kolorze niebieskim), 10^4 (linia ciągła w kolorze czarnym), $5 \cdot 10^4$ (linia przerywana w kolorze czerwonym). Wraz ze wzrostem wartości współczynnika kary wzrasta poziom filtracji, ale spada dokładność odwzorowania. Średni błąd odwzorowania w płaszczyźnie jezdni wyniósł 0.15 m dla $w_\theta = 10^2$, 0.19 m dla $w_\theta = 10^5$ oraz 0.25 m dla $w_\theta = 5 \cdot 10^4$.

Dane wysokościowe pochodzące z NMT podanego w siatce 30×20 m oraz NMT podanego w siatce 1×1 m zostały porównane na rys. 5.14 i 5.15. Ponieważ z punktu widzenia analizowanego problemu, interesująca jest wyłącznie względna wysokość punktów względem siebie, przyjęto, że współrzędna pionowa lewego krańca linii startu-mety będzie przyjmować wartość równą zeru. Różnica położenia pionowego między lewą, a prawą krawędzią toru, istotna pod względem wierności odwzorowania pochylenia poprzecznego jezdni, została przedstawiona na rys. 5.15. Różnice w danych wejściowych prowadzą do zauważalnych rozbieżności w przebiegach kątów Eulera (rys. 5.16). Na rys. 5.16a przedstawiony został przebieg wyznaczonego w ZSO pochylenia poprzecznego ϕ, zaś na rys. 5.16b pochylenia podłużnego μ. Przebiegi kątów ϕ oraz μ dla NMT podanego w siatce 30×20 m charakteryzują się znacznymi wahaniami wartości. Ponadto, ϕ oraz μ przyjmują w wielu fragmentach trasy przeciwny znak niż w przypadku NMT podanego w siatce 1×1 m (524-624 m, 749-807 m na wykresie pochylenia poprzecznego oraz 231-270 m i 430-475 m na wykresie pochylenia podłużnego).

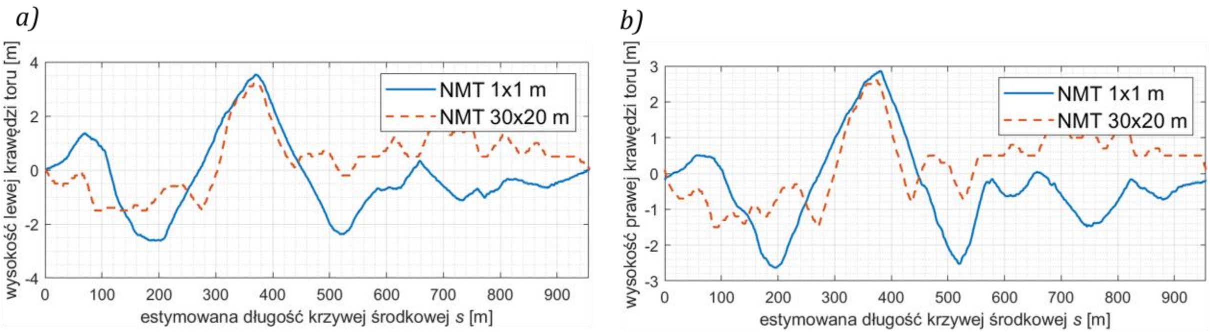
Porównanie graficznej reprezentacji odwzorowanych numerycznie torów zostało przedstawione na rys. 5.17. Traktując NMT o rozdzielczości 1 m jako punkt odniesienia, można stwierdzić, że globalny numeryczny model terenu (w siatce 30×20 m i rzadszej) jest niewystarczający do satysfakcjonującego odwzorowania geometrii trójwymiarowej jezdni. Obserwowane różnice pomiędzy otrzymanymi rezultatami są zarówno ilościowe jak i jakościowe. Rezultaty dla globalnego NMT są ponadto wizualnie niezgodne



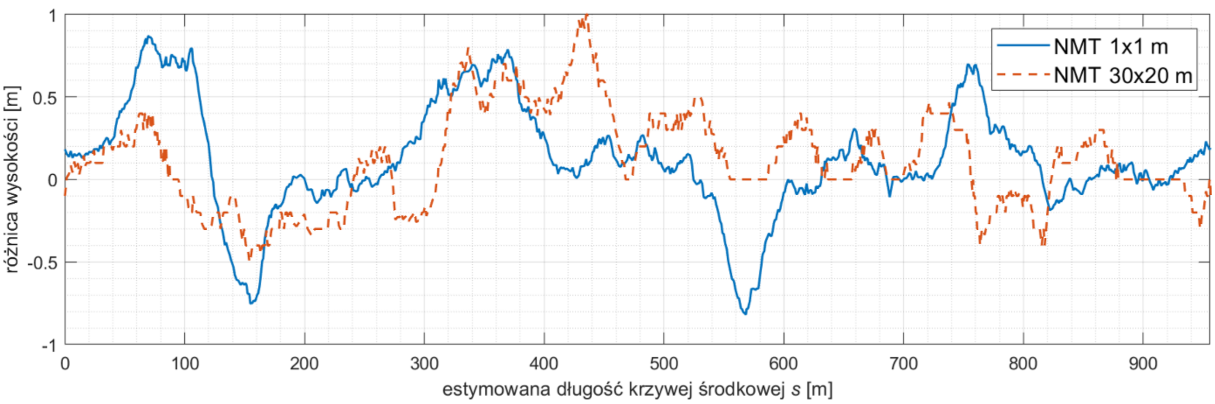
Rys. 5.12. Przebiegi wybranych charakterystyk jezdni, w kolejności od góry: skręcenie geodezyjne Ω_t, krzywizna normalna Ω_n, krzywizna geodezyjna Ω_b, szerokość jezdni r_w



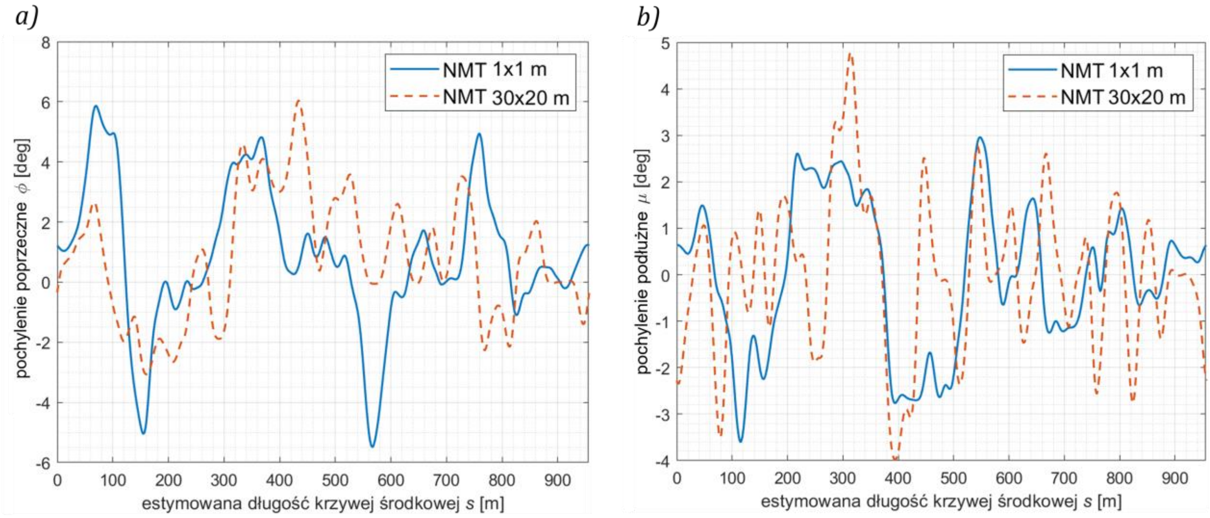
Rys. 5.13. Krzywizna geodezyjna Ω_b dla trzech różnych wartości współczynnika kary w_θ



Rys. 5.14. Wysokość lewej (a) oraz prawej (b) krawędzi trasy określona na podstawie NMT podanego w siatce 1×1 m (linia ciągła) oraz 30×20 m (linia przerywana)



Rys. 5.15. Różnica pionowej współrzędnej między lewą a prawą krawędzią jezdni dla NMT podanego w siatce 1×1 m (linia ciągła) oraz 30×20 m (linia przerywana)



Rys. 5.16. Porównanie pochylenia poprzecznego ϕ (a) oraz pochylenia podłużnego μ (b)

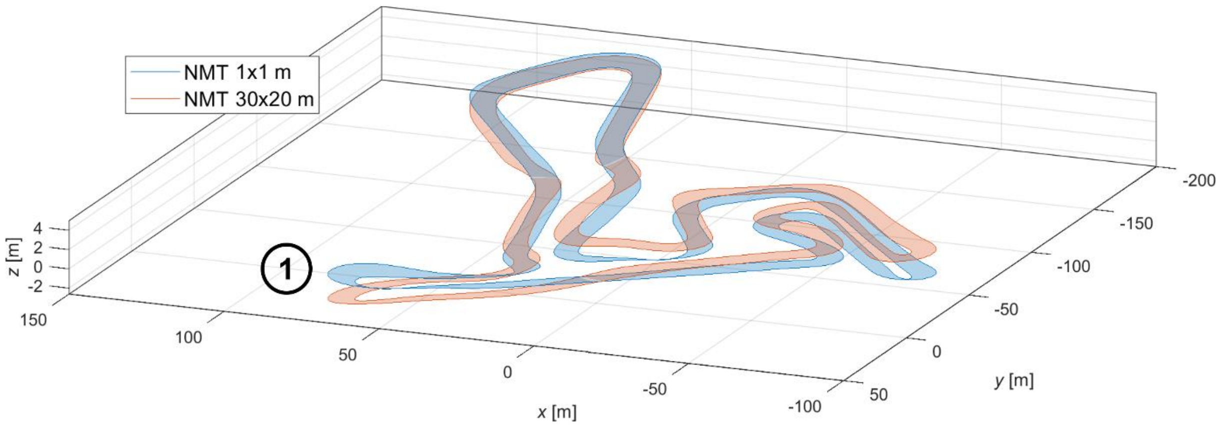
z rzeczywistością. Dla NMT podanego w siatce 30×20 m, wyznaczone pochylenie poprzeczne pierwszego łuku trasy skierowane jest w kierunku zewnętrznej krawędzi jezdni, podczas gdy w rzeczywistości jest to zakręt o największym pochyleniu poprzecznym skierowanym w stronę krawędzi wewnętrznej (rys. 5.18).

W przypadku uproszczenia problemu do zadania płaskiego, obserwowane są nieznaczne różnice w długości krzywej szkieletowej oraz szerokości jezdni (rys. 5.19), wynikające z rzutowania charakteryzujących krawędzie toru punktów na płaszczyznę. Jezdnia ulega zwężeniu na pochylonych poprzecznie fragmentach trasy, zaś mniejsza całkowita długość krzywej szkieletowej związana jest z pominięciem pochylenia podłużnego. Dla omawianego obiektu wyścigowego, całkowita długość krzywej szkieletowej jest o 0.42 m krótsza niż w przypadku obliczeń 3D, zaś maksymalna różnica szerokości jezdni wynosi 0.03 m.

Zaprezentowane na rys. 5.20 zdjęcie satelitarne z nałożoną odwzorowaną numerycznie jezdnią potwierdza poprawność doboru metody odwzorowania kartograficznego.

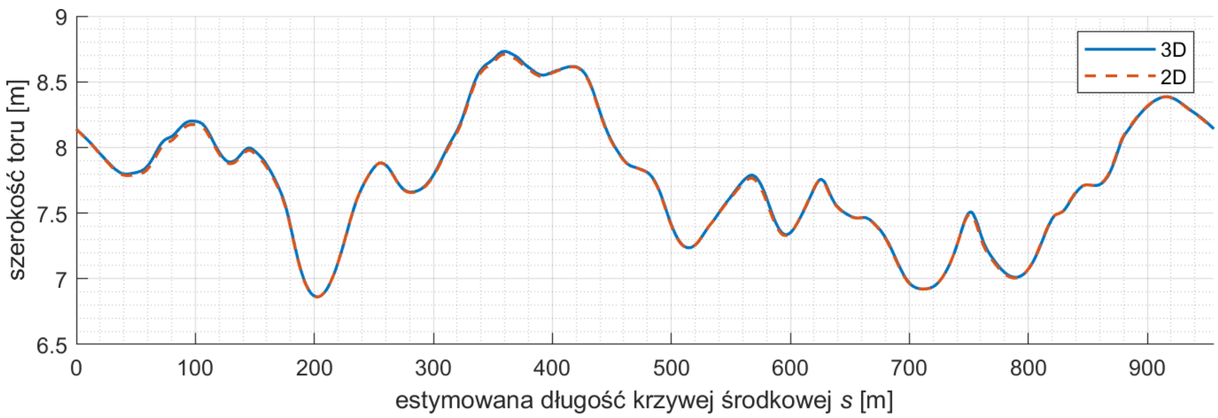
5.2.5. Pozyskiwanie danych wysokościowych za pomocą systemu pozycjonowania

Szczegółowa analiza pomiarów satelitarnych wykracza poza ramy niniejszej pracy, jednakże w przypadku analizowanego problemu nie sposób tę kwestię pominąć, tym bardziej, że pomiary satelitarne wykorzystywane są w niemal każdym wyścigowym pokładowym układzie pomiarowym. Możliwość potraktowania danych z systemu nawigacyjnego jako metody pozyskiwania danych wysokościowych uzależniona będzie



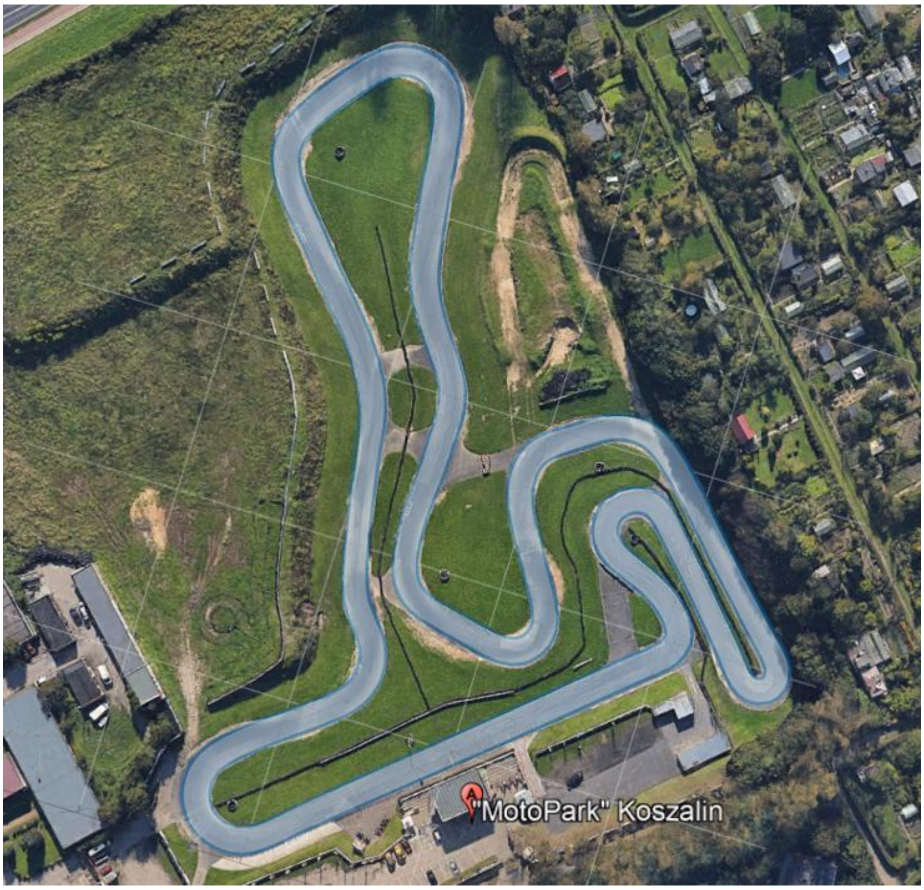
Rys. 5.17. Porównanie odwzorowanej numerycznie jezdni dla NMT o rozdzielczości 1 m (kolor niebieski) oraz NMT podanego w siatce 30×20 m (kolor pomarańczowy)

Rys. 5.18. Pierwszy zakręt toru kartingowego w Koszalinie, klatka filmu umieszczonego w sieci[19]



Rys. 5.19. Porównanie szerokości toru przestrzennego oraz płaskiego

[19] URL: youtube.com/watch?v=dz-eiTiWQ_0 [dostęp: 04.2023].



Rys. 5.20. Zdjęcie satelitarne z aplikacji *Google Earth* z naniesionym odwzorowanym numerycznie torem

od rodzaju odbiornika satelitarnego, jego oprogramowania, liczby wykorzystywanych systemów nawigacyjnych, jak również licznych czynników zewnętrznych. Niniejszy rozdział ma na celu zwrócenie uwagi na istotne aspekty pozyskiwania danych wysokościowych za pomocą pomiarów satelitarnych oraz konieczność krytycznej oceny otrzymywanych rezultatów.

Pomiary satelitarne w pokładowych układach pomiarowych wykorzystywane są w celu:

- powiązania rejestrowanych danych z pozycją pojazdu na torze,
- określenia prędkości pojazdu, jego przyspieszeń (wzdłużnego oraz poprzecznego) oraz prędkości kątowej,
- informowania kierowcy za pośrednictwem tablicy wskaźników o czasie ostatniego okrążenia oraz aktualizowanej w czasie rzeczywistym różnicy czasu między okrążeniem bieżącym a okrążeniem referencyjnym.

Jedną ze zwracanych przez system pozycjonowania informacji jest wysokość elipsoidalna, która może zostać potraktowana jako trzecia współrzędna (wysokość) w zbiorze danych wejściowych w procesie numerycznego odwzorowania jezdni.

Odbiorniki sygnału satelitarnego wykorzystywane w wyścigowych pokładowych układach pomiarowych charakteryzują się (z reguły) współczynnikiem CEP[20] mniejszym od 3.0 m. Współczynnik CEP na przykładzie dokumentacji firmy 2D Datarecording [67], przyjmuje wartości:

- od 2.5 m do 3.0 m – w przypadku odbioru danych satelitarnych z systemu nawigacyjnego GPS,
- 1.5 m – w przypadku jednoczesnego odbioru danych satelitarnych z dwóch systemów nawigacyjnych: GPS oraz GLONASS/BeiDou,
- $<$ 1 m – gdy odbiór danych satelitarnych możliwy jest jednocześnie z czterech systemów nawigacyjnych: GPS, GLONASS, Galileo oraz Beidou.

Częstotliwość rejestrowanych pomiarów zawiera się między 10 a 50 Hz. Przyjmuje się, że dokładność pozycjonowania w pionie jest około dwa razy mniejsza niż w płaszczyźnie horyzontalnej.

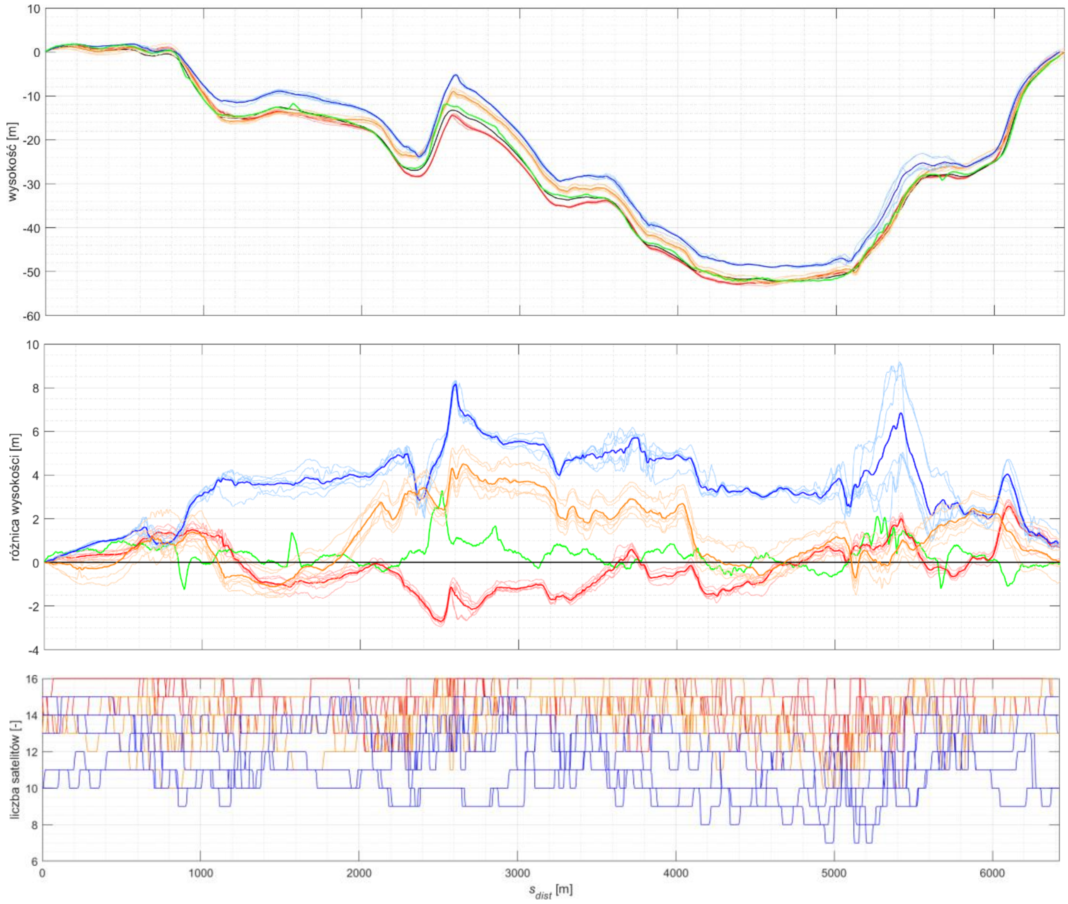
W celu oceny możliwości zastosowania w procesie numerycznego odwzorowania jezdni danych wysokościowych pozyskiwanych za pomocą pomiarów satelitarnych, poddano weryfikacji wysokość elipsoidalną rejestrowaną przez standardowy odbiornik sygnału satelitarnego montowany w wyścigowych pokładowych układach pomiarowych. Wykorzystano dane eksperymentalne udostępnione w sieci, dotyczące ruchu samochodu[21] oraz motocykla [68] po torze wyścigowym Road America. Omawiane dalej dane zostały pozyskane za pomocą urządzenia AIM EVO4S, które rejestrowało informacje satelitarne poprzez odbiornik AIM GPS08[22] umożliwiający jednoczesny odbiór sygnału z dwóch systemów satelitarnych: GPS oraz GLONASS.

Górny wykres na rys. 5.21 przedstawia zarejestrowaną wysokość elipsoidalną w trakcie trzech odrębnych standardowych sesji treningowych. Przedstawiona na

[20] CEP (z ang. Circular Error Probability) - promień okręgu o środku w punkcie o znanej pozycji, w którym zawierać się będzie 50% pomiarów.

[21] W prezentowanym przykładzie wykorzystano dane zarejestrowane podczas ruchu samochodu, ponieważ zamontowany na motocyklu odbiornik sygnału satelitarnego przechyla się wraz z pojazdem, co wprowadza dodatkowe źródło błędu. Źródło danych eksperymentalnych: youtube.com/watch?v=6i0YWARplyg [dostęp: 04.2023].

[22] URL: aimtechnologies.com/aim-gps08-module/ [dostęp: 05.2023].



Rys. 5.21. Położenie pionowe (wysokość) trajektorii ruchu pojazdów (u góry), różnica położenia pionowego względem NMT o rozdzielczości 1m (wykres środkowy), liczba satelitów, z których odbierane były dane (na dole). Zbiory pomiarów satelitarnych oznaczono kolorem czerwonym (samochód), niebieskim (samochód) oraz pomarańczowym (motocykl), NMT o rozdzielczości 30 m kolorem zielonym, zaś NMT o rozdzielczości 1 m kolorem czarnym. Pogrubione linie przedstawiają uśrednione przebiegi poszczególnych zestawów danych eksperymentalnych

rys. 5.21 wysokość dotyczy więc zarejestrowanych trajektorii przejazdów. Wyszczególnione zostały trzy zbiory danych. Przejazdy samochodem w trakcie dwóch różnych sesji treningowych zostały oznaczone odpowiednio kolorem czerwonym oraz niebieskim. Zbiór krzywych w kolorze pomarańczowym dotyczy ruchu motocykla. Dla każdego zestawu danych wyznaczono uśredniony przebieg oznaczony pogrubioną linią w odpowiadającym danemu zbiorowi kolorze. Kolorem czarnym zilustrowane zostały dane wysokościowe pozyskane za pomocą NMT o rozdzielczości 1 m (baza danych wysokościowych USGS). Kolor zielony powiązany został z NMT o rozdzielczości w przybliżeniu równej 30 m. Dane wysokościowe z obydwu modeli NMT przypisane zostały współrzędnym geograficznym odpowiadającym trajektorii przejazdu z wybranego okrążenia z analizowanej bazy danych. Przyjęto umownie, że prezentowane przebiegi przyjmują wartość równą zeru na początku okrążenia. Różnica wysokości zbiorów danych eksperymentalnych względem szczegółowego NMT została przedstawiona na środkowym wykresie z rys 5.21. Dolny wykres przedstawia liczbę satelitów, z których odbiornik sygnału satelitarnego pozyskiwał informacje.

Zaprezentowane na rys. 5.21 dane wysokościowe pochodzące z globalnego numerycznego modelu terenu są znacznie bliższe modelowi szczegółowemu niż w przykładzie omawianym w podrozdziale 5.2.4. Zmienność zarejestrowanej eksperymentalnie wysokości elipsoidalnej jest zbliżona do NMT, w szczególności w przypadku zbioru oznaczonego kolorem czerwonym. Jednakże, ze względu na niedostateczną powtarzalność pomiarów między różnymi sesjami pomiarowymi należałoby rozważyć rezygnację z poszukiwania pochylenia poprzecznego jezdni. Domniemać można, że przypisanie identycznych danych wysokościowych dla punktów zarejestrowanych na obydwu krawędziach trasy (gdyby taki pomiar został zrealizowany) pozwoliłoby na uzyskanie zbliżonego do szczegółowego NMT przebiegu pochylenia podłużnego μ oraz krzywizny Ω_n. Analogiczny wniosek może zostać sformułowany w odniesieniu do globalnych numerycznych modeli terenu, które, jak przedstawiono w podrozdziale 5.2.4, charakteryzują się niewystarczającą rozdzielczością do satysfakcjonującego odwzorowania pochylenia poprzecznego jezdni.

5.3. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiony został problem numerycznego odwzorowania geometrii jezdni opisanej jako znana z geometrii różniczkowej powierzchnia zorientowana. Główną część rozdziału poświęcono analizie dostępnych metod pozyskiwania danych wejściowych do sformułowanego we wstępie zadania optymalizacji. Ponieważ proces określania współrzędnych geograficznych krawędzi trasy nie stanowi większego problemu (mogą zostać zarejestrowane za pomocą pomiarów satelitarnych lub wyznaczone za pomocą aplikacji przeznaczonych do pracy z mapami), prowadzone rozważania dotyczyły pozyskiwania danych wysokościowych. Opisano metody niewymagające stosowania specjalistycznego sprzętu pomiarowego ani prowadzenia kosztownych prac pomiarowych na odwzorowywanym obiekcie. Rozpatrzono dostępne w sieci bazy danych wysokościowych (numeryczne modele terenu) oraz poruszono zagadnienie pomiaru wysokości elipsoidalnej za pomocą typowego odbiornika sygnału satelitarnego wykorzystywanego w pokładowych systemach akwizycji danych w pojazdach wyścigowych.

Na podstawie przeprowadzonej analizy porównawczej rezultatów obliczeń numerycznych, sformułowane zostały następujące wnioski:

- rozdzielczość globalnych numerycznych modeli terenu jest niewystarczająca do uzyskania satysfakcjonującego odwzorowania pochylenia poprzecznego jezdni,
- błędy odwzorowania wynikające z zastosowania globalnego NMT mogą być na tyle duże, że zauważalne są „gołym okiem”,
- charakterystyki jezdni koszalińskiego toru kartingowego odwzorowane za pomocą globalnego NMT cechowały się oscylacyjnym przebiegiem,
- rezultaty otrzymane za pomocą szczegółowego NMT są wizualnie zgodne z rzeczywistością i pozwolą w zagadnieniach omówionych w rozdziałach 6 i 7 na satysfakcjonujące odwzorowanie ruchu pojazdu po przestrzennej jezdni,
- wierne odwzorowanie pochylenia poprzecznego jezdni na podstawie danych wysokościowych pozyskanych za pomocą typowych odbiorników sygnału satelitarnego montowanych w wyścigowych pokładowych układach pomiarowych można uznać za niemożliwe (ze względu na zbyt dużą niepewność pomiaru),
- domniemać można, że pomiary satelitarne mogą być potraktowane jako alternatywna metoda pozyskiwania informacji wysokościowych, gdy poszukiwaną charakterystyką jezdni będzie jej pochylenie podłużne,
- konieczna jest wnikliwa analiza otrzymywanych rezultatów, w szczególności w zadaniach, w których wykorzystane zostały globalne NMT oraz pomiary satelitarne.

W najbliższych latach należy spodziewać się wzrostu popularności oraz dostępności technologii precyzyjnych pomiarów satelitarnych RTK[23], którą charakteryzuje dokładność pozycjonowania rzędu centymetrów. Przy zapowiadanej dokładności można domniemać, że pomiary wykonane w trakcie przejazdu po jednej i drugiej krawędzi toru (co jest możliwe do zrealizowania na przykład po zakończeniu dnia treningowego[24]) powinny umożliwić otrzymanie wystarczająco dokładnych informacji wysokościowych.

---

[23] Pomiar RTK (z ang. *Real Time Kinematic*) to metoda precyzyjnych pomiarów satelitarnych, w których pozycja mobilnego odbiornika sygnału satelitarnego podlega w czasie rzeczywistym poprawkom. Poprawki wprowadzane są na podstawie danych obserwacyjnych wysyłanych z naziemnej stacji referencyjnej o znanych współrzędnych.

[24] Po zakończeniu dnia treningowego poruszanie się po nitce toru wyścigowego jest z reguły ograniczone do ruchu pieszego, pojazdów napędzanych siłą mięśni lub pojazdów elektrycznych typu hulajnoga.

6. Zadanie minimalizacji czasu manewru w ruchu po jezdni 3D

Zadanie poszukiwania optymalnej trajektorii ruchu (i minimalizacji czasu manewru) po trójwymiarowej jezdni może zostać opisane za pomocą identycznego zestawu zmiennych stanu jak w przypadku dwuwymiarowego modelu jezdni: prędkości stycznej do trajektorii ruchu, odległości pojazdu od krzywej szkieletowej mierzonej w płaszczyźnie jezdni oraz kąta między wektorem prędkości a styczną do krzywej szkieletowej.

6.1. Wyprowadzenie równań stanu

Aby ustalić niezbędne zależności kinematyczne wprowadzony został nieinercjalny układ współrzędnych $A_{\xi\eta\zeta}$ poruszający się wraz z pojazdem, zaczepiony w punkcie A będącym rzutem środka ciężkości pojazdu na płaszczyznę jezdni (rys. 6.1). Współrzędne tego punktu w układzie współrzędnych jezdni (reperze Darboux) wynoszą $\mathbf{n} = [0\ n\ 0]^T$. Prędkość kątową reperu Darboux w dziedzinie czasu opisuje zależność

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_t\ \omega_n\ \omega_b]^T = \boldsymbol{\Omega}_D \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega}_D \dot{s}. \tag{6.1}$$

W przypadku, gdy $\dot{s} = 1$, prawdziwa jest równość $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_D$.

Prędkość bezwzględna punktu A wyrażona w układzie współrzędnych jezdni[25] wynosi

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_t \\ \omega_n \\ \omega_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{n} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{s} - n\omega_b \\ \dot{n} \\ n\omega_t \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

zaś w układzie związanym z pojazdem

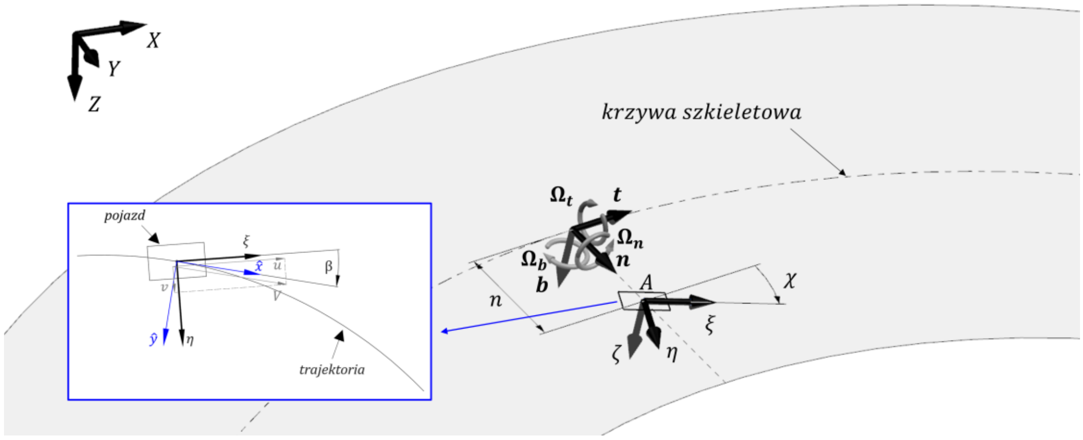
$$\mathbf{v}^{(\xi\eta\zeta)} = [u\ v\ w]^T. \tag{6.3}$$

---

[25] Prędkość punktu P w ruchu złożonym opisana jest ogólną zależnością:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_u + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}}{\mathrm{d}t}\right)_l = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \mathbf{w},$$

gdzie $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}$ jest promieniem wodzącym punktu P, $\mathbf{r}_A$ - promieniem wodzącym środka ruchomego układu odniesienia związanego z bryłą, w którym aktualnie porusza się punkt P, $\boldsymbol{\rho}$ - wektorem wodzącym w układzie ruchomym, $\mathbf{v}_A$ - prędkością ruchomego układu odniesienia, zaś $\boldsymbol{\omega}$ jego prędkością kątową. Składnik $(\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t)_u$ nazywany pochodną unoszenia opisuje zmiany wektora $\boldsymbol{\rho}$ wynikające z unoszenia go razem z bryłą, a pochodna lokalna $(\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}/\mathrm{d}t)_l$ odzwierciedla zmiany w układzie ruchomym. Prędkość bezwzględna równa jest sumie prędkości unoszenia $\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ oraz prędkości względnej $\mathbf{w}$.



Rys. 6.1. Układy współrzędnych: jezdni (O_{tnb}) oraz pojazdu ($A_{\xi\eta\zeta}$ oraz $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$)

Jako że związany z pojazdem układ współrzędnych $A_{\xi\eta\zeta}$ obrócony jest w płaszczyźnie jezdni o kąt χ względem reperu Darboux, to wektor prędkości $\mathbf{v}$ przyjmuje postać

$$\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \chi)\mathbf{v}^{(\xi\eta\zeta)} = \begin{bmatrix} u\cos\chi - v\sin\chi \\ u\sin\chi + v\cos\chi \\ w \end{bmatrix}. \tag{6.4}$$

Z porównania stronami zależności (6.2) i (6.4) otrzymać można związek

$$\begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{n} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\omega_b + u\cos\chi - v\sin\chi \\ u\sin\chi + v\cos\chi \\ w - n\omega_t \end{bmatrix}. \tag{6.5}$$

Z pierwszego równania wektora (6.5) wynika, że

$$\dot{s} = \frac{u\cos\chi - v\sin\chi}{1 - n\Omega_b}. \tag{6.6}$$

Drugie równanie wektora (6.5) opisuje pochodną $\dot{n}$ wchodzącą w skład poszukiwanych równań stanu

$$\dot{n} = u\sin\chi + v\cos\chi. \tag{6.7}$$

Trzecia zależność wynikająca z wektora (6.5) może zostać zapisana jako $w = n\omega_t$ i związana jest z zerową prędkością pojazdu w kierunku normalnym do płaszczyzny jezdni.

Do dalszych przekształceń wygodniej będzie posłużyć się układem współrzędnych $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$, którego oś $\hat{x}$ skierowana jest wzdłuż stycznej do trajektorii ruchu. Wielkości wyrażone w układzie współrzędnych $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ będą oznaczane symbolem daszka nad literą symbolizującą zmienną.

Zgodnie z rys. 6.1 prędkość V równa jest $\sqrt{u^2 + v^2}$, zaś kąt $\hat{\chi} = \chi + \beta$, gdzie $\beta = \mathrm{arctg}(v/u)$. Ze względu na pominięcie kątów znoszenia, prędkość v w kierunku poprzecznym do trajektorii ruchu równa jest zeru, co prowadzi do zerowej wartości kąta β. Prędkość bezwzględna punktu A w układzie współrzędnych $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ wynosi więc $\hat{\mathbf{v}} = [V\ 0\ w]^T$. Zależności (6.6) i (6.7) wyrażone w układzie $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ mogą zostać sformułowane jako

$$\dot{s} = \frac{V\cos\hat{\chi}}{1 - n\Omega_b}, \tag{6.8}$$

$$\dot{n} = V\sin\hat{\chi}. \tag{6.9}$$

Prędkość kątowa $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ pojazdu równa jest sumie prędkości kątowej układu współrzędnych jezdni oraz prędkości kątowej pojazdu względem jezdni $\left[0\ 0\ \dot{\hat{\chi}}\right]^T$ i może zostać zapisana za pomocą zależności

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix}\widehat{\omega}_x\\ \widehat{\omega}_y\\ \widehat{\omega}_z\end{bmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_z,\hat{\chi})^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\omega} + \begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\hat{\chi}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\omega_t\cos\hat{\chi} + \omega_n\sin\hat{\chi}\\ \omega_n\cos\hat{\chi} - \omega_t\sin\hat{\chi}\\ \omega_b + \dot{\hat{\chi}}\end{bmatrix}. \tag{6.10}$$

Przyspieszenie punktu A w układzie $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ o zmieniających się kierunkach opisane jest równaniem

$$\hat{\mathbf{p}} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}\right)_l + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{v}}. \tag{6.11}$$

Pochodną lokalną $(\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}/\mathrm{d}t)_l$ przedstawia zależność

$$\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}\right)_l = \begin{bmatrix}\dot{V}\\0\\ \dot{w}\end{bmatrix}, \tag{6.12}$$

zaś iloczyn wektorowy $\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{v}}$ wynosi

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} w\widehat{\omega}_y\\ V\widehat{\omega}_z - w\widehat{\omega}_x\\ -V\widehat{\omega}_y\end{bmatrix}. \tag{6.13}$$

Z zależności (6.12) i (6.13) otrzymywane są wyrażenia opisujące wzdłużne, poprzeczne oraz pionowe przyspieszenie punktu A (w układzie $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$)

$$\hat{a}_x = \dot{V} + w\widehat{\omega}_y, \tag{6.14}$$

$$\hat{a}_y = V\widehat{\omega}_z - w\widehat{\omega}_x, \tag{6.15}$$

$$\hat{a}_z = \dot{w} - V\widehat{\omega}_y. \tag{6.16}$$

Zależność (6.14) pozwala wyznaczyć drugie z poszukiwanych równań stanu

$$\dot{V} = \hat{a}_x - w\widehat{\omega}_y. \tag{6.17}$$

Pamiętając zgodnie z (6.10), że $\widehat{\omega}_z = \omega_b + \dot{\hat{\chi}}$, z zależności (6.15) wyznaczane jest trzecie, brakujące równanie dynamiki układu

$$\dot{\hat{\chi}} = \frac{\hat{a}_y + w\widehat{\omega}_x}{V} - \omega_b. \tag{6.18}$$

Za pomocą reguły (4.10) umożliwiającej zamianę zmiennej niezależnej z czasu t na współrzędną krzywoliniową s mogą zostać zapisane następujące równania stanu

$$V' = \frac{1}{\dot{s}}\left(\hat{a}_x - w\widehat{\omega}_y\right), \tag{6.19}$$

$$n' = \frac{1}{\dot{s}} V \sin \hat{\chi}, \tag{6.20}$$

$$\hat{\chi}' = \frac{1}{\dot{s}} \frac{\hat{a}_y + w\widehat{\omega}_x}{V} - \Omega_b. \tag{6.21}$$

Składniki $w\widehat{\omega}_x$ oraz $w\widehat{\omega}_y$ są małe i zgodnie z [27] mogą zostać pominięte. Zależności (6.19) – (6.21) upraszczają się do postaci

$$V' = \frac{\hat{a}_x}{\dot{s}}, \tag{6.22}$$

$$n' = \frac{1}{\dot{s}} V \sin \hat{\chi}, \tag{6.23}$$

$$\hat{\chi}' = \frac{1}{\dot{s}} \frac{\hat{a}_y}{V} - \Omega_b. \tag{6.24}$$

6.2. Uogólniony model motocykla

Przedstawiony w niniejszym rozdziale model pojazdu bazuje na rozważaniach przedstawionych w publikacji [26]. Uzupełniony został o dodatkowe źródło oporu (opór toczenia), charakterystykę trakcyjną oraz niezbędne wyprowadzenia. Przystępując do budowy modelu pojazdu przyjęto uproszczenia i założenia opisane w podrozdziale 4.3.

Równania ruchu, które posłużą do scharakteryzowania obwiedni osiągów pojazdu, zostały sformułowane na podstawie rys. 6.2 i przyjmują postać

$$\sum F_{\hat{x}}:\ m\tilde{a}_x = F_{xr} - F_{xf} - F_d, \tag{6.25}$$

$$\sum F_{\hat{y}}:\ m\tilde{a}_y = F_{yr} + F_{yf}, \tag{6.26}$$

$$\sum F_{\hat{z}}:\ m\tilde{g} = N_r + N_f, \tag{6.27}$$

$$\sum M_{\hat{x}}:\ m\tilde{a}_y h \cos\tilde{\varphi} = m\tilde{g}h \sin\tilde{\varphi}, \tag{6.28}$$

$$\sum M_{\hat{y}}\colon\ m\tilde{a}_x h\cos\tilde{\varphi} = bN_r - (w-b)N_f - F_d h_p \cos\tilde{\varphi}\,, \tag{6.29}$$

$$\sum M_{\hat{z}}\colon m\tilde{a}_x h\sin\tilde{\varphi} = bF_r - (w-b)F_f - F_d h_p \sin\tilde{\varphi}. \tag{6.30}$$

Kąt przechylenia $\tilde{\varphi}$ może zostać wyznaczony z równania (6.28) i wynosi

$$\tilde{\varphi} = \mathrm{arctg}\frac{\tilde{a}_y}{\tilde{\mathrm{g}}}. \tag{6.31}$$

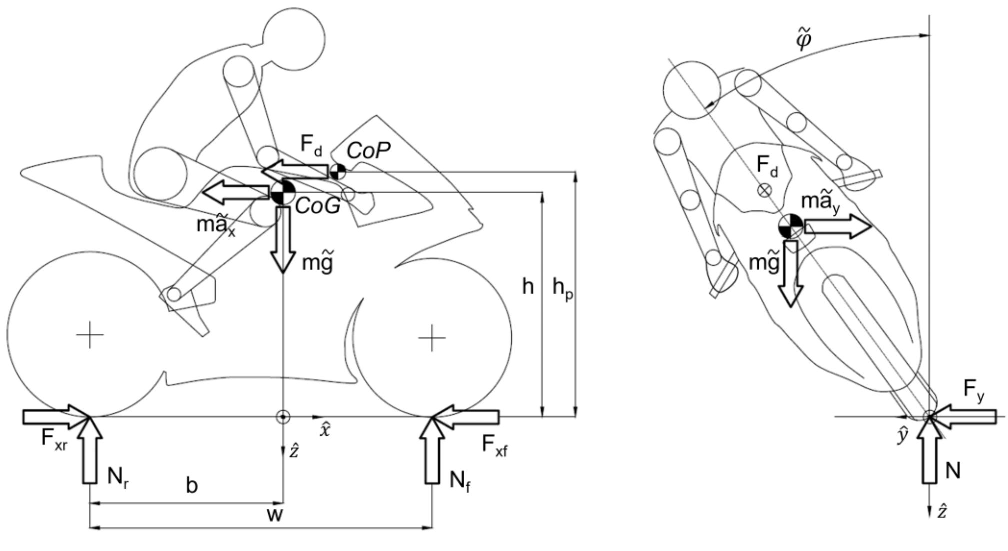
Wielkość $\tilde{\varphi}$ może być interpretowana jako kąt między płaszczyzną symetrii motocykla a płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny jezdni przechodzącą przez punkty styku kół z jezdnią.

Wielkości $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ i $\tilde{\mathrm{g}}$ pozwalają na sparametryzowanie uogólnionego diagramu g-g, który od tego momentu będzie nazywany diagramem g-g-g. W celu wyznaczenia relacji między wielkościami $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ i $\tilde{\mathrm{g}}$ a wielkościami $\hat{a}_x$ oraz $\hat{a}_y$ rozpatrzono ruch środka masy pojazdu. W trakcie prezentowanych dalej wyprowadzeń przyjęto uproszczenie, że wypadkowy środek ciężkości układu motocykl-kierowca położony jest na płaszczyźnie $A_{\hat{x}\hat{z}}$, a więc jego współrzędne w układzie $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ są niezmienne i równe

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

Zgodnie z zasadą zachowania pędu ciała sztywnego, a dokładniej prawa ruchu środka masy bryły, może zostać zapisana zależność

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{B}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}_c}{\mathrm{d}t} = \hat{\mathbf{F}} + m\mathrm{g}\mathbf{R}^T\mathbf{e}_z, \tag{6.33}$$



Rys. 6.2. Uogólniony model pojazdu

w której $\widehat{\mathbf{B}} = m\hat{\mathbf{v}}_c$ jest pędem ciała sztywnego, m – masą motocykla wraz z kierowcą, $\hat{\mathbf{v}}_c$ – prędkością środka ciężkości bryły, zaś $\hat{\mathbf{F}} = \left[\hat{F}_x\ \hat{F}_y\ \hat{F}_z\right]^T$ jest wektorem sił zewnętrznych[26]. Macierz obrotu $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \theta)\mathbf{R}(\mathbf{e}_y, \mu)\mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \phi)\mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \chi)$ opisuje relację między układem współrzędnych pojazdu a globalnym, inercjalnym układem współrzędnych O_{xyz}. Składnik $\mathrm{g}\mathbf{R}^T\mathbf{e}_z$ w zależności (6.33) równy jest

$$\mathrm{g}\mathbf{R}^T\mathbf{e}_z = \mathrm{g}\begin{bmatrix} c_\mu s_\phi s_{\hat{\chi}} - s_\mu c_{\hat{\chi}} \\ s_\mu s_{\hat{\chi}} + c_\mu s_\phi c_{\hat{\chi}} \\ c_\mu c_\phi \end{bmatrix}. \tag{6.34}$$

Prędkość $\hat{\mathbf{v}}_c$ środka ciężkości bryły opisana jest zależnością

$$\hat{\mathbf{v}}_c = \hat{\mathbf{v}} + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_c, \tag{6.35}$$

gdzie $\hat{\mathbf{v}} = [V\ 0\ w]^T$ jest prędkością układu odniesienia związanego z pojazdem, a $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ prędkością kątową tego układu. Różniczkując zależność (6.35) względem czasu otrzymywana jest zależność

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}_c}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_c) = \frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_c + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\rho}}_c}{\mathrm{d}t}. \tag{6.36}$$

Składnik $(\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}/\mathrm{d}t)$ w równaniu (6.36) równy jest sumie pochodnej lokalnej i pochodnej unoszenia

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\mathbf{v}}}{\mathrm{d}t}\right)_l + \hat{\boldsymbol{\omega}} \times \hat{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{V} + w\hat{\omega}_y \\ V\hat{\omega}_z - w\hat{\omega}_x \\ \dot{w} - V\hat{\omega}_y \end{bmatrix}. \tag{6.37}$$

Przyspieszenie kątowe bryły $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}/\mathrm{d}t)$ związane jest ze zmianą długości oraz kierunku wektora prędkości kątowej $\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Ze względu na to, że składniki związane z obrotem wektora prędkości kątowej $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ „skracają się”, przyspieszenie kątowe $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ zależy wyłącznie od zmiany długości wektora $\hat{\boldsymbol{\omega}}$. Zapisując

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t}\right)_l = \dot{\hat{\boldsymbol{\omega}}}, \tag{6.38}$$

przyspieszenie obrotowe $(\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}/\mathrm{d}t) \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_c$ może zostać wyrażone za pomocą zależności

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\omega}}}{\mathrm{d}t} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}_c = \begin{bmatrix} -h\dot{\hat{\omega}}_y \\ h\dot{\hat{\omega}}_x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.39}$$

Pochodna $(\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{\rho}}_c/\mathrm{d}t)$ wynosi

[26] W prezentowanych dalej przekształceniach pomijany będzie symbol daszka nad siłami zewnętrznymi.

$$\frac{\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_c}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_c}{\mathrm{d}t}\right)_l + \left(\frac{\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_c}{\mathrm{d}t}\right)_u = \widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\boldsymbol{\rho}}_c = \begin{bmatrix} -h\widehat{\omega}_y \\ h\widehat{\omega}_x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.40}$$

Wyrażenie $\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times (\mathrm{d}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_c/\mathrm{d}t)$ zwane przyspieszeniem doosiowym może zostać zapisane na podstawie (6.40) jako

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times (\widehat{\boldsymbol{\omega}} \times \widehat{\boldsymbol{\rho}}_c) = \begin{bmatrix} -h\widehat{\omega}_x\widehat{\omega}_z \\ -h\widehat{\omega}_y\widehat{\omega}_z \\ h\left(\widehat{\omega}_x^2 + \widehat{\omega}_y^2\right) \end{bmatrix}. \tag{6.41}$$

W wyniku sumowania (6.37), (6.39) oraz (6.41), równanie (6.33) przyjmuje postać

$$m\begin{bmatrix} \dot{V} + w\widehat{\omega}_y - h(\dot{\widehat{\omega}}_y + \widehat{\omega}_x\widehat{\omega}_z) \\ V\widehat{\omega}_z - w\widehat{\omega}_x + h(\dot{\widehat{\omega}}_x - \widehat{\omega}_y\widehat{\omega}_z) \\ \dot{w} - V\widehat{\omega}_y + h\left(\widehat{\omega}_x^2 + \widehat{\omega}_y^2\right) \end{bmatrix} = \mathbf{F} + mg\begin{bmatrix} c_\mu s_\phi s_{\widehat{\chi}} - s_\mu c_{\widehat{\chi}} \\ s_\mu s_{\widehat{\chi}} + c_\mu s_\phi c_{\widehat{\chi}} \\ c_\mu c_\phi \end{bmatrix}. \tag{6.42}$$

Przekształcenie pierwszej zależności z macierzowego układu równań (6.42) do postaci

$$m\left[\dot{V} + w\widehat{\omega}_y - h(\dot{\widehat{\omega}}_y + \widehat{\omega}_x\widehat{\omega}_z) - \mathrm{g}(c_\mu s_\phi s_{\widehat{\chi}} - s_\mu c_{\widehat{\chi}})\right] = F_x \tag{6.43}$$

oraz przyjęcie zgodnie z (6.14), że $\hat{a}_x = \dot{V} + w\widehat{\omega}_y$, umożliwia wyznaczenie pierwszej z poszukiwanych zależności wiążących wielkości $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ oraz $\tilde{\mathrm{g}}$ z przyspieszeniami $\hat{a}_x$ i $\hat{a}_y$

$$\tilde{a}_x = \hat{a}_x - h(\dot{\widehat{\omega}}_y + \widehat{\omega}_x\widehat{\omega}_z) - \mathrm{g}\left(c_\mu s_\phi s_{\widehat{\chi}} - s_\mu c_{\widehat{\chi}}\right). \tag{6.44}$$

Druga z poszukiwanych zależności może zostać wyznaczona z formuły (6.15) oraz drugiego równania macierzowego układu równań (6.42) i przedstawia się następująco

$$\tilde{a}_y = \hat{a}_y + h(\dot{\widehat{\omega}}_x - \widehat{\omega}_y\widehat{\omega}_z) - \mathrm{g}\left(s_\mu s_{\widehat{\chi}} + c_\mu s_\phi c_{\widehat{\chi}}\right). \tag{6.45}$$

Trzecie równanie macierzowego układu równań (6.42) prowadzi do zależności na pozorną grawitację

$$\tilde{g} = -\hat{a}_z - h\left(\widehat{\omega}_x^2 + \widehat{\omega}_y^2\right) + \mathrm{g}c_\mu c_\phi, \tag{6.46}$$

gdzie $\hat{a}_z$ opisane jest wzorem (6.16). Zgodnie z [27], małe składniki związane z przyspieszeniem obrotowym, doosiowym oraz pochodną $\dot{w}$ mogą zostać pominięte. W związku z tym równania (6.44) – (6.46) upraszczają się do postaci:

$$\tilde{a}_x = \hat{a}_x - \mathrm{g}\left(c_\mu s_\phi s_{\widehat{\chi}} - s_\mu c_{\widehat{\chi}}\right), \tag{6.47}$$

$$\tilde{a}_y = \hat{a}_y - \mathrm{g}\left(s_\mu s_{\widehat{\chi}} + c_\mu s_\phi c_{\widehat{\chi}}\right), \tag{6.48}$$

$$\tilde{g} = \mathrm{g}c_\mu c_\phi + V\widehat{\omega}_y. \tag{6.49}$$

Zależności (6.47) – (6.49) przedstawiają poszukiwane relacje między wielkościami $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ oraz $\tilde{\mathrm{g}}$ a przyspieszeniami $\hat{a}_x$ i $\hat{a}_y$.

6.2.1. Diagram g-g-g

W celu sparametryzowania diagramu g-g-g wykorzystane zostały wielkości $V, \tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ oraz $\tilde{g}$. Posłużono się biegunowym układem współrzędnych, w którym promień wodzący $\tilde{\rho}$ charakteryzujący obwiednię diagramu przyspieszeń opisany jest zależnością

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\left(\frac{\tilde{a}_x}{\mathrm{g}}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{a}_y}{\mathrm{g}}\right)^2}, \tag{6.50}$$

zaś amplituda $\tilde{\alpha}$ przedstawiona jest wzorem

$$\tilde{\alpha} = \mathrm{arctan2}(\tilde{a}_y, \tilde{a}_x). \tag{6.51}$$

Warunek periodyczności przedstawia zależność

$$\tilde{\rho}(\pi, V, \tilde{\mathrm{g}}) = \tilde{\rho}(-\pi, V, \tilde{\mathrm{g}}), \tag{6.52}$$

zaś warunek respektowania przez pojazd obwiedni diagramu g-g-g opisany jest przez nierówność

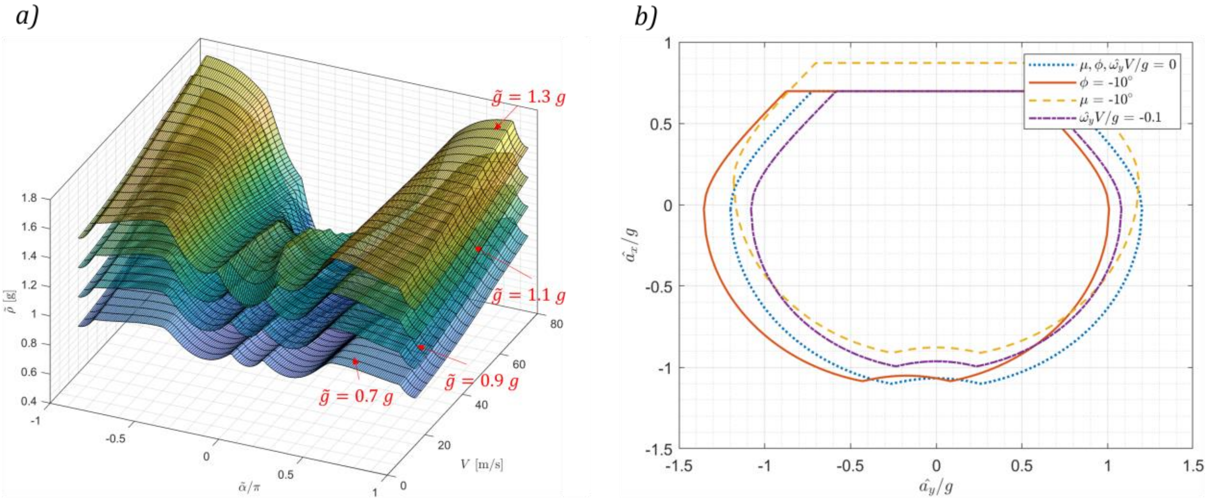
$$\tilde{\rho} \leq \tilde{\rho}_{max}(\tilde{\alpha}, V, \tilde{\mathrm{g}}). \tag{6.53}$$

Analogicznie do rozważań z podrozdziału 4.1.1, kąt $\tilde{\alpha}$ zdefiniowany został jako $\mathrm{arctan2}(\tilde{a}_y, \tilde{a}_x)$, zamiast $\mathrm{arctan2}(\tilde{a}_x, \tilde{a}_y)$.

Uogólniona na przypadek ruchu przestrzennego hiperpowierzchnia $\tilde{\rho}_{max}(\tilde{\alpha}, V, \tilde{\mathrm{g}})$ sparametryzowana jest za pomocą wielkości $\tilde{\alpha}, V$ oraz $\tilde{\mathrm{g}}$ i powstaje w wyniku interpolacji (krzywą B-sklejaną trzeciego stopnia) diagramów g-g-g wyznaczanych dla różnych wartości prędkości V oraz pozornej grawitacji $\tilde{\mathrm{g}}$. Przykłady hiperpowierzchni wyznaczonych dla różnych stałych wartości $\tilde{\mathrm{g}}$ przedstawia rys. 6.3a.

Diagramy przyspieszeń mogą zostać wyznaczone za pomocą zależności przedstawionych w podrozdziale 4.3, w których wielkości a_x, a_y, g i φ należy zastąpić wielkościami $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y, \tilde{\mathrm{g}}$ oraz $\tilde{\varphi}$. Przyjmowana jest w pierwszej kolejności stała wartość prędkości V oraz pozornej grawitacji $\tilde{\mathrm{g}}$. Następnie, równania zamieszczone w podrozdziale 4.3 rozwiązywane są ze względu na $\tilde{a}_x$ dla różnych wartości $\tilde{a}_y$. Kolejne diagramy przyspieszeń tworzone są w analogiczny sposób dla nowych wartości V oraz $\tilde{\mathrm{g}}$.

Jeśli znane są wielkości charakteryzujące jezdnię: pochylenie podłużne μ, pochylenie poprzeczne ϕ oraz krzywizna normalna Ω_n, to przyspieszenia $\hat{a}_x$ i $\hat{a}_y$ w płaszczyźnie jezdni mogą zostać wyznaczone za pomocą równań (6.47) – (6.49). W celu zilustrowania wpływu wielkości ϕ, μ i $\widehat{\omega}_y V$ na kształt obwiedni diagramu, na rys. 6.3b przedstawiony został diagram przyspieszeń g-g-g dla motocykla klasy Supersport 300. Linią kropkowaną



Rys. 6.3. Hiperpowierzchnie $\tilde{\rho}_{max}(\tilde{\alpha}, V, \tilde{g})$ wyznaczone dla różnej wartości pozornej grawitacji $\tilde{g}$ (a) oraz diagram przyspieszeń charakteryzujący osiągi motocykla klasy Supersport 300 w ruchu po jezdni trójwymiarowej (b)

oznaczona została obwiednia osiągów pojazdu w ruchu po płaskiej jezdni. Diagramy sporządzono dla prędkości $V = 20$ m/s, współczynników przyczepności przylgowej $\mu_x = 1.1, \mu_y = 1.2$ oraz dla poniższych charakterystyk opisujących geometrię jezdni:

- pochylenia poprzecznego jezdni $\phi = -10°$,
- pochylenia podłużnego jezdni $\mu = -10°$,
- iloczynu prędkości kątowej $\widehat{\omega}_y$ i prędkości V równego -0.1 g.

Pochylenie poprzeczne jezdni przesuwa obwiednię osiągów wzdłuż osi poziomej wykresu. Jeśli pochylenie poprzeczne jezdni skierowane jest ku wewnętrznej krawędzi zakrętu, wówczas maksymalne dopuszczalne przyspieszenie poprzeczne pojazdu wzrasta. W sytuacji odwrotnej maksymalne przyspieszenie poprzeczne pojazdu będzie odpowiednio mniejsze.

Pochylenie podłużne μ przesuwa obwiednię diagramu wzdłuż osi pionowej wykresu. Dla dodatniej wartości kąta μ (wzniesienie) obwiednia diagramu przesuwa się w kierunku mniejszych wartości przyspieszeń. Maleje wówczas zdolność pojazdu do rozpędzania się oraz rośnie maksymalna dopuszczalna wartość opóźnienia. Dla ujemnej wartości kąta μ sytuacja ulega odwróceniu.

Składnik $\widehat{\omega}_y V$ skaluje obwiednię diagramu i związany jest ze zmianami pochylenia podłużnego jezdni (niezerowa wartość krzywizny normalnej Ω_n). Zamieszczona na rys. 6.3b obwiednia w kolorze fioletowym przedstawia sytuację, w której pojazd przejeżdża przez szczyt wzniesienia. Ujemna wówczas wartość składnika $\widehat{\omega}_y V$ powoduje zmniejszenie wartości normalnych reakcji nawierzchni i granicznej siły przyczepności.

W przypadku dodatniej wartości składnika $\widehat{\omega}_y V$, wartość normalnej reakcji nawierzchni oraz granicznych sił stycznych wzrasta.

6.3. Sformułowanie zadania sterowania czasowo-optymalnego

Rozpatrywany będzie problem sterowania czasowo-optymalnego, którego wskaźnik jakości przyjmować będzie identyczną postać z funkcjonałem z zadania sterowania optymalnego sformułowanego w rozdziale 4 dla płaskiego ruchu układu. Dla przypomnienia funkcjonał jakości w dziedzinie współrzędnej krzywoliniowej s opisany jest zależnością

$$\mathcal{J} = \int_{s_0}^{s_k} \frac{1}{\dot{s}} \mathrm{d}s, \tag{6.54}$$

gdzie s_0 i s_k oznaczają odpowiednio początkową oraz końcową długość krzywej szkieletowej jezdni.

Dynamika układu przedstawionego na rys. 6.4 opisana jest zależnościami (6.22) – (6.24), które dla przypomnienia przywołane zostały poniżej

$$V' = \frac{\hat{a}_x}{\dot{s}},$$

$$n' = \frac{1}{\dot{s}} V \sin \hat{\chi},$$

$$\hat{\chi}' = \frac{1}{\dot{s}} \frac{\hat{a}_y}{V} - \Omega_b.$$

Podobnie jak w przypadku ruchu płaskiego, zmiennymi sterującymi będą pochodne przyspieszeń $\hat{a}_x$ i $\hat{a}_y$ (zryw wzdłużny $\hat{j}_x$ oraz zryw poprzeczny $\hat{j}_y$). Powstają więc dwa dodatkowe równania stanu opisane zależnościami

$$\hat{a}_x' = \hat{j}_x, \tag{6.55}$$

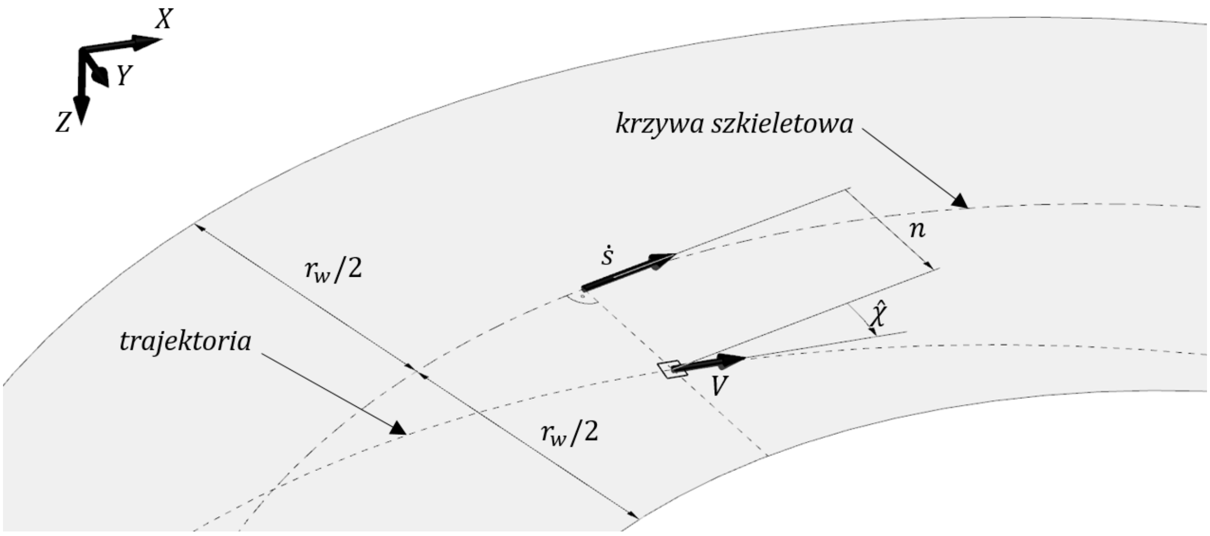
$$\hat{a}_y' = \hat{j}_y. \tag{6.56}$$

Sterowany układ opisany jest za pomocą pięcioelementowego wektora zmiennych stanu

$$\mathbf{x} = [V \; n \; \hat{\chi} \; \hat{a}_x \; \hat{a}_y] \tag{6.57}$$

oraz dwuelementowego wektora sterowań

$$\mathbf{u} = \left[\hat{j}_x \; \hat{j}_y\right]^T. \tag{6.58}$$



Rys. 6.4. Położenie pojazdu na trójwymiarowej jezdni

Położenie poprzeczne pojazdu ograniczone jest krawędziami jezdni

$$-r_w/2 \leq n \leq r_w/2, \tag{6.59}$$

gdzie $r_w = r_w(s)$ jest szerokością jezdni, zaś osiągi pojazdu ogranicza nierówność

$$\tilde{\rho} \leq \tilde{\rho}_{max}. \tag{6.60}$$

Ponieważ hiperpowierzchnia $\tilde{\rho}_{max}(\tilde{\alpha}, V, \tilde{g})$ ograniczająca maksymalne wartości przyspieszeń pojazdu została sparametryzowana wielkościami $\tilde{\alpha}, V$ i $\tilde{g}$, w których $\tilde{\alpha}$ zależy od $\tilde{a}_x$ oraz $\tilde{a}_y$, to wielkości $\tilde{a}_x$, $\tilde{a}_y$ i $\tilde{g}$ muszą zostać powiązane z przyspieszeniami $\hat{a}_x$ oraz $\hat{a}_y$ zależnościami (6.47) – (6.49).

Zbiór wartości dopuszczalnych zmiennych sterujących $\hat{j}_x$ oraz $\hat{j}_y$ opisują wprowadzone w podrozdziałach 4.1.2 i 4.1.3 ograniczenia

$$\hat{j}_y^2 \leq \hat{J}_y^2, \tag{6.61}$$

$$\hat{J}_{x_d} \leq \hat{j}_x \leq \hat{J}_{x_a}, \tag{6.62}$$

gdzie funkcje $\hat{J}_y = \hat{J}_y(V), \hat{J}_{x_d} = \hat{J}_{x_d}(V)$ i $\hat{J}_{x_a} = \hat{J}_{x_a}(V)$ zależą od prędkości V.

W przypadku ruchu pojazdu po torze o pętli zamkniętej obowiązuje warunek brzegowy

$$\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}(s_k) \tag{6.63}$$

zapewniający cykliczność zmiennych stanu na początku i końcu okrążenia.

6.4. Przykłady obliczeniowe

Uogólnione do przestrzeni trójwymiarowej zadanie minimalizacji czasu manewru omówione zostanie za pomocą kilku zróżnicowanych przykładów obliczeniowych. W pierwszej kolejności zbadany zostanie wpływ wielkości charakteryzujących jezdnię μ, ϕ i $\widehat{\omega}_y V$ na prędkość oraz przyspieszenia pojazdu. Następnie, na przykładzie fragmentu toru kartingowego położonego w Starym Kisielinie omówione zostaną różnice pomiędzy ruchem optymalnym po jezdni płaskiej i jezdni trójwymiarowej. W ostatnim podrozdziale zaprezentowana zostanie szczegółowa analiza porównawcza eksperymentu z „symulacją" na przykładzie motocykla klasy 600 cm^3 i toru Road Atlanta znajdującego się w Stanach Zjednoczonych Ameryki Północnej.

Sformułowane zadania sterowania optymalnego zostały rozwiązane za pomocą programu MATLAB, procedur dostępnych w rozszerzeniu GPOPS-II oraz biblioteki IPOPT. W odróżnieniu od ZSO z rozdziałów 4 i 5, wykorzystana została standardowa procedura numerycznego różniczkowania zamiast wykorzystywanego dotychczas narzędzia różniczkowania algorytmicznego ADiGator, ze względu na brak wsparcia dla interpolowanych funkcji o trzech lub więcej zmiennych. Zmienne stanu zostały przeskalowane zgodnie z informacjami zawartymi w podrozdziale 3.3.3. Przyjęta została „rzadka" 41. punktowa siatka początkowa, a osiągi pojazdu zostały scharakteryzowane za pomocą uogólnionego na ruch przestrzenny hybrydowego diagramu g-g-g. Wszystkie prezentowane w dalszej części pracy rezultaty zostały zweryfikowane poprzez kilkukrotne „uruchomienie" zadania dla zróżnicowanych przybliżeń początkowych zmiennych stanu oraz sterowania, a także dla różnych siatek startowych oraz metod ich zagęszczania.

W odróżnieniu od ZSO z rozdziału 4, w którym przyjęty został segmentowy opis trasy, charakterystyki jezdni wyrażone zostały w funkcji współrzędnej krzywoliniowej s. W związku z tym zadanie sterowania optymalnego w oprogramowaniu GPOPS-II zostało zdefiniowane jako jednofazowe (podrozdział 3.3.4).

6.4.1. Analiza wpływu charakterystyk jezdni na rezultaty obliczeń

Następstwa pochylenia poprzecznego jezdni ϕ

W pierwszym przykładzie obliczeniowym zbadany został wpływ pochylenia poprzecznego jezdni na wyniki procesu optymalizacji. Przyjęto, że torem testowym będzie pobocznica stożka ściętego o długości tworzącej (szerokości jezdni) $r_w = 8$ m. Przyjęte promienie podstaw wynosiły

$$R_{wew} = R_{śr} - \frac{1}{2} r_w \cos\phi, \tag{6.64}$$

$$R_{zew} = R_{śr} + \frac{1}{2} r_w \cos\phi. \tag{6.65}$$

Wielkość R_{wew} oznacza promień mniejszej podstawy, R_{zew} oznacza promień większej podstawy, zaś $R_{śr} = 25$ m jest promieniem okręgu w połowie wysokości stożka ściętego. Założono, że ruch po pobocznicy stożka będzie odbywał się w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Krzywizny jezdni wyznaczone w zadaniu numerycznego odwzorowania trasy wyniosły odpowiednio

$$\Omega_t = 0,$$

$$\Omega_n = -6.947 \cdot 10^{-3} \text{ [1/m]},$$

$$\Omega_b = 3.940 \cdot 10^{-2} \text{ [1/m]}.$$

Traktując pojazd jako punkt materialny oraz zakładając ruch jednostajny po okręgu na jezdni o pochyleniu poprzecznym ϕ, mogą zostać zapisane następujące równania sił i momentów

$$F_y = m(a_n \cos\phi - \mathrm{g} \sin\phi), \tag{6.66}$$

$$N = m(a_n \sin\phi + \mathrm{g} \cos\phi), \tag{6.67}$$

w których a_n jest przyspieszeniem dośrodkowym, F_y jest sumą sił przyczepności w kierunku poprzecznym, zaś N jest sumą normalnych reakcji nawierzchni na koła pojazdu. Siła F_y położona jest w płaszczyźnie jezdni, a siła N jest prostopadła do nawierzchni toru. Za pomocą równań (6.66) i (6.67) oraz zależności na przyspieszenie dośrodkowe w ruchu po okręgu opisanej równaniem $a_n = V^2/R$, maksymalna prędkość pojazdu może zostać zapisana jako

$$V_{max} = \sqrt{R\mathrm{g}\frac{\sin\phi + \mu_y \cos\phi}{\cos\phi - \mu_y \sin\phi}}, \tag{6.68}$$

gdzie $\mu_y = 1.1$ jest współczynnikiem przyczepności przylgowej w kierunku poprzecznym, a R jest promieniem okręgu.

Czas jednego okrążenia o długości $L = 2\pi R$ wynosi

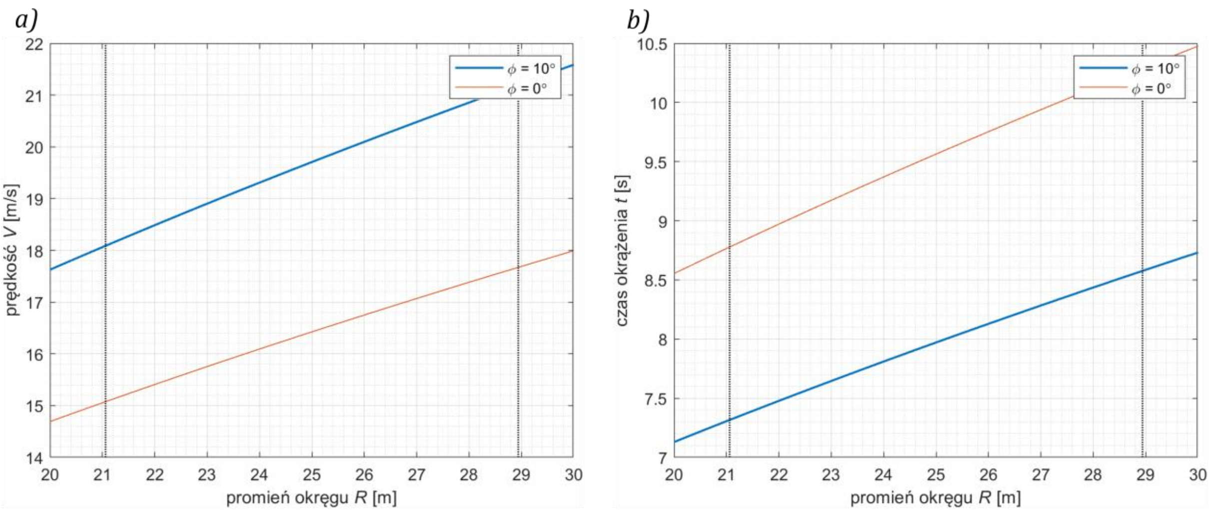
$$t = \frac{2\pi R\sqrt{\cos\phi - \mu_y \sin\phi}}{\sqrt{Rg(\sin\phi + \mu_y \cos\phi)}}. \tag{6.69}$$

W wyniku przekształcenia równania (6.68) otrzymywana jest następująca zależność na przyspieszenie dośrodkowe

$$a_n = g\frac{\sin\phi + \mu_y \cos\phi}{\cos\phi - \mu_y \sin\phi}. \tag{6.70}$$

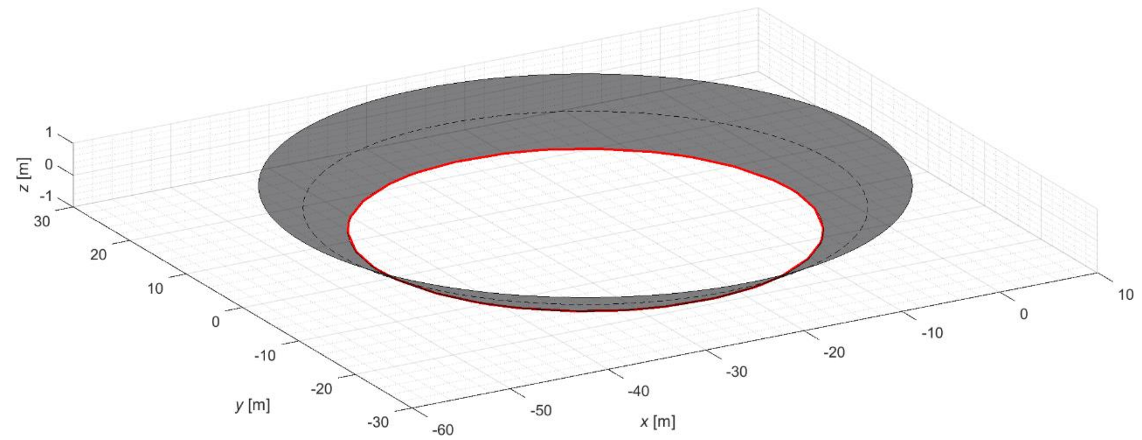
Sparametryzowane za pomocą promienia okręgu R zależności (6.68) i (6.69) zostały zilustrowane odpowiednio na rys. 6.5a i 6.5b. Pogrubioną linią ciągłą oznaczono przypadek ruchu po jezdni o pochyleniu poprzecznym $\phi = 10°$ (pochylenie poprzeczne skierowane w stronę wewnętrznej krawędzi jezdni), zaś linią cienką oznaczono ruch po torze płaskim. Pionowe linie kropkowane reprezentują promienie podstaw stożka ściętego. Niezależnie od pochylenia poprzecznego jezdni, minimalny czas manewru osiągany jest w ruchu po wewnętrznej krawędzi toru. Prędkość pojazdu wynosi wówczas 15.07 m/s (dla $\phi = 0°$) oraz 18.09 m/s (dla $\phi = 10°$), zaś przyspieszenie dośrodkowe zmienia swoją wartość z 1.10 g (2D) na 1.58 g (3D). Czas pełnego okrążenia wynosi 8.778 s dla toru płaskiego oraz 7.316 s dla jezdni trójwymiarowej.

Optymalna trajektoria ruchu wyznaczona w zadaniu optymalizacji[27] została przedstawiona na rys. 6.6.



Rys. 6.5. Prędkość V (a) oraz czas okrążenia t (b) w funkcji promienia okręgu R dla toru w kształcie pobocznicy stożka ściętego

[27] W trakcie tworzenia diagramów g-g-g charakteryzujących osiągi pojazdu pominięte zostały opory ruchu.



Rys. 6.6. Optymalna trajektoria ruchu po pobocznicy stożka ściętego

ZSO sugeruje ruch po wewnętrznej krawędzi trasy z prędkością 18.09 m/s. Otrzymany wynik jest zgodny z wyznaczonym na drodze analitycznej. Przyspieszenie poprzeczne w układzie pojazdu $A_{\hat{x}\hat{y}\hat{z}}$ wynosi $\hat{a}_y = 1.56$ g, zaś przyspieszenie styczne $\hat{a}_x = 0$. Przyspieszenie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny jezdni oznaczone symbolem $\hat{a}_z$ opisane jest zależnością (6.16), która upraszcza się do równania

$$\hat{a}_z = -V\hat{\omega}_y, \tag{6.71}$$

ponieważ w analizowanym przypadku $w = n\omega_t \equiv 0$, ze względu na $\Omega_t \equiv 0$.

Aby porównać wartości wyznaczonych numerycznie oraz analitycznie przyspieszeń, przyspieszenia $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ oraz $\hat{a}_z$ wyrażono w układzie współrzędnych prostokątnych, który na potrzeby tego zadania oznaczony został jako A_{xyz} i którego oś x skierowana jest wzdłuż osi $\hat{x}$, zaś płaszczyzna wyznaczona przez osie (x, y) jest równoległa do płaszczyzny C_{XY} inercjalnego układu współrzędnych C_{XYZ}. Przyspieszenia a_x, a_y oraz a_z mogą zostać wyznaczone z następującej macierzowej zależności

$$\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \phi) \begin{bmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_\phi & -\mathrm{s}_\phi \\ 0 & \mathrm{s}_\phi & \mathrm{c}_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \\ \hat{a}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_x \\ \hat{a}_y \mathrm{c}_\phi - \hat{a}_z \mathrm{s}_\phi \\ \hat{a}_y \mathrm{s}_\phi + \hat{a}_z \mathrm{c}_\phi \end{bmatrix}. \tag{6.72}$$

Wartości liczbowe wyznaczonych przyspieszeń wynoszą odpowiednio $a_x = 0$, $a_y = 1.58$ g, zaś $a_z = 0$. Przyspieszenie a_y jest więc zgodne z przyspieszeniem a_n wyznaczonym na drodze obliczeń analitycznych.

Wpływ pochylenia poprzecznego ϕ na wartości sił reakcji nawierzchni oraz na kąt przechyłu $\tilde{\varphi}$ (kąt między płaszczyzną symetrii pojazdu a płaszczyzną prostopadłą do płaszczyzny jezdni przechodzącą przez punkty styku kół z jezdnią) zaprezentowany został za pomocą tabeli 6.1. Prezentowane w tabeli wartości zostały znormalizowane względem ruchu po jezdni o zerowym pochyleniu poprzecznym. Indeksy (3D) oraz (2D) dotyczą rezultatów odpowiednio dla dwuwymiarowego oraz trójwymiarowego modelu jezdni.

Przyjęty w niniejszej pracy liniowy model opon (siła przyczepności liniowo zależna od siły nacisku) powoduje, że maksymalny kąt przechylenia pojazdu jest niezależny od pochylenia poprzecznego jezdni. Zmianie ulega jedynie całkowity kąt przechyłu φ, który dla analizowanego przypadku może zostać zapisany za pomocą zależności $\varphi = \tilde{\varphi} + \phi$.

Tabela 6.1. Wpływ pochylenia poprzecznego jezdni ϕ na maksymalny kąt przechyłu pojazdu oraz siły reakcji nawierzchni

		Tor o pochyleniu poprzecznym $\phi = 10°$
Siła wertykalna	$N^{(3D)}/N^{(2D)}$ [−]	1.26
Siła poprzeczna	$F_y^{(3D)}/F_y^{(2D)}$ [−]	1.26
Kąt przechyłu	$\tilde{\varphi}^{(3D)}/\tilde{\varphi}^{(2D)}$ [−]	1.00

Wpływ wielkości μ oraz $\widehat{\omega}_y V$ na rezultaty obliczeń

Wpływ wielkości μ oraz $\widehat{\omega}_y V$ na rezultat procesu optymalizacji zilustrowany został na przykładzie dwóch fikcyjnych torów testowych przedstawionych na rys. 6.7: toru przestrzennego (3D) oraz toru płaskiego (2D). Przedstawiona trasa 2D powstała poprzez zrzutowanie toru 3D na płaszczyznę C_{XY} inercjalnego układu współrzędnych. W celu ułatwienia interpretacji prezentowanych dalej rezultatów pominięto w analizach opory ruchu. Przyjęto również założenie, że niezależne od prędkości ruchu, maksymalne przyspieszenie pojazdu w ruchu po płaskiej i nienachylonej jezdni wynosić będzie $a_{x_{max}} = 0.26$ g. Pojazdy rozpoczną ruch od środka jezdni $(n = 0)$ z prędkością początkową $V_0 = 5\ m/s$.

Pierwszy fragment toru 3D dla $s \in < 0{,}20 >$ [m] charakteryzuje się stałym pochyleniem podłużnym $\mu = -5°$, zaś odcinek na końcu trasy (98.6-118.6 m) stałym pochyleniem podłużnym $\mu = 5°$. W środkowym fragmencie trasy następuje płynna zmiana pochylenia podłużnego jezdni, które osiąga wartość równą zeru w połowie długości toru. Swoją maksymalną wartość osiąga wówczas krzywizna normalna jezdni $\Omega_n = 4.25 \cdot 10^{-3}$ [1/m] (rys. 6.8). Zgodnie z oczekiwaniami, wyznaczona optymalna trajektoria ruchu pokryła się z linią środkową jezdni (rys. 6.9). Czas wykonania manewru wyniósł 7.87 s (2D) i 7.22 s (3D). Pojazd poruszający się po torze 3D przebył dystans dłuższy o 0.32 m.

Gdyby sprowadzić model pojazdu do punktu materialnego, to ruch przyspieszony po jezdni o pochyleniu wzdłużnym μ może zostać opisany równaniem

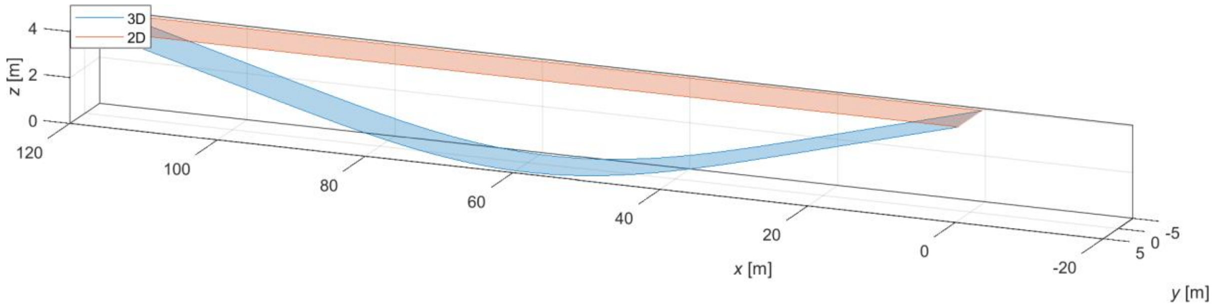
$$ma_x = F_R - mg\sin\mu, \tag{6.73}$$

gdzie F_R jest siłą napędową, zaś składnik $(mg\sin\mu)$ jest składową siły ciężkości równoległą do płaszczyzny jezdni.

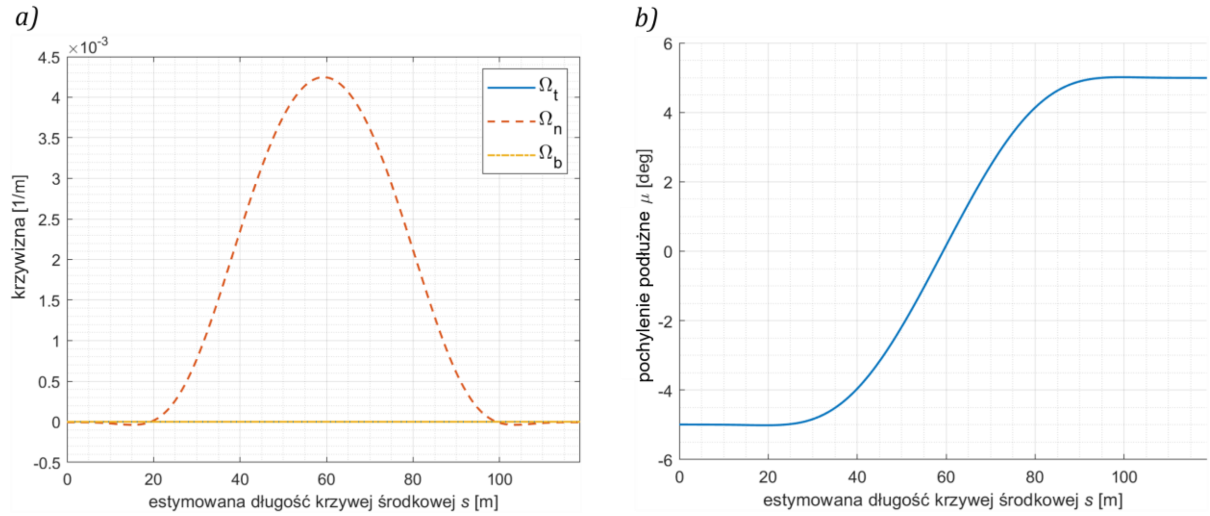
Przebiegi przyspieszenia wzdłużnego pojazdów porównano na rys. 6.10. W pierwszej połowie manewru przyspieszenie $\hat{a}_x$ w ruchu po torze 3D jest o $\sin\mu$ [g] większe niż pojazdu poruszającego się po torze 2D. W połowie dystansu przyspieszenia pojazdów zrównują się, a następnie pojazd poruszający się po jezdni 3D kontynuuje ruch z przyspieszeniem $\hat{a}_x$ o $\sin\mu$ [g] mniejszym. Rys. 6.11, na którym porównano składnik $\sin\mu$ z różnicą przyspieszenia wzdłużnego pojazdów oznaczoną symbolem $\Delta\hat{a}_x$, potwierdza poprawność budowy modelu numerycznego.

Prędkość w ruchu po jezdni 3D jest zawsze większa, z wyłączeniem początku manewru (rys. 6.12). Maksymalna różnica prędkości wynosi 2.17 m/s i przypada dla $s = 50$ m. Nadwyżka prędkości pojazdu poruszającego się po jezdni 3D skumulowana w pierwszej połowie trasy jest następnie wytracana podczas wjazdu na wzniesienie.

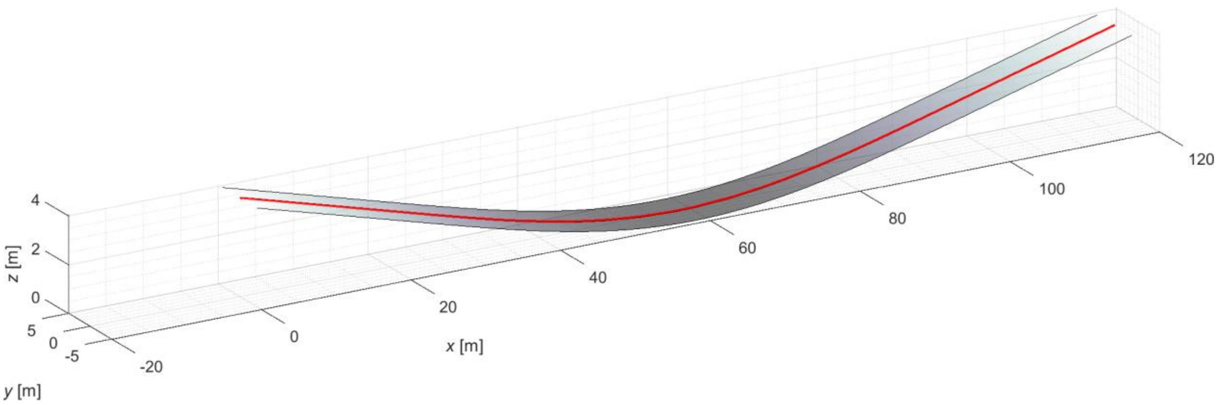
Zgodnie z informacjami zawartymi w podrozdziale 6.2.1, składnik $\widehat{\omega}_y V$ związany z krzywizną normalną Ω_n skaluje obwiednię diagramu g-g. Jego wpływ na wartości normalnych reakcji nawierzchni zilustrowany został za pomocą rys. 6.13. Prezentowane wartości zostały znormalizowane względem ruchu po jezdni płaskiej (2D). Na początku i końcu manewru sumaryczne obciążenie kół (w kierunku normalnym do płaszczyzny jezdni) jest mniejsze o składnik $\sin\mu$ [g] i pozostaje stałe, dopóki stała jest wartość pochylenia podłużnego μ. Zmiana pochylenia poprzecznego (przejazd przez zagłębienie) powoduje zwiększenie wartości normalnej reakcji nawierzchni. Maksymalna wartość jest 1.18 razy większa niż w ruchu po jezdni 2D. Ekstremum przypada dla współrzędnej krzywoliniowej $s = 63.3$ m, czyli 4.0 m za połową trasy. Przesunięcie ekstremum normalnej reakcji nawierzchni względem położenia ekstremum krzywizny Ω_n związane jest z obecnością prędkości V w składniku $\widehat{\omega}_y V$.



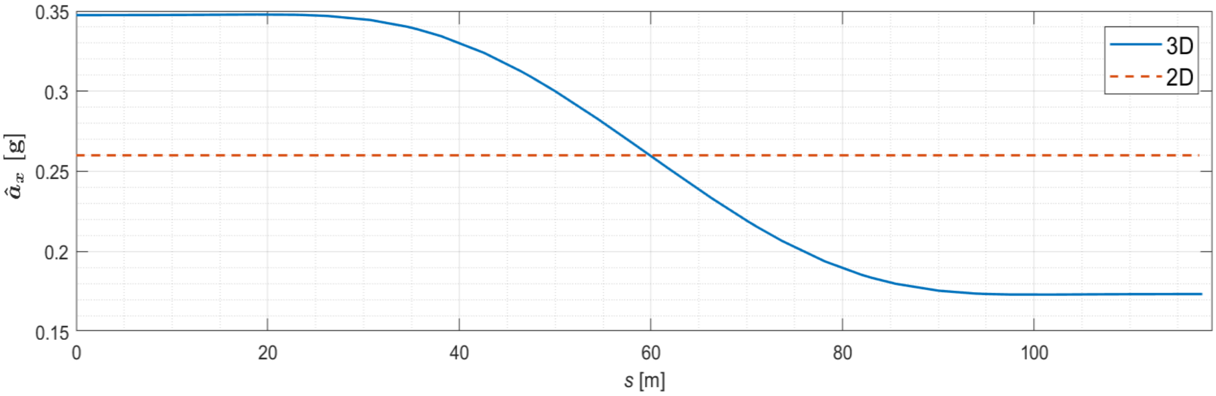
Rys. 6.7. Porównanie trasy dwuwymiarowej z trójwymiarową



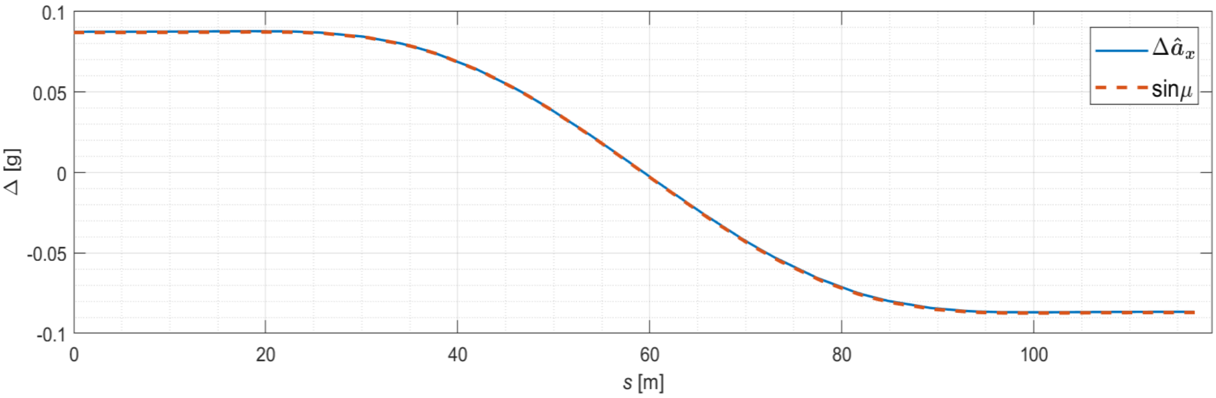
Rys. 6.8. Krzywizny trójwymiarowej trasy (a) oraz pochylenie podłużne μ (b)



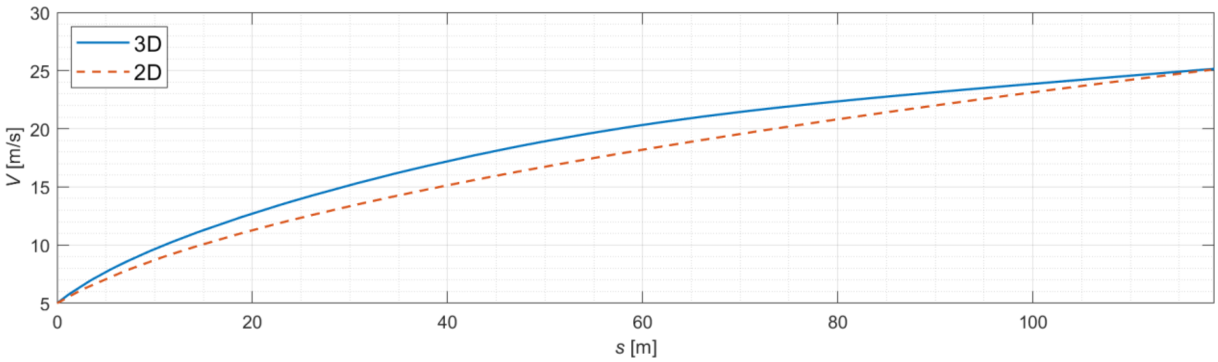
Rys. 6.9. Optymalna trajektoria ruchu po trasie 3D



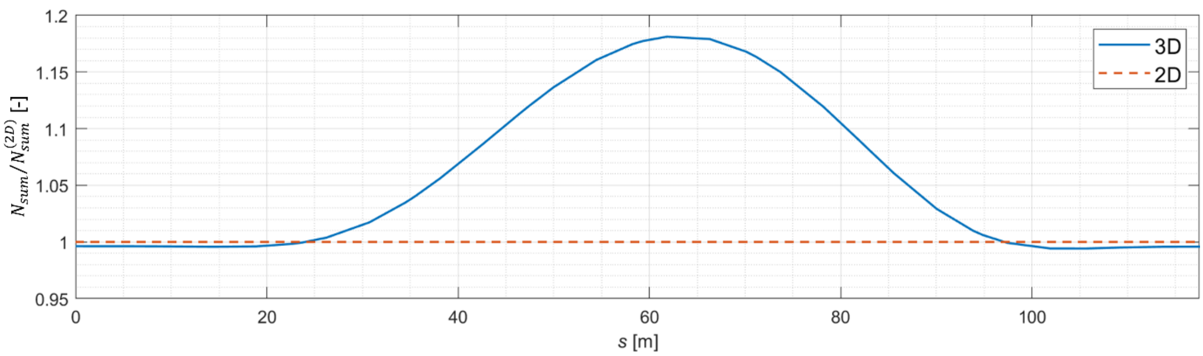
Rys. 6.10. Przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$ w ruchu po trasie 2D oraz 3D



Rys. 6.11. Różnica przyspieszenia wzdłużnego $\Delta\hat{a}_x$ między analizami 2D i 3D oraz wartość składowej przyspieszenia ziemskiego równoległej do płaszczyzny jezdni



Rys. 6.12. Porównanie prędkości V pojazdu poruszającego się po jezdni 2D i 3D



Rys. 6.13. Sumaryczne obciążenie opon na kierunku normalnym do płaszczyzny jezdni

6.4.2. Analiza porównawcza rezultatów dla modelu jezdni 2D i 3D

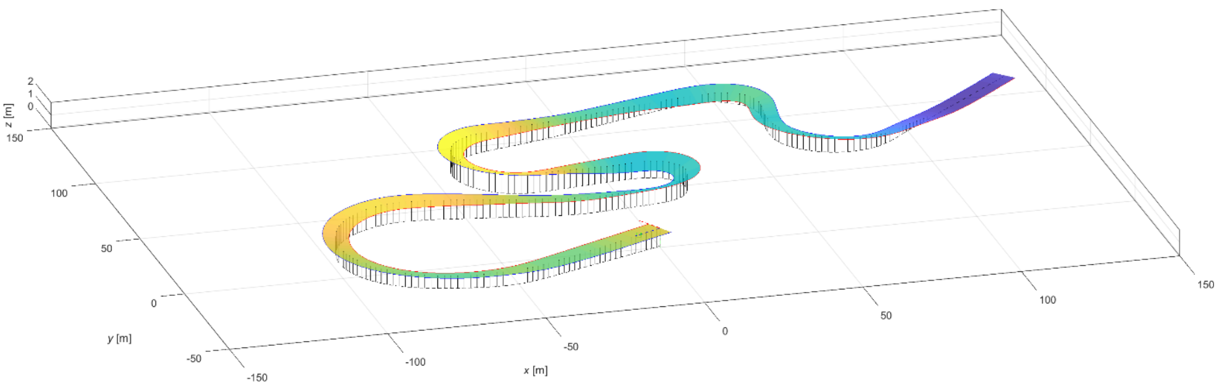
Optymalny ruch pojazdu po jezdni płaskiej (2D) oraz jezdni przestrzennej (3D) zostanie omówiony na przykładzie fragmentu toru kartingowego położonego w Starym Kisielinie charakteryzującego się znacznym pochyleniem poprzecznym jezdni w obrębie zakrętów. Wybrany fragment zawiera szeroko omawiane w literaturze sekwencje zakrętów: nawrót o stałym i zmiennym promieniu oraz szykanę.

Wizualizacja odwzorowanego numerycznie toru została przedstawiona na rys. 6.14. Krzywizny jezdni oraz kąty μ i ϕ zostały przedstawione na rys. 6.15. Maksymalne bezwzględne pochylenie poprzeczne wynosi $|\phi| = 6°$ i przypada na zakręt nr 2. Szerokość toru równa jest w przybliżeniu 8 m w sekcji zakrętów oraz 11 m na odcinku prostej startowej (rys. 6.16). Różnice w szerokości dwu oraz trójwymiarowej reprezentacji trasy są pomijalnie małe. Długość krzywej szkieletowej wynosi 607.43 m (3D) oraz 607.39 m (2D), zaś różnica wysokości położenia krzywej szkieletowej nie przekracza 1.7 m.

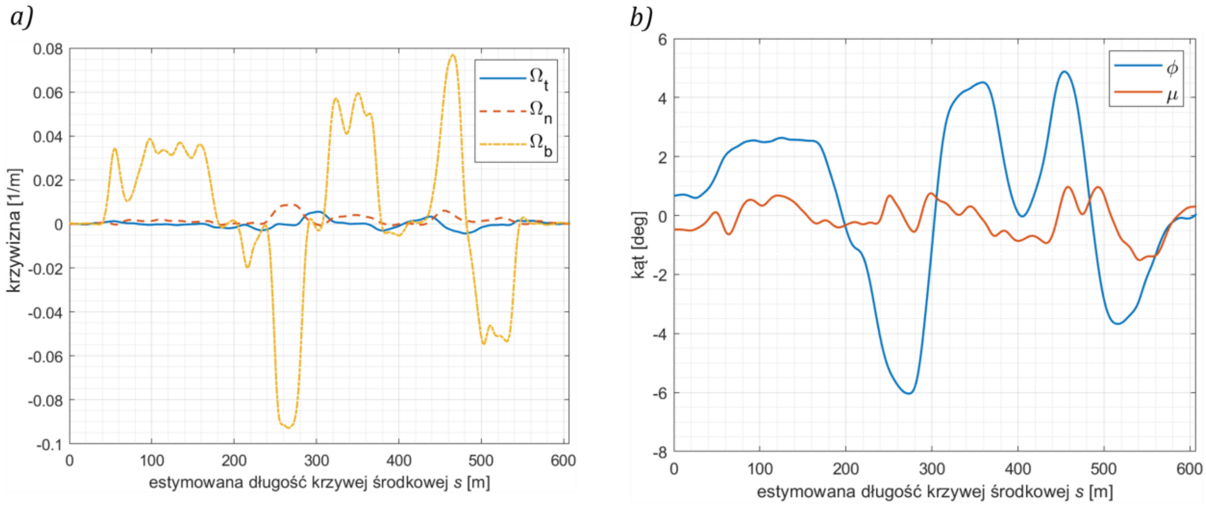
W prezentowanym przykładzie rozpatrywany był ruch pojazdu PB140, którego charakterystyki zostały zestawione w tabeli 4.1, z tą różnicą, że współczynnik przyczepności przylgowej w kierunku poprzecznym μ_y przyjęto równy 1.1. Diagramy g-g-g charakteryzujące osiągi pojazdu zostały wygenerowane dla zakresu prędkości 7-27 m/s (z krokiem 1 m/s), kroku amplitudy $\tilde{\alpha}$ równego 1° oraz pozornej grawitacji $\tilde{\mathrm{g}} = \{0.95\ 0.99\ 1.00\ 1.05\ 1.10\ 1.30\}$. Pojazdy rozpoczynały manewr z prędkością początkową $V_0 = 25$ m/s, zaś położenie na początku i końcu manewru zostało przyjęte jako dowolne (w ramach szerokości jezdni).

Rys. 6.17 przedstawia wyznaczone optymalne trajektorie ruchu oraz przebiegi: prędkości, położenia porzecznego i przyspieszeń. Czas manewru wyniósł 29.932 s (3D) oraz 31.457 s (2D).

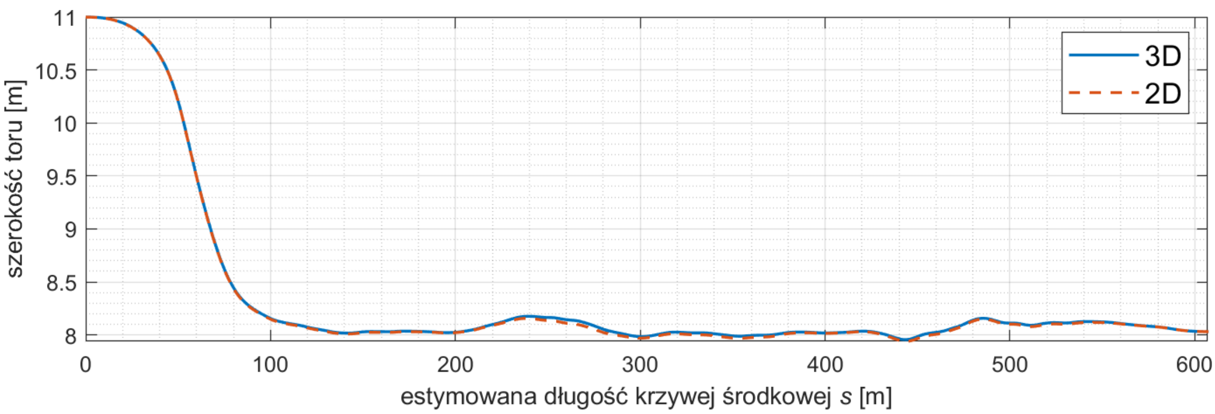
Prędkość poruszającego się po jezdni 3D pojazdu jest większa na każdym fragmencie trasy. Maksymalna różnica prędkości wynosi 1.5 m/s (5.4 km/h) i obserwowana jest na zakręcie nr 3 ($s = 344$ m). Różnica o podobnej wartości występuje również w pierwszym łuku szykany (zakręt nr 4). Maksymalne przyspieszenie poprzeczne (jezdnia 3D) przypada na zakręt nr 4 i wynosi 1.42 g. Osiągane na zakręcie nr 2 o największym pochyleniu poprzecznym ekstremum przyspieszenia poprzecznego wynosi -1.37 g. Większą bezwzględną wartość przyspieszenia poprzecznego osiąganą na zakręcie nr 4 tłumaczy rys. 6.18a, który przedstawia przebieg pozornej grawitacji $\tilde{\mathrm{g}}$. Zgodnie



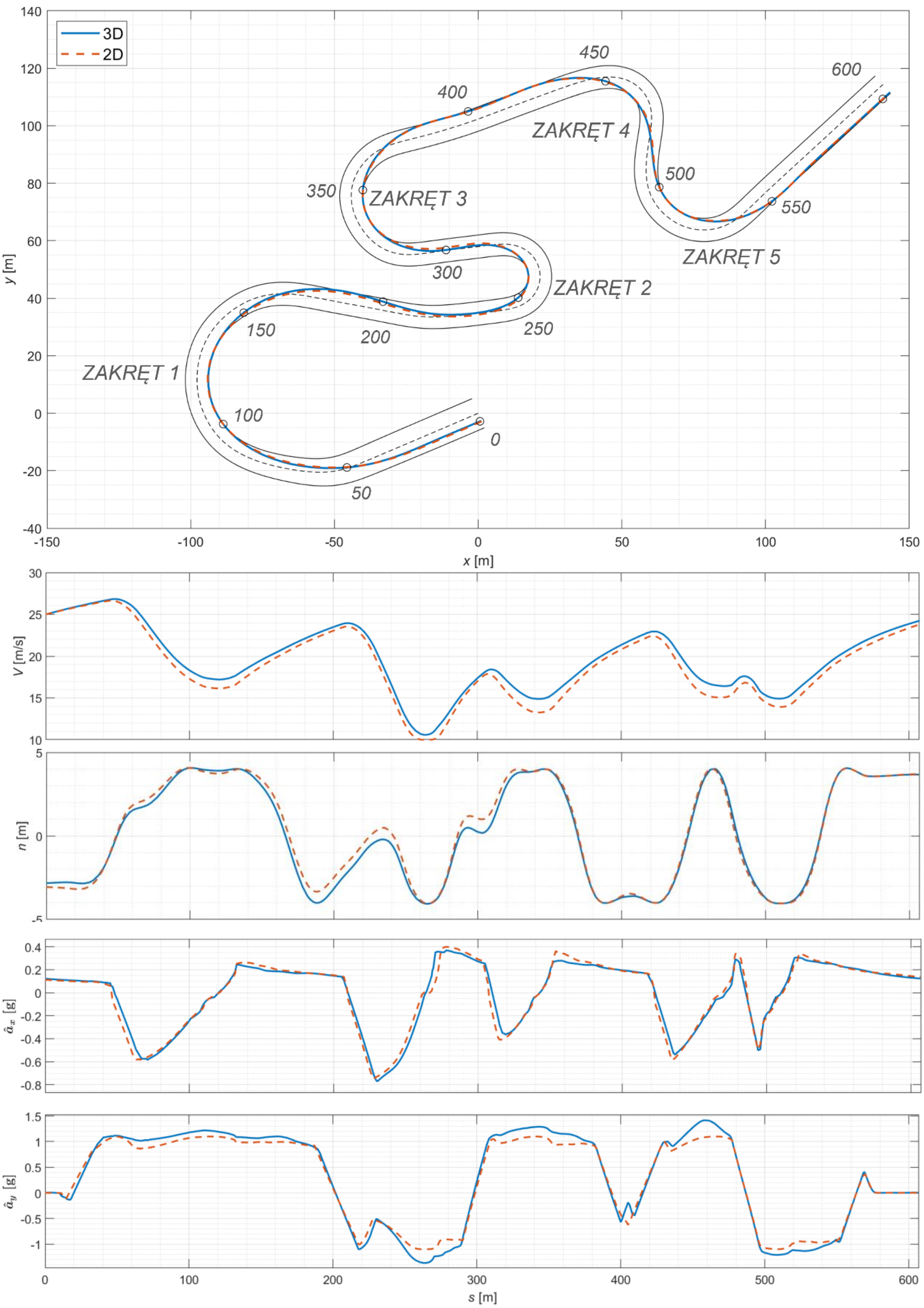
Rys. 6.14. Trójwymiarowa wizualizacja poddawanego analizie fragmentu toru kartingowego w Starym Kisielinie



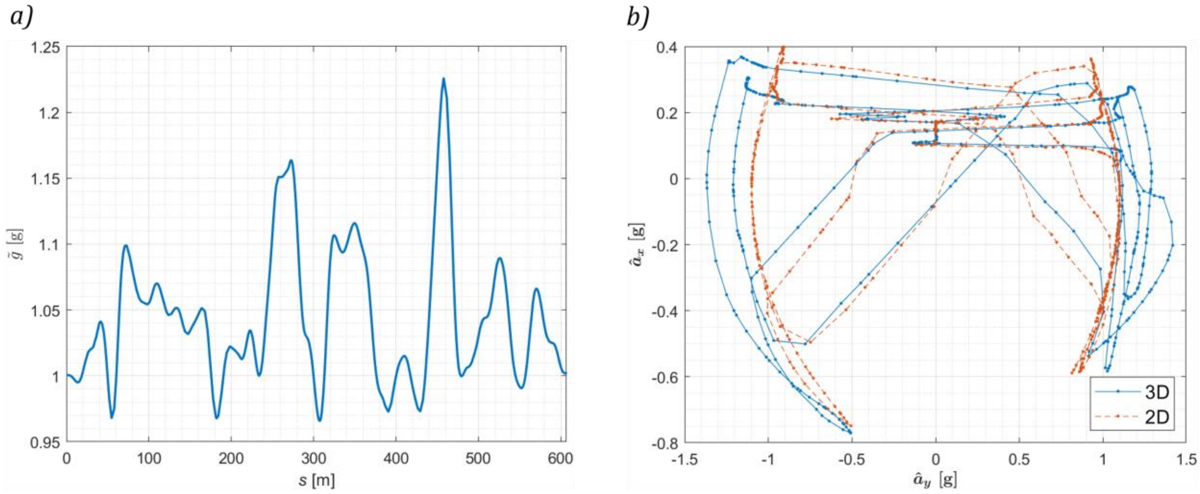
Rys. 6.15. Krzywizny jezdni (a) oraz kąty Eulera (b) charakteryzujące rozpatrywany fragment toru kartingowego w Starym Kisielinie



Rys. 6.16. Szerokość trasy płaskiej oraz trójwymiarowej



Rys. 6.17. Porównanie rezultatów obliczeń dla ruchu po jezdni 2D i 3D. W kolejności od góry: optymalne trajektorie ruchu, prędkość V, położenie poprzeczne n, przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$, przyspieszenie poprzeczne $\hat{a}_y$



Rys. 6.18. Pozorna grawitacja g̃ w funkcji współrzędnej krzywoliniowej s (a), porównanie przyspieszeń pojazdów na diagramie przyspieszeń (b)

z informacjami zamieszczonymi w podrozdziale 6.2.1, pozorna grawitacja g̃ wpływa na wartość normalnej reakcji nawierzchni N i w konsekwencji na graniczną siłę przyczepności. Dla zakrętów nr 2 i 4 pozorna grawitacja g̃ przyjmuje maksymalną wartość równą odpowiednio 1.15 g oraz 1.23 g, dlatego też pomimo mniejszego pochylenia poprzecznego jezdni w obrębie zakrętu nr 4 osiągana jest na nim większa wartość przyspieszenia $\hat{a}_y$.

Efekt wprowadzonych w podrozdziałach 4.1.2 i 4.1.3 ograniczeń na wartości dopuszczalne zmiennych sterujących zauważalny jest na wykresie przyspieszenia wzdłużnego oraz poprzecznego (rys. 6.17) jako płynna zmiana wartości przyspieszeń oraz zróżnicowanie ich zmienności w zależności od prędkości pojazdu.

Analizując osiągane przez pojazdy przyspieszenia wzdłużne, zauważyć można, że ich maksymalna wartość w początkowej fazie przyspieszania z zakrętów jest większa w ruchu po jezdni 2D niż po jezdni przestrzennej. Jest to związane z mniejszą wartością oporu aerodynamicznego (mniejsza minimalna prędkość w zakrętach pojazdu poruszającego się po jezdni płaskiej). Maksymalne wartości opóźnienia są zbliżone, przy czym fazom hamowania w ruchu po trasie 3D towarzyszą większe bezwzględne wartości przyspieszenia poprzecznego, co zaobserwować można na diagramie przyspieszeń przedstawionym na rys. 6.18b. Kształt zamieszczonego diagramu przyspieszeń jest charakterystyczny dla jazdy sportowej pojazdem jednośladowym typu minimotocykl, w trakcie której większość manewrów hamowania inicjowana jest przy pewnym niezerowym przyspieszeniu poprzecznym $\hat{a}_y$.

Nawrót o zmiennym promieniu

W przypadku nawrotu o zmiennym promieniu (bliźniaczy przykład do prezentowanego w podrozdziale 4.4.2) pojazdy inicjują manewr skrętu w pewnym oddaleniu od zewnętrznej krawędzi jezdni. Przebieg środkowej fazy manewru jest dla obydwu analiz podobny, motocykle poruszają się blisko wewnętrznej granicy toru (100-138 m).

W końcowej fazie omawianego manewru poruszający się po jezdni 3D pojazd dociera do zewnętrznej krawędzi toru ($n = -4$ m), zaś poprzeczne położenie pojazdu w ruchu po jezdni 2D przyjmuje wartość równą $n = -3.27$ m. Minimalna prędkość osiągana na zakręcie nr 1 jest o 1.0 m/s większa w ruchu po jezdni 3D.

Sekcja nawrotów

Sekcję złożoną z zakrętów nr 2 oraz 3 charakteryzują zauważalne rozbieżności między wyznaczonymi optymalnymi trajektoriami ruchu. Aby uwidocznić omawiane różnice wprowadzone zostały dodatkowe wielkości charakteryzujące trajektorię ruchu: promień krzywizny P oraz krzywizna K, które mogą zostać wyznaczone za pomocą zależności

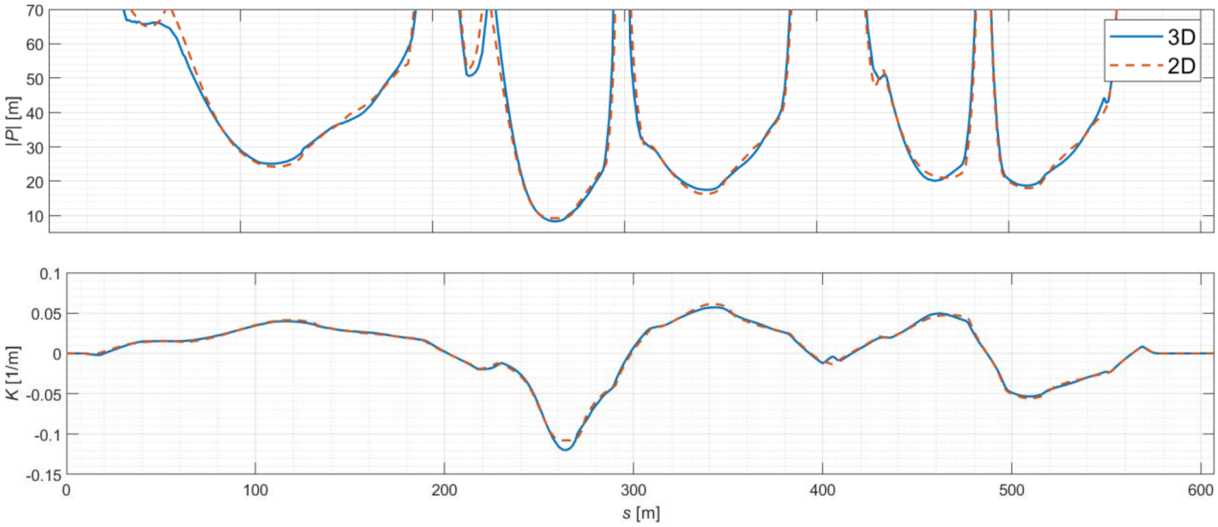
$$\mathrm{P} = \frac{V^2}{\hat{a}_y}, \tag{6.74}$$

$$\mathrm{K} = \frac{1}{\mathrm{P}}. \tag{6.75}$$

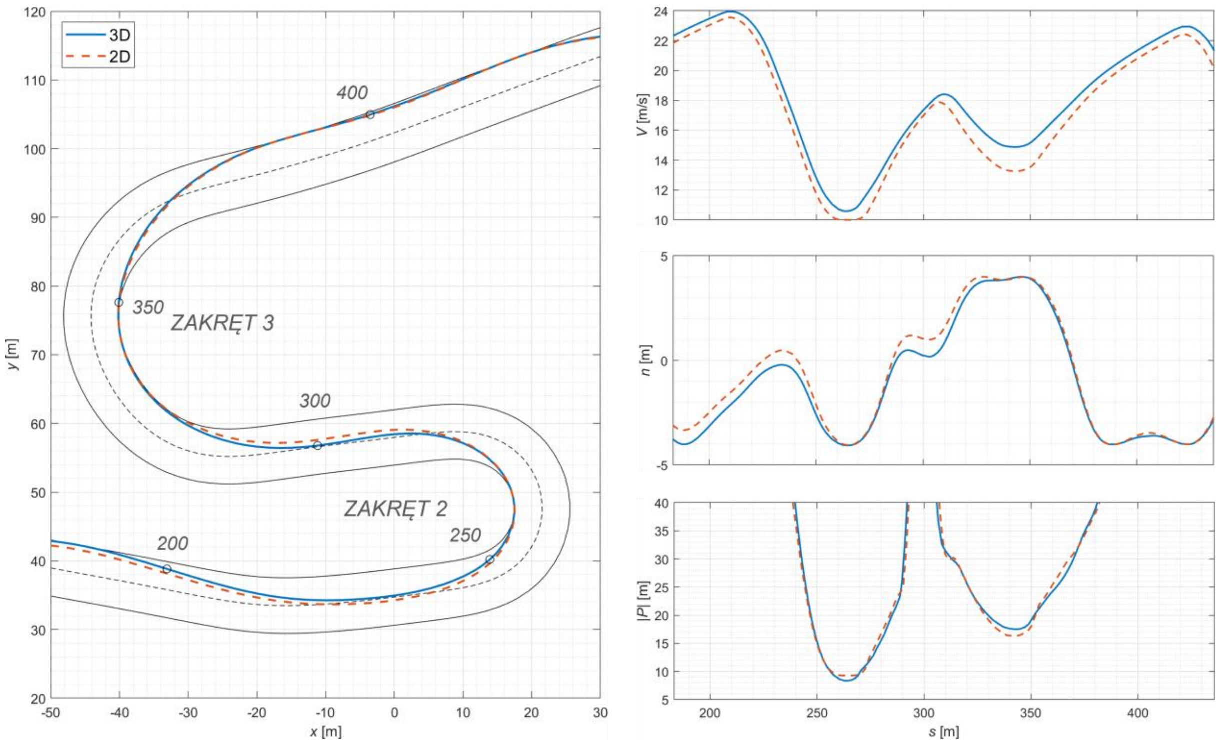
Przebieg modułu promienia krzywizny |P| oraz krzywizny K przedstawiono na rys. 6.19. Oś rzędnych na górnym wykresie rys. 6.19 ograniczona została do zakresu od 5 do 70 m.

Rezultaty obliczeń dla sekcji nawrotów (zakręty nr 2 i 3) zostały porównane na rys. 6.20. Lewa strona rys. 6.20 przedstawia zbliżenie na omawiany fragment toru, zaś prawa część zawiera wykresy: prędkości, położenia poprzecznego oraz modułu promienia krzywizny. Zakres osi odciętych prezentowanych wykresów ograniczony został do widocznego po lewej stronie rys. 6.20 fragmentu trasy.

Różnica w położeniu poprzecznym zbliżających się do zakrętu nr 2 pojazdów wynosi 0.75 m (183-235 m), a następnie maleje do zera w szczycie pierwszego z omawianych nawrotów. Motocykl (3D) porusza się na zakręcie nr 2 trajektorią o mniejszym promieniu krzywizny, a następnie, na zakręcie nr 3, trajektorią o większym promieniu krzywizny. Symulacja 3D inicjuje skręt w kierunku zakrętu nr 3 ze środka toru, zaś symulacja 2D o 0.8 m bliżej wewnętrznej krawędzi trasy. W rezultacie, osiągana na zakręcie nr 3



Rys. 6.19. Moduł promienia krzywizny trajektorii |P| (u góry), krzywizna trajektorii K (na dole)



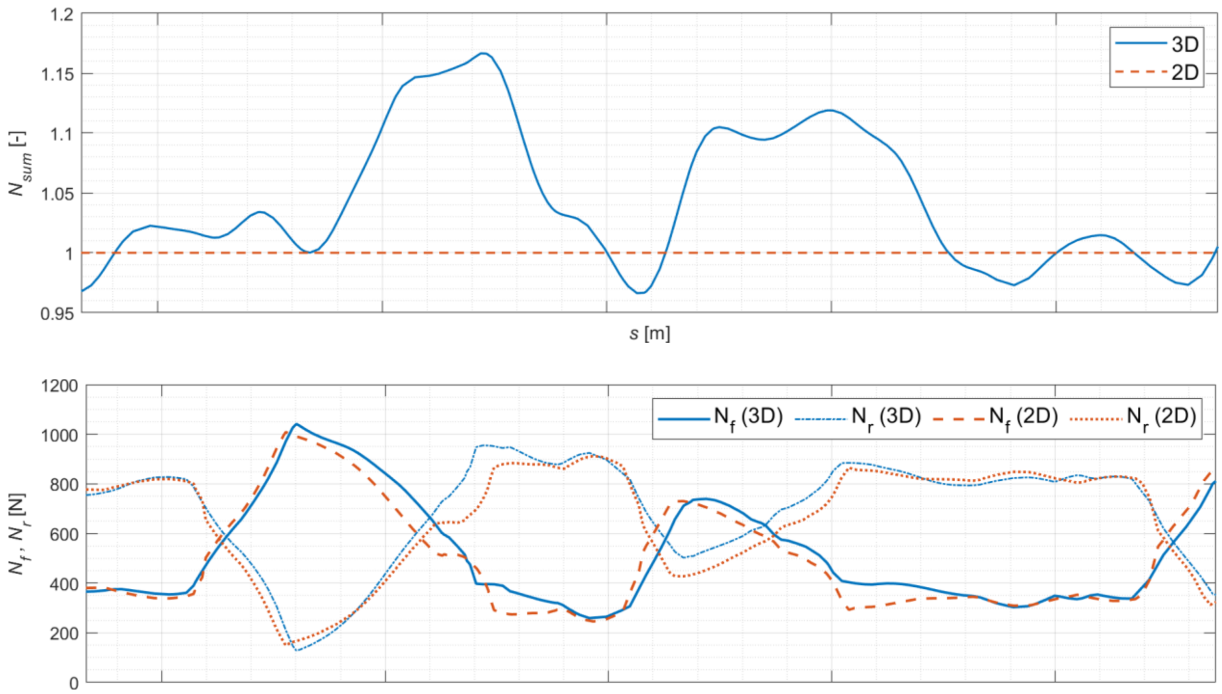
Rys. 6.20. Zbliżenie na fragment toru obejmujący nawroty (po lewej), prędkość V (u góry po prawej), położenie poprzeczne n (środkowy wykres po prawej), moduł promienia krzywizny |P| (u dołu po prawej)

minimalna prędkość motocykla w ruchu po jezdni 3D jest o 1.5 m/s większa niż pojazdu poruszającego się po jezdni płaskiej. Ekstremum promienia krzywizny trajektorii ruchu przypada wówczas 1.6 m później niż w przypadku jezdni 2D. Można więc stwierdzić, że prędkość pojazdu w szczycie zakrętu nr 2 (jezdnia 3D) została „poświęcona” w celu uzyskania większej prędkości w końcowej fazie zakrętu nr 3, po którym następuje krótki prosty odcinek trasy.

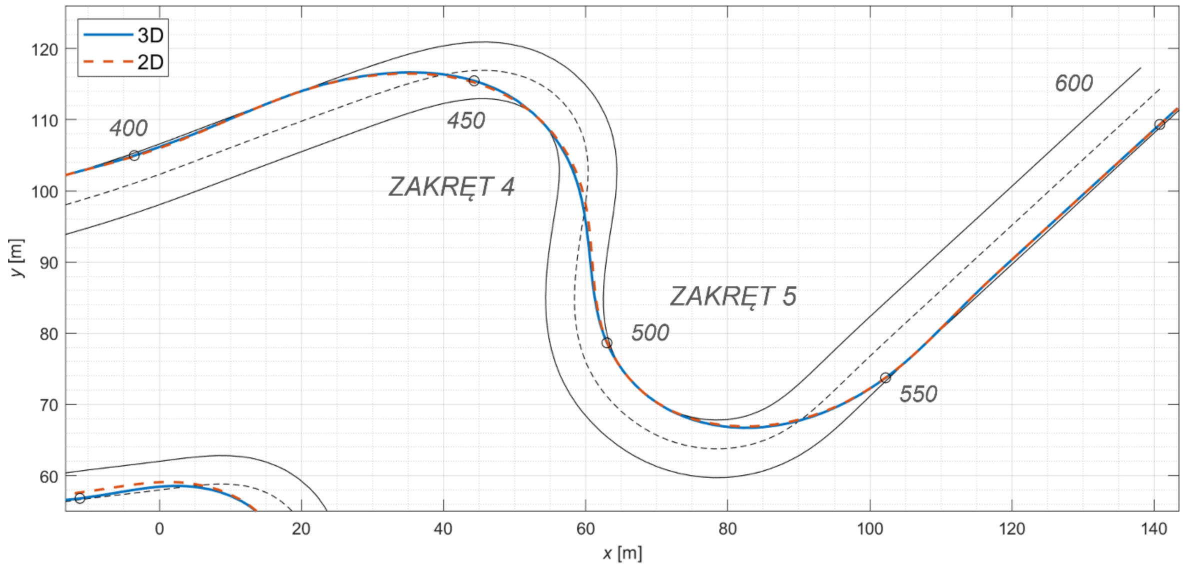
Zależności (6.27) oraz (4.40) i (4.41) umożliwiają przeprowadzenie analizy obciążenia kół pojazdu (rys. 6.21). Na górnym wykresie z rys. 6.21 przedstawiony został przebieg sumarycznej normalnej reakcji nawierzchni. Wykres dolny przedstawia siły N_f oraz N_r działające w kierunku normalnym do jezdni odpowiednio na przednie oraz tylne koło pojazdu. Maksymalna sumaryczna normalna reakcja nawierzchni w ruchu po jezdni 3D (w analizowanej sekcji nawrotów) jest 1.17 razy większa niż w ruchu po torze płaskim. Dolny wykres z rys. 6.21 pozwala na zlokalizowanie fragmentów trasy, w których istnieje ryzyko utraty kontaktu między kołami a nawierzchnią. Minimalna wartość normalnej reakcji nawierzchni na tylną oponę wynosi 128 N i przypada na fazę hamowania przed zakrętem nr 2 ($s = 230$ m). Minimalne obciążenie opony przedniej wynosi 246 N ($s = 297$ m) i dotyczy symulacji 2D.

Analiza trajektorii przejazdu przez szykanę

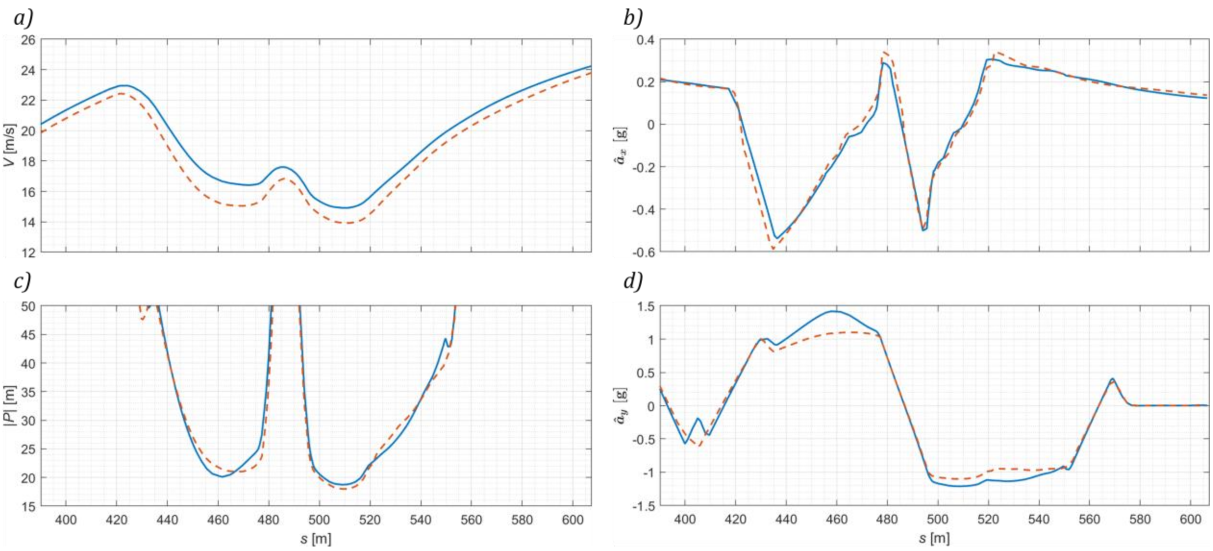
Fragment toru obejmujący szykanę złożoną z zakrętów nr 4 i 5 przedstawiony został na rys. 6.22. Różnice pomiędzy trajektoriami ruchu pojazdów zostały uwidocznione za pomocą modułu promienia krzywizny |P| (rys. 6.23c). Poruszający się po jezdni 3D pojazd pokonuje pierwszy zakręt szykany trajektorią o mniejszym promieniu krzywizny, zaś zakręt drugi trajektorią o większym promieniu krzywizny i uzyskuje dzięki temu większą prędkość w końcowej fazie manewru. Osiągnięta różnica prędkości pozwala skrócić czas



Rys. 6.21. Suma normalnych reakcji nawierzchni (u góry), normalna reakcja nawierzchni N_f i N_r na przednią oraz tylną oponę pojazdu (na dole)



Rys. 6.22. Trajektorie przejazdu dla manewru szykany



Rys. 6.23. Przebiegi: prędkości V (a), przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ (b), modułu promienia krzywizny |P| (c), przyspieszenia poprzecznego $\hat{a}_y$ (d) dla manewru szykany

przejazdu przez następujący po zakręcie nr 5 prosty odcinek trasy. Minimum promienia krzywizny w pierwszym łuku szykany przypada dla współrzędnej krzywoliniowej s równej 462 m (3D) oraz 467 m (2D).

Skupiając chwilowo uwagę na manewrze inicjacji skrętu w kierunku zakrętu nr 4, na wykresie przyspieszenia poprzecznego (rys. 6.23d) zauważyć można, że pojazdy dotykają zewnętrznej (lewej) krawędzi toru poruszając się z pewnym niezerowym przyspieszeniem poprzecznym $\hat{a}_y = 0.59\ \mathrm{g}$ $(s = 423\ \mathrm{m})$. Ten specyficzny sposób obierania trajektorii został już szerzej opisany w podrozdziale 4.4.2 i jest wynikiem wprowadzonych ograniczeń na wartości dopuszczalne zmiennych sterujących. Konsekwencje wprowadzonych ograniczeń widoczne są również w końcowej fazie ruchu na zakręcie nr 5. Pojazdy osiągają zewnętrzną (prawą) krawędź toru z niezerowym przyspieszeniem poprzecznym $\hat{a}_y = -0.56\ \mathrm{g}$ $(s = 556\ \mathrm{m})$. Następnie zbliżają się w stronę linii środkowej jezdni korygując jednocześnie trajektorię ruchu w sposób pozwalający na przebycie pozostałego odcinka trasy po najkrótszej ścieżce.

Alternatywne sformułowanie zależności na $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$

W pracy [26] podane zostały następujące zależności na wielkości $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$

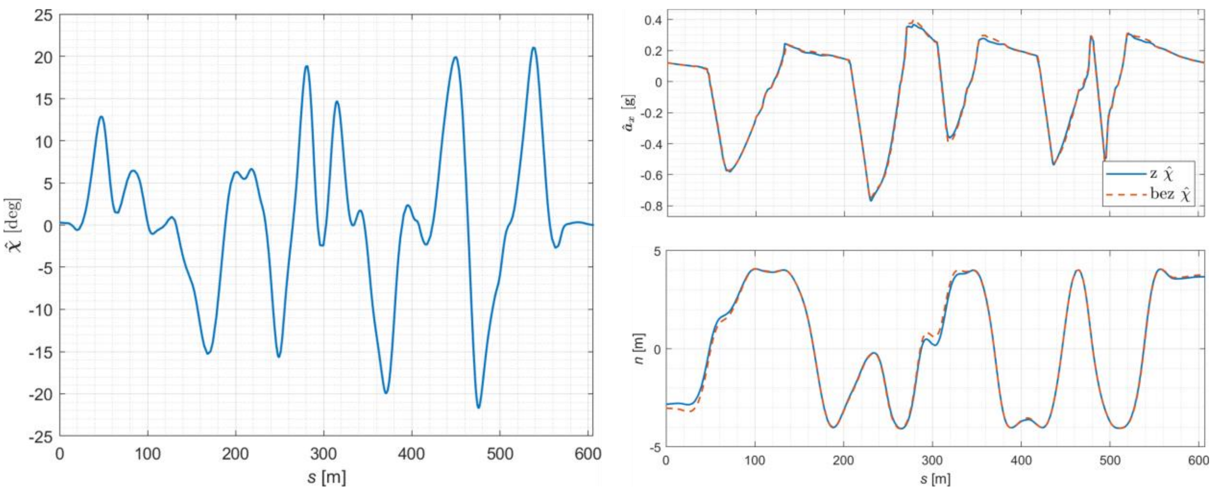
$$\tilde{a}_x = \hat{a}_x + \mathrm{g} \sin \mu, \tag{6.76}$$

$$\tilde{a}_y = \hat{a}_y - \mathrm{g} \cos \mu \sin \phi. \tag{6.77}$$

Prezentowane zależności (6.76) i (6.77) zostały otrzymane z równań (6.47) i (6.48) w wyniku przyjęcia wartości kąta $\hat{\chi} \equiv 0$. Wpływ tej modyfikacji na wyniki ZSO zostanie zaprezentowany na dwóch przykładach.

Pierwszy przykład dotyczy omawianego toru kartingowego w Starym Kisielinie. Po uwzględnieniu zależności (6.76) i (6.77) czas manewru optymalnego uległ skróceniu o 0.1 s. Pojazd osiągnął większe przyspieszenie wzdłużne w końcowej fazie manewru skręcania przypadającego na zakręty nr 2 i 3 oraz większe opóźnienie w fazie hamowania przed zakrętem nr 3. Niewielkie rozbieżności między analizami są również zauważalne na wykresie położenia poprzecznego (rys. 6.24).

Różnica między wynikami obliczeń jest nieznaczna. Nie jest to jednak regułą. Aby uwidocznić wpływ kąta $\hat{\chi}$, modyfikacji poddany został przykład z podrozdziału 6.4.1. Trójwymiarowa jezdnia została dodatkowo przechylona o kąt $\phi = -15°$. Przyjęto identyczne założenia co do modelowanego pojazdu, z tą różnicą, że położenie pojazdu na



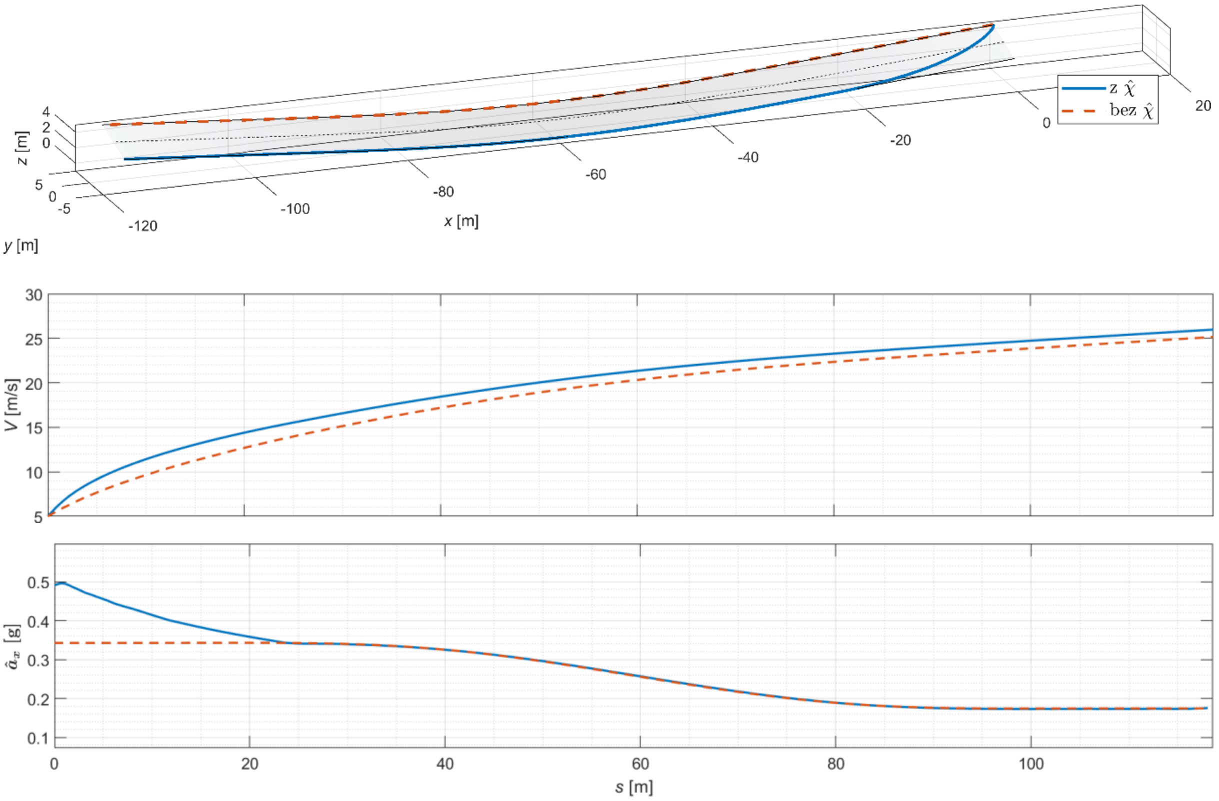
Rys. 6.24. Kąt odchylenia $\hat{\chi}$ od krzywej szkieletowej jezdni (po lewej), porównanie przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ (u góry po prawej) oraz położenia poprzecznego n (u dołu po prawej), w zależności od wykorzystanych zależności na $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$

początku manewru potraktowano jako swobodne (w granicy szerokości jezdni). Krzywizny oraz charakteryzujące trasę kąty Eulera były identyczne z przedstawionymi na rys. 6.8, z wyjątkiem pochylenia poprzecznego jezdni ϕ, które w omawianym przykładzie wynosiło $-15°$.

Wyznaczone trajektorie ruchu zostały zaprezentowane na rys. 6.25. W ZSO, w którym wielkości $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$ wyrażono za pomocą równań (6.76) i (6.77), trajektoria ruchu pojazdu jest równoległa do krawędzi trasy. W przypadku analizy, w której w zależnościach na $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$ uwzględniono kąt $\hat{\chi}$, pojazd rusza z górnej krawędzi jezdni ustawiony pod kątem $\hat{\chi} = -40°$ i wykorzystuje nachylenie jezdni do uzyskania większej wartości przyspieszenia wzdłużnego w początkowej fazie ruchu. Następnie zbliża się do przeciwległego brzegu toru, by od $s = 25$ m kontynuować ruch dokładnie wzdłuż lewej krawędzi trasy. Wyznaczona trajektoria ruchu pozwala osiągnąć o 0.16 g większe przyspieszenie wzdłużne w początkowej fazie manewru, o 0.8 m/s większą prędkość końcową (rys. 6.25) i o 0.338 s krótszy czasu manewru.

6.5. Porównanie z danymi eksperymentalnymi – motocykl klasy Supersport

Prezentowane dotychczas przykłady odnosiły się do lekkich motocykli wyścigowych o maksymalnej mocy silnika nie przekraczającej 35 kW. W niniejszym przykładzie analizie poddany zostanie ruch motocykla klasy Supersport (600) o ponad dwukrotnie większej mocy maksymalnej (88 kW). Uzyskane rezultaty numeryczne zostaną porównane z bazą danych [68] udostępnioną przez amerykańskiego zawodnika sportu



Rys. 6.25. Porównanie wyników ZSO w zależności od sformułowania wielkości $\tilde{a}_x$ i $\tilde{a}_y$. W kolejności od góry: optymalne trajektorie ruchu, prędkość V, przyspieszenie w kierunku wzdłużnym $\hat{a}_x$

motocyklowego – Nolana Lamkina, który w 2021 roku startował w Mistrzostwach Ameryki AMA w klasie Supersport (600). Prezentowane dane eksperymentalne dotyczyć będą pierwszej rundy mistrzostw, która odbyła się w dniach 30.04-02.05.2021 na torze Road Atlanta.

Udostępnione dane zostały zarejestrowane za pomocą pokładowego układu pomiarowego AIM Evo 5, który zapisywał informacje z systemu nawigacji satelitarnej, komputera sterującego pracą silnika oraz licznych czujników analogowych i cyfrowych, w tym czujników przemieszczeń liniowych do pomiaru ugięcia zawieszenia oraz czujników prędkości obrotowej kół jezdnych.

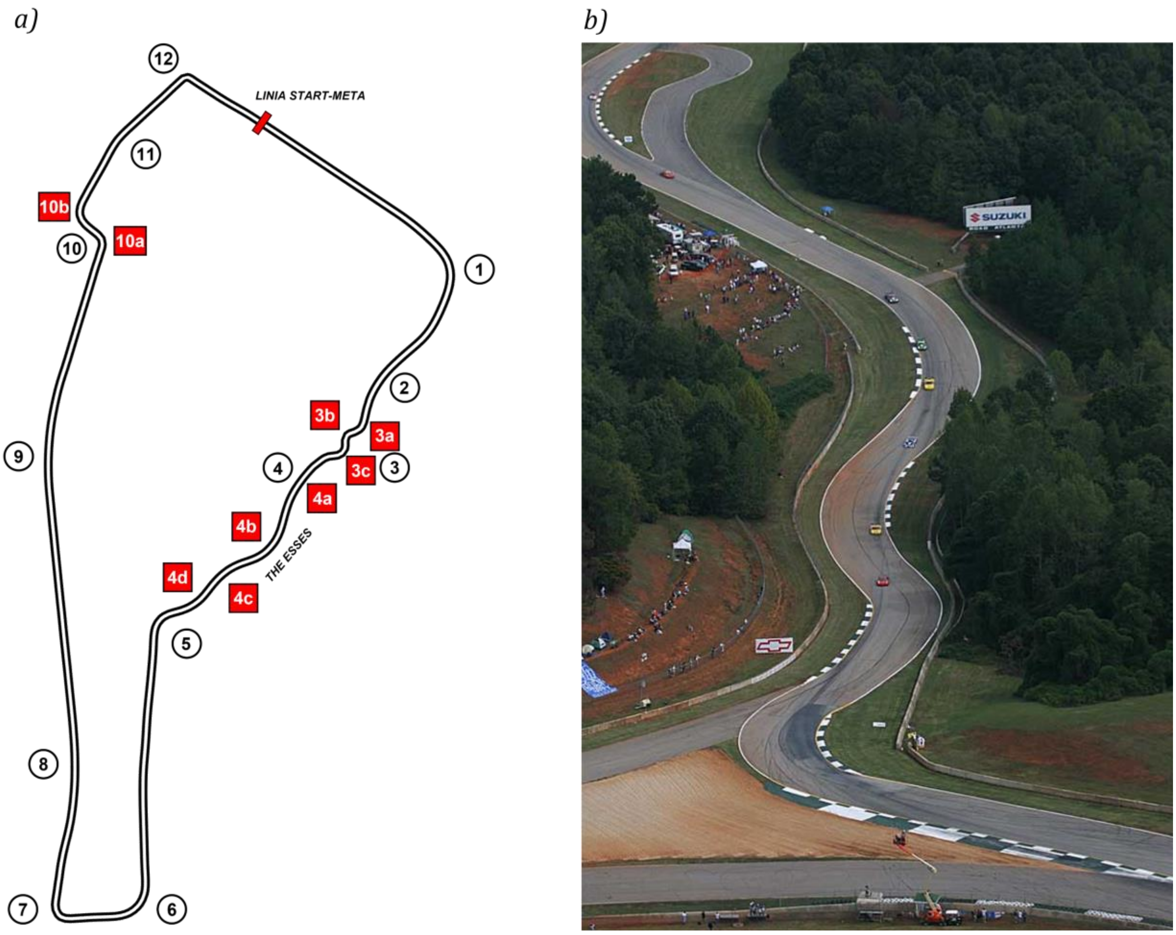
6.5.1. Model toru Road Atlanta

Mapa toru Road Atlanta wraz z przyjętą numeracją zakrętów została przedstawiona na rys. 6.26a. Konfiguracja toru wykorzystywana w mistrzostwach MotoAmerica jest układem dostosowanym do wyścigów motocyklowych i różni się od pętli samochodowej zakrętem nr 12 oraz dodatkową szykaną utworzoną z zakrętów 3a i 3b. Trasę charakteryzują liczne zmiany wysokości terenu, w tym między innymi stromo nachylona sekcja zakrętów od nr 3 do 5 nazywana *The Esses* (przedstawiona na rys. 6.26b) będąca znakiem rozpoznawczym obiektu.

W celu numerycznego odwzorowania jezdni wykorzystany został numeryczny model terenu podany w siatce 1x1 m (baza danych USGS), którego średni błąd wysokości wynosi 0.1 m. Zróżnicowana charakterystyka toru Road Atlanta spowodowała trudności w doborze uniwersalnej wartości współczynnika kary w_θ w zadaniu numerycznego odwzorowania trasy[28]. Mała wartość w_θ pozwalała na wierne odwzorowanie zakrętów o małym promieniu krzywizny, jednakże powodowała wzrost liczby punktów siatki potrzebnych do uzyskania założonej dokładności obliczeń. Wzrost szczegółowości odwzorowywanej jezdni skutkował następnie wydłużeniem czasu rozwiązywanego w kolejnym etapie zadania optymalizacji trajektorii ruchu. Z drugiej strony, duża wartość w_θ pozwalała na uzyskanie „gładkiego” przebiegu krzywizny geodezyjnej Ω_b, jednakże kosztem wierności odwzorowania zakrętów o małym promieniu krzywizny. W konsekwencji, w zadaniu optymalizacji trajektorii ruchu otrzymywano zawyżoną prędkość w niektórych łukach trasy. Z tego też względu podjęto decyzję o „ręcznym” połączeniu rezultatów otrzymanych dla współczynnika kary w_θ równego $4 \cdot 10^4$ oraz $4 \cdot 10^6$. Rezultaty dla wagi w_θ równej $4 \cdot 10^4$ wykorzystane zostały w obrębie zakrętów nr 3a i 3c oraz 10a i 10b. Wartości pozostałych współczynników kary zestawiono w tabeli 6.2.

Charakterystyki trasy przedstawione zostały na rys. 6.27 i 6.28. Rys. 6.27 przedstawia krzywizny jezdni oraz charakteryzujące ją kąty Eulera ϕ i μ, zaś rys. 6.28 obrazuje szerokość toru. Estymowana długość krzywej szkieletowej jezdni wyniosła 4145 m. Maksymalna bezwzględna wartość pochylenia poprzecznego jezdni ϕ równa jest 5.3° i przypada na zakręt nr 6. Maksymalne dodatnie pochylenie podłużne μ wynosi 6.0°, zaś minimalne $-8.8°$. Szerokość toru zawiera się w przedziale między 11.5 a 12.7 m przyjmując minimalną wartość dla zakrętu nr 4. Różnica wysokości między najwyższym a najniższym punktem trasy wynosi 37.5 m.

[28] Dla przypomnienia, waga w_θ penalizuje zmiany zmiennej sterującej odpowiedzialnej za odwzorowanie krzywizny Ω_b (krzywizny geodezyjnej).

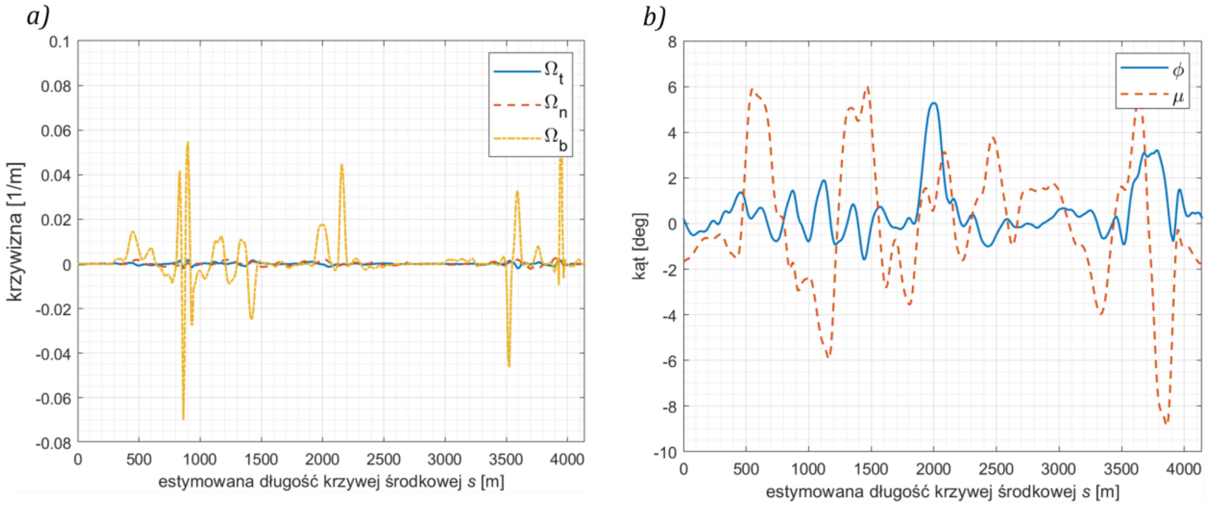


Rys. 6.26. Mapa toru Road Atlanta (a) oraz fotografia przedstawiająca sekcję zakrętów *The Esses*[29] (b)

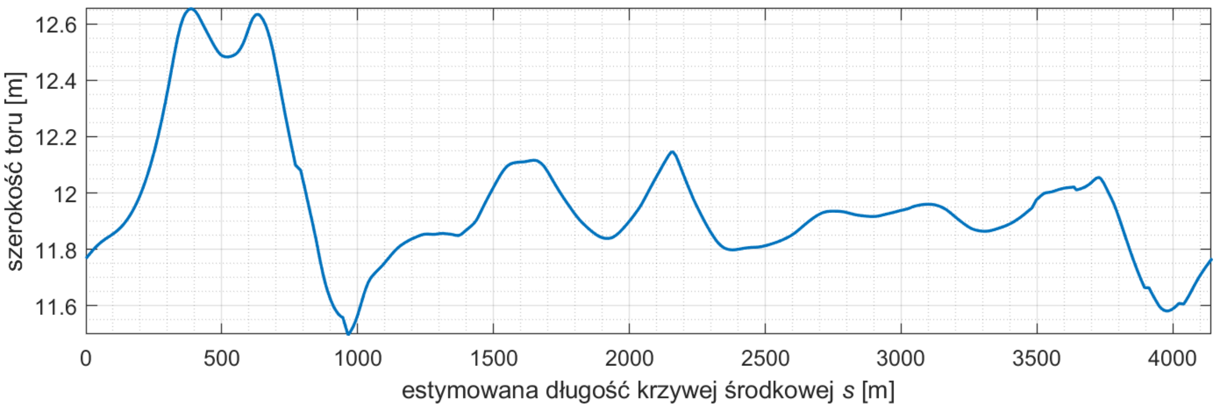
Tabela 6.2. Wagi w ZSO numerycznej rekonstrukcji jezdni

Waga	Wartość
w_θ	$4 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^6$
w_ϕ	$4 \cdot 10^6$
w_μ	$4 \cdot 10^6$
w_w	$1 \cdot 10^4$

[29] URL: blog.axisofoversteer.com/2012/10/Road-Atlanta-track-guide.html [dostęp: 02.2023]



Rys. 6.27. Krzywizny (a) oraz pochylenie podłużne μ i poprzeczne ϕ (b) toru wyścigowego Road Atlanta



Rys. 6.28. Szerokość toru Road Atlanta

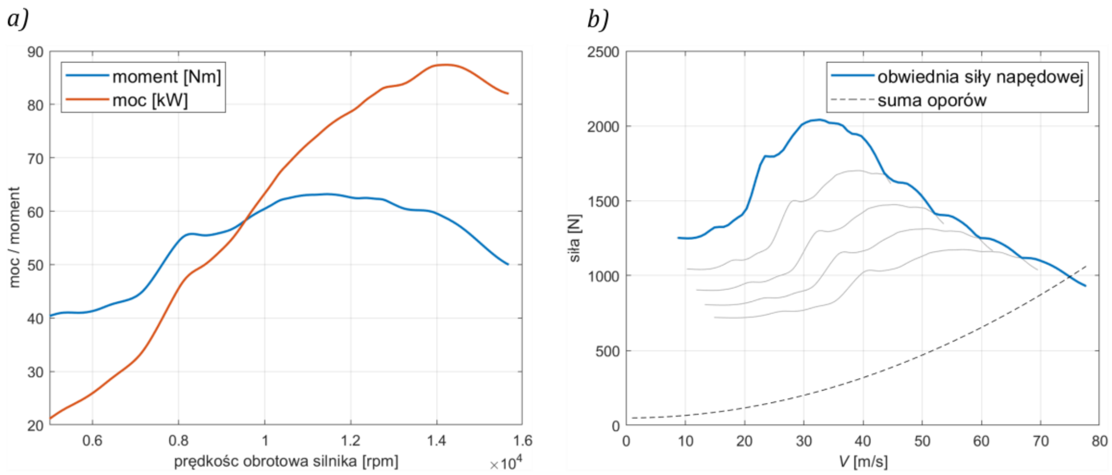
6.5.2. Model pojazdu Yamaha R6

Model pojazdu Yamaha R6 RJ27 (rok produkcji 2021) zbudowano na podstawie pomiarów własnych, danych technicznych pojazdu oraz informacji udostępnionych przez kierowcę na jego stronie internetowej [68]. Przyjęte w analizie charakterystyki pojazdu zestawiono w tabeli 6.3. Współczynnik przyczepności poprzecznej μ_y dobrano metodą prób i błędów na podstawie analizy porównawczej rezultatów numerycznych z danymi eksperymentalnymi.

Rys. 6.29a przedstawia krzywą momentu obrotowego oraz mocy silnika zarejestrowaną na hamowni podwoziowej w trakcie badania motocykla Yamaha R6 wykorzystywanego w Motocyklowych Mistrzostwach Polski. Badanie przeprowadzono dla nieustalonego stanu pracy silnika. Wyznaczona charakterystyka trakcyjna dla biegów od drugiego do szóstego została przedstawiona na rys. 6.29b. Pierwszy bieg pominięto,

Tabela 6.3. Charakterystyki pojazdu Yamaha R6 przyjęte w analizie

Symbol	Opis	Wartość
m	masa pojazdu wraz z kierowcą [kg]	255.00
w	rozstaw osi [m]	1.40
b	odległość wypadkowego środka ciężkości od punktu styku tylnego koła z jezdnią [m]	0.69
h	wysokość wypadkowego środka ciężkości [m]	0.66
h_p	wysokość środka ciśnienia [m]	0.66
P_{max}	moc maksymalna [kW]	88.00
f_w	współczynnik oporów toczenia [-]	0.02
$C_d A$	iloczyn współczynnika oporu aerodynamicznego i pola powierzchni czołowej [m^2]	0.28
ρ_a	gęstość powietrza [kg/m^3]	1.20
μ_x	współczynnik przyczepnośći wzdłużnej [-]	1.18
μ_y	współczynnik przyczepności poprzecznej [-]	1.13
i_p	przełożenie pierwotne [-]	2.07
i_{g_1}	przełożenie pierwszego biegu [-]	2.58
i_{g_2}	przełożenie drugiego biegu [-]	2.00
i_{g_3}	przełożenie trzeciego biegu [-]	1.67
i_{g_4}	przełożenie czwartego biegu [-]	1.44
i_{g_5}	przełożenie piątego biegu [-]	1.29
i_{g_6}	przełożenie szóstego biegu [-]	1.15
i_s	przełożenie przekładni łańcuchowej [-]	2.88
η_s	sprawność przekładni łańcuchowej [-]	0.88
r_{d_r}	promień dynamiczny tylnej opony [m]	0.330



Rys. 6.29. Wykres mocy i momentu silnika (a), charakterystyka trakcyjna motocykla Yamaha R6 (b)

ponieważ nie był on wykorzystywany przez amerykańskiego zawodnika. W obliczeniach trakcyjnych przyjęto oryginalny zestaw kół zębatych w skrzyni biegów, zaś nieznane przełożenie końcowe oszacowano na podstawie relacji między prędkością obrotową silnika a prędkością zarejestrowaną przez system nawigacyjny.

Współczynniki hiperbolicznych ograniczeń narzuconych na zmienne sterujące $\hat{J}_x$ i $\hat{J}_y$ wyznaczono za pomocą metody przedstawionej w podrozdziale 4.1.2 wykorzystując wyłącznie udostępnioną przez zawodnika bazę danych. Wartości współczynników zamieszczono w tabeli 6.4.

Zmienną niezależną na prezentowanych dalej wykresach będzie pokonany dystans s_{dist}, zaś prędkość pojazdu wyrażona będzie w jednostce [km/h].

Prędkość oraz przyspieszenia pojazdu wyznaczone w zadaniu sterowania optymalnego porównywane będą z wielkościami wyznaczonymi za pomocą post-processingu danych satelitarnych rejestrowanych przez pokładowe systemy pomiarowe. Określana za pomocą urządzenia firmy AIM (które zarejestrowało prezentowane dalej pomiary) prędkość pojazdu jest jego prędkością przestrzenną [69] (odpowiadającą prędkości V w ZSO), zaś przyspieszenie poprzeczne dotyczy ruchu w płaszczyźnie horyzontalnej. Jednakże, biorąc pod uwagę, że różnica między przyspieszeniem poprzecznym wyznaczonym w płaszczyźnie horyzontalnej a przyspieszeniem $\hat{a}_y$ wyznaczonym w ZSO, jest rzędu procenta dla pochylenia poprzecznego jezdni równego 10° (przykład obliczeniowy z podrozdziału 6.4.1) oraz mając na względzie charakter metody (post-processing danych

Tabela 6.4. Współczynniki funkcji ograniczających wartości dopuszczalne zrywów

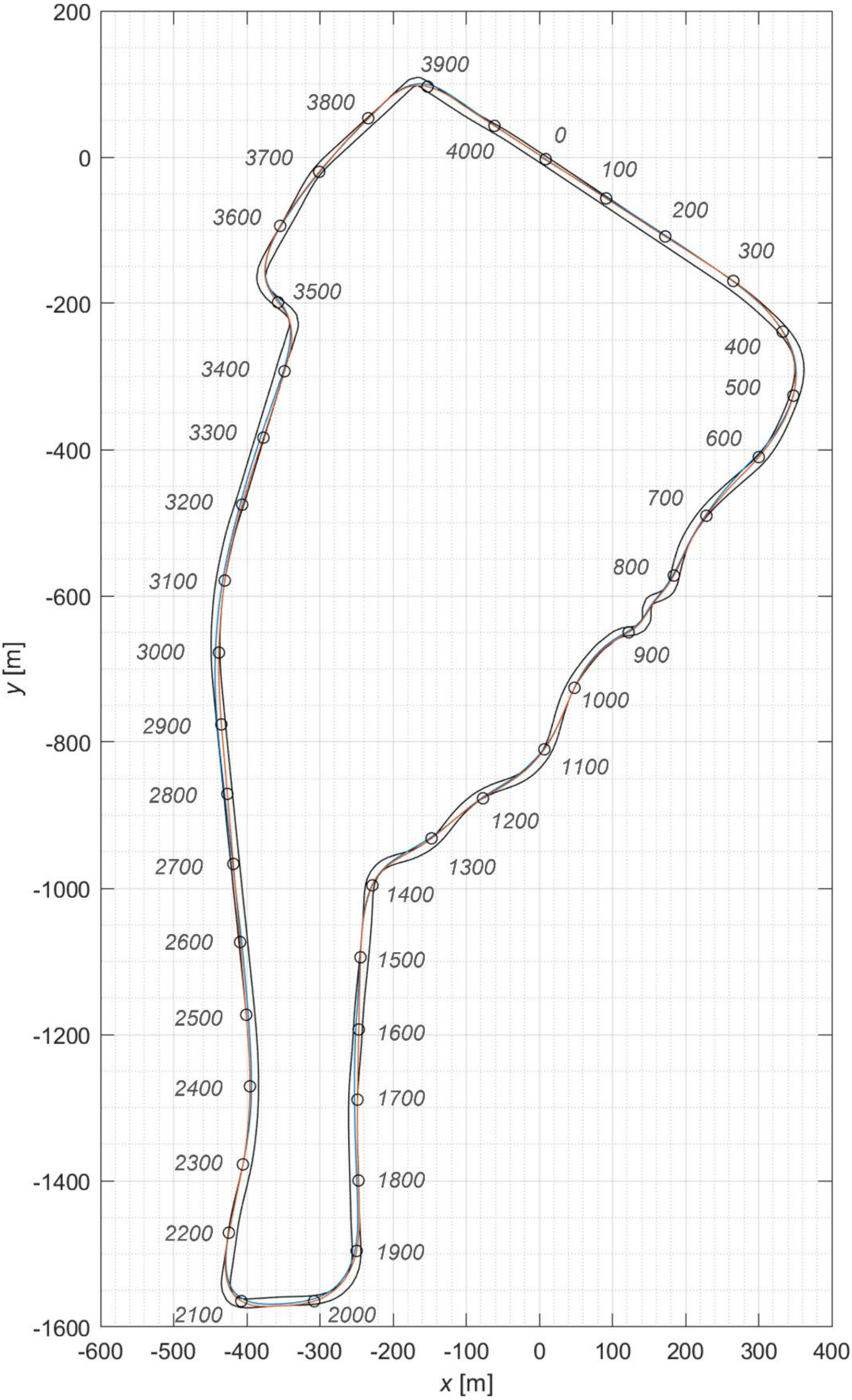
Współczynnik	Wartość
Ograniczenie $\hat{J}_y$	
$\beta_0^{j_y}$	32.559
$\beta_1^{j_y}$	-0.378
Ograniczenie $\hat{J}_{x_a}$	
$\beta_0^{j_{x_a}}$	15.440
$\beta_1^{j_{x_a}}$	-0.148
Ograniczenie $\hat{J}_{x_d}$	
$\beta_0^{j_{x_d}}$	-28.440
$\beta_1^{j_{x_d}}$	0.148

satelitarnych), przyjęto, że przyspieszenia z układu pomiarowego będą bezpośrednio porównywane z wielkościami wyznaczonymi w ZSO.

6.5.3. Analiza rezultatów

Prezentowane dane eksperymentalne dotyczą drugiego wyścigu klasy Supersport, w którym rozpatrywany zawodnik osiągnął najlepszy czas okrążenia wynoszący 90.485 s. Czas optymalnego okrążenia w ruchu po torze trójwymiarowym (SIM) wyniósł 89.658 s i jest o 0.829 s krótszy od zarejestrowanego przez układ pomiarowy (AQ). Trajektorie pojazdów zestawiono na rys. 6.30, zaś ich prędkości porównano na rys. 6.31, na którym zamieszczono dodatkowo rezultat obliczeń numerycznych dla dwuwymiarowego modelu jezdni (2D). Wyznaczony minimalny czas okrążenia w analizie 2D wyniósł 91.211 s. Dolny wykres na rys. 6.31 przedstawia skumulowaną różnicę czasu względem okrążenia referencyjnego – okrążenia SIM.

Zaprezentowane przebiegi prędkości są do siebie zbliżone, przy czym prędkość w ruchu po jezdni 3D jest bliższa zarejestrowanym pomiarom. Prędkość maksymalna uzyskiwana jest między łukami nr 9 oraz 10 i przyjmuje wartości: 263.8 km/h (SIM), 267.2 km/h (AQ) oraz 262.9 km/h (2D). Minimalna prędkość osiągana jest na zakręcie nr 7 i wynosi: 72.7 km/h (SIM), 73.8 km/h (AQ) oraz 73.7 km/h (2D). Różnica prędkości maksymalnej między AQ a SIM związana jest z poruszaniem się rzeczywistego pojazdu w cieniu aerodynamicznym za innym kierowcą. Dla poddawanego analizie okrążenia, prędkość maksymalna jest o 7.2 m/s większa od średniej z pozostałych okrążeń. Z tego też względu na rys 6.31 naniesiony został wycinek profilu prędkości z wybranego



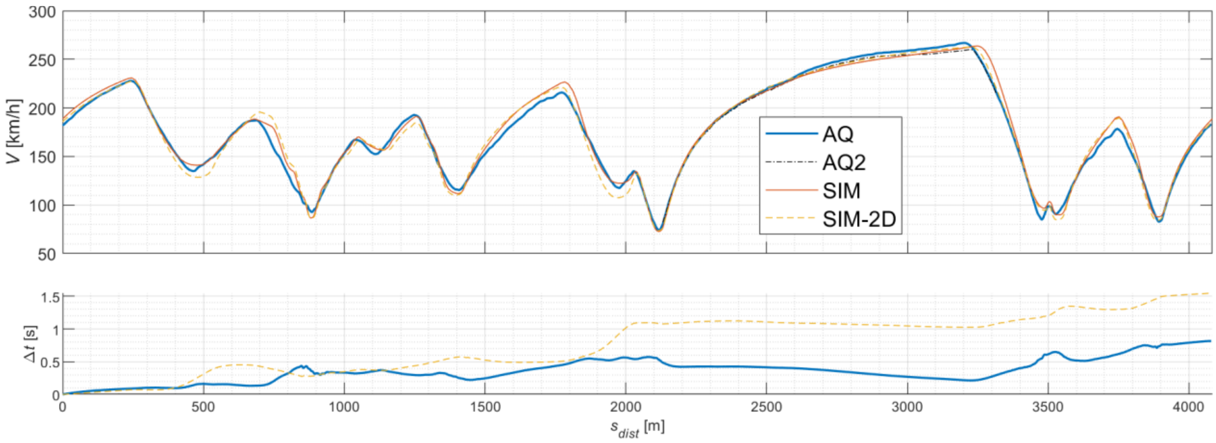
Rys. 6.30. Optymalna (kolor pomarańczowy) oraz zarejestrowana (kolor niebieski) trajektoria ruchu po torze Road Atlanta

okrążenia o prędkości maksymalnej najbliższej wyznaczonej średniej (linia kreska-kropka oznaczona jako AQ2). Trójwymiarowy model jezdni pozwolił uzyskać lepsze odwzorowanie prędkości na odcinkach o znacznej wartości pochylenia podłużnego μ (między zakrętami nr 2 i 3 oraz nr 4 i 5).

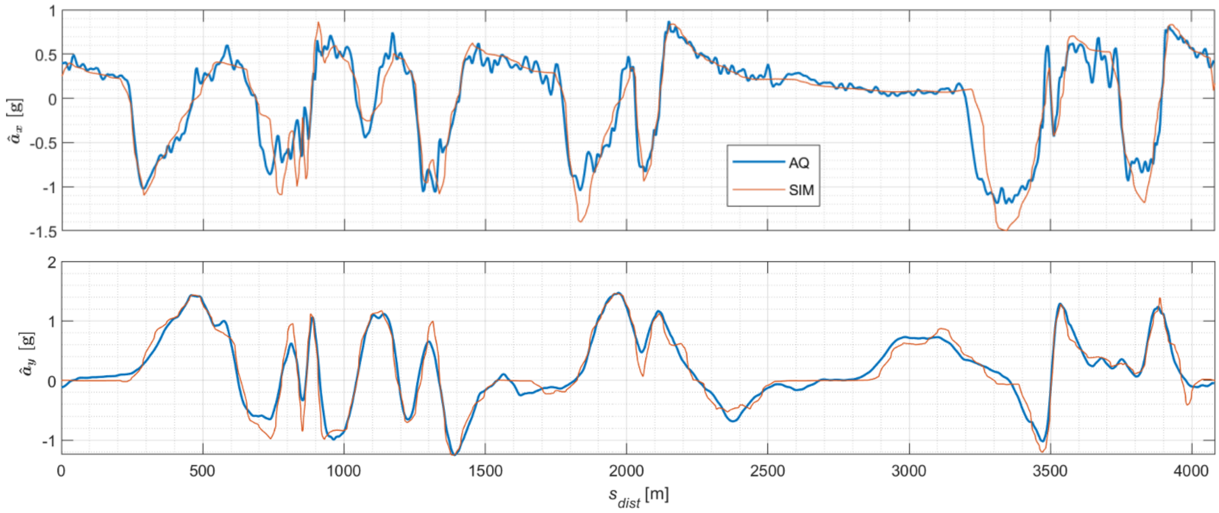
Przyspieszenia pojazdu porównano na rys. 6.32. Pomimo skomplikowanej geometrii jezdni otrzymano bardzo dobrą zgodność rezultatów numerycznych (3D) z przebiegami eksperymentalnymi, zarówno pod względem wartości liczbowych, jak i zmienności przyspieszeń w przejściowych fazach ruchu. Otrzymane rezultaty odpowiadają danym eksperymentalnym w całym zakresie prędkości pojazdu, co jest zasługą wprowadzonych w podrozdziałach 4.1.2 i 4.1.3 ograniczeń $\hat{J}_y(V), \hat{J}_{x_a}(V)$ i $\hat{J}_{x_d}(V)$ na wartości dopuszczalne zmiennych sterujących. Wierne odwzorowanie przyspieszenia wzdłużnego w trakcie rozpędzania pojazdu jest zasługą uwzględnionej w obliczeniach charakterystyki trakcyjnej.

Maksymalna wartość przyspieszenia $\hat{a}_y$ wynosząca 1.46 g (SIM) oraz 1.47 g (AQ) obserwowana jest podczas ruchu na zakręcie nr 6 charakteryzującym się największym pochyleniem poprzecznym ϕ. Prawidłowe odwzorowanie maksymalnych wartości przyspieszeń poprzecznych (będące zasługą wyznaczonego na podstawie szczegółowego NMT modelu jezdni) w poszczególnych łukach trasy potwierdza rys. 6.33a, na którym za oś odciętych przyjęto prędkość V. Poprawność odwzorowania pochylenia poprzecznego w przyjętym w analizie modelu jezdni jest również potwierdzona diagramem przyspieszeń przedstawionym na rys. 6.33b. Uwagę zwraca szczególnie dobra zgodność przyspieszeń pojazdu w lewej połowie diagramu.

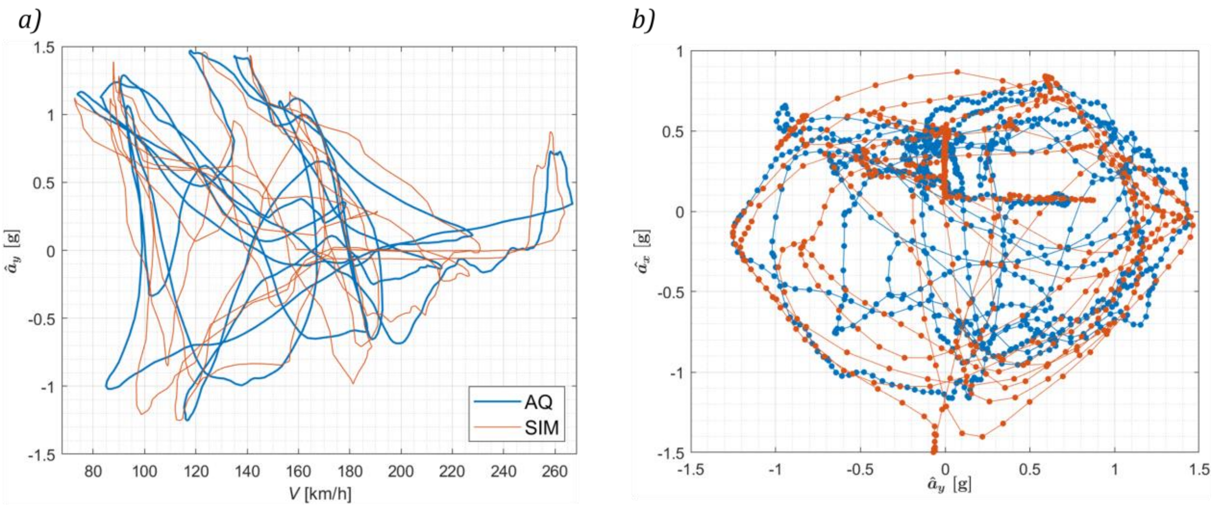
Zaprezentowane na rys. 6.34 wykresy punktowe przedstawiają: pochodną po czasie przyspieszenia poprzecznego (rys. 6.34a) oraz wzdłużnego (rys. 6.34b). Podstawą wykresów jest prędkość V. Ekstremalne wartości zrywu poprzecznego maleją wraz ze wzrostem prędkości V, a zarejestrowane wartości zrywów w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu zawierają się w obwiedni danych z „symulacji". Wartości zrywu wzdłużnego są zgodne zarówno dla dodatnich jak i ujemnych gradientów przyspieszenia $\hat{a}_x$. Uzyskana zgodność odwzorowania zmienności przyspieszeń jest związana z funkcjami ograniczającymi $\hat{J}_y(V), \hat{J}_{x_a}(V)$ i $\hat{J}_{x_d}(V)$, które zostały wyznaczone na podstawie bazy danych charakteryzującej konkretny układ motocykl–kierowca.



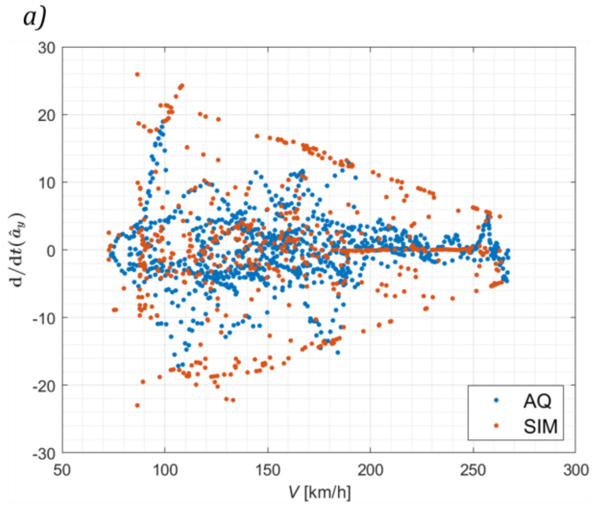
Rys. 6.31. Porównanie prędkości pojazdów w ruchu po torze Road Atlanta (u góry), skumulowana strata czasowa względem najlepszego okrążenia (na dole)



Rys. 6.32. Przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$ (u góry) oraz przyspieszenie poprzeczne $\hat{a}_y$ (na dole) pojazdu rzeczywistego (kolor niebieski) oraz z „symulacji" (kolor pomarańczowy)



Rys. 6.33. Przyspieszenie poprzeczne $\hat{a}_y$ w funkcji prędkości V (a) oraz diagram przyspieszeń (b)



Rys. 6.34. Pochodna po czasie: przyspieszenia poprzecznego $\hat{a}_y$ (a), przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ (b)

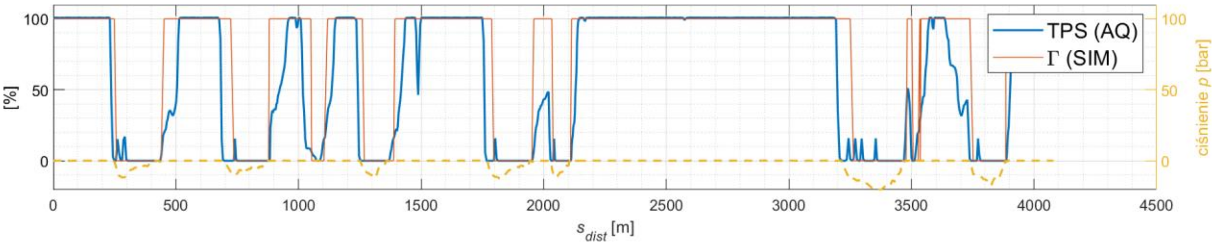
Kierowcy wyścigowi korzystają z charakterystycznych cech jezdni lub otoczenia do umiejscowienia tak zwanych punktów referencyjnych (odniesienia), w których następnie rozpoczynają manewry hamowania, skręcania czy przyspieszania. Punkty odniesienia pozwalają na usystematyzowanie jazdy oraz poprawę jej płynności. Wzorcowe (optymalne) położenie punktów odniesienia może zostać określone na podstawie przeprowadzonych obliczeń numerycznych za pomocą wprowadzonej na tę potrzebę wielkości Γ opisanej zależnością

$$\Gamma = \begin{cases} 1 & \text{dla } m\tilde{a}_x + F_d + F_w \geq 0, \\ 0 & \text{dla } m\tilde{a}_x + F_d + F_w < 0, \end{cases} \tag{6.78}$$

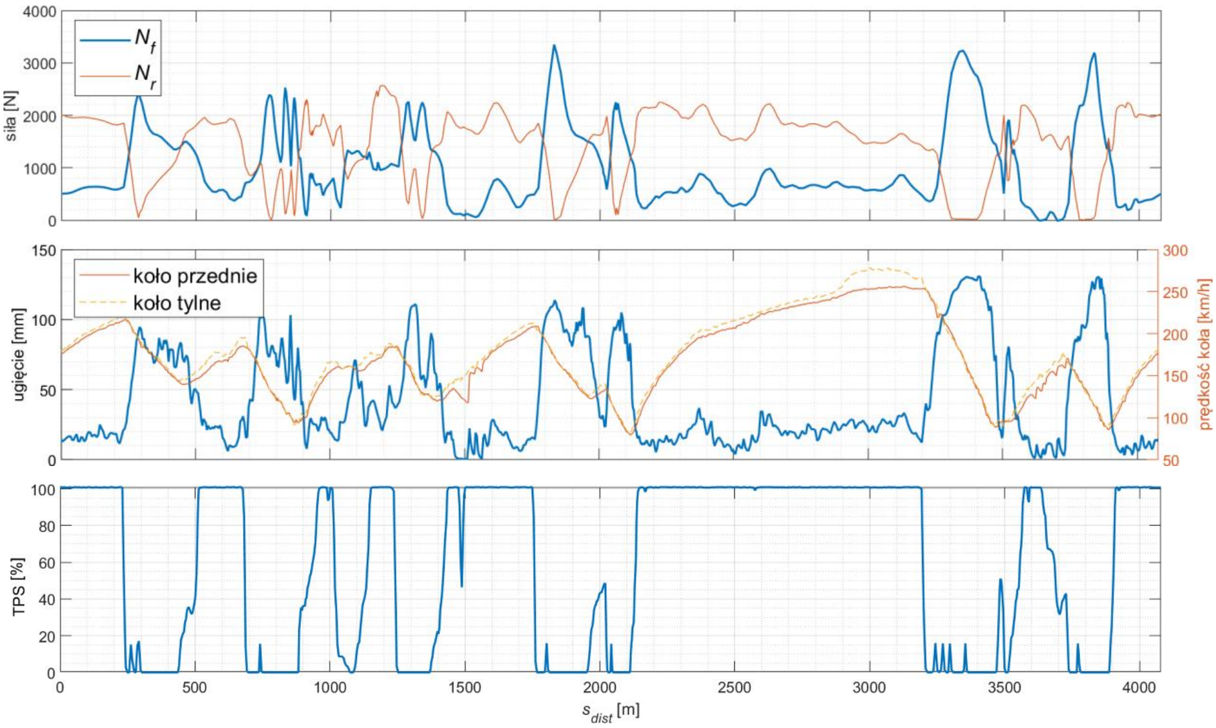
która przyjmuje wartość 1, gdy na tylne koło pojazdu działa niezerowy moment napędowy T_n oraz 0, gdy do któregoś z kół przyłożony jest moment hamujący T_h.

Przedstawione na rys. 6.35 porównanie wprowadzonej wielkości Γ z procentowym otwarciem przepustnicy (oznaczonym na rys. 6.35 jako „TPS" od ang. *Throttle Position Sensor*) oraz ciśnieniem w układzie hamulcowym przedniego koła pozwala na modyfikację obranych przez zawodnika punktów odniesienia. Zmianę wartości Γ z 0 na 1 utożsamiać można z inicjalnym otwarciem przepustnicy znajdującej się w układzie dolotowym silnika, zaś z 1 na 0 z rozpoczęciem manewru hamowania.

Charakterystyczną cechą analizowanego toru wyścigowego są zmiany pochylenia podłużnego jezdni, które wpływają na obciążenie kół w kierunku normalnym do nawierzchni. Naniesione na górnym wykresie z rys. 6.36 normalne reakcje nawierzchni, wskazują, że w trakcie przejazdu przez wzniesienie za zakrętem nr 11 możliwa jest utrata



Rys. 6.35. Procentowe otwarcie przepustnicy (TPS) oraz pomnożona przez sto wielkość Γ (oś rzędnych po lewej stronie wykresu), wartość ciśnienia w układzie hamulcowym przedniego koła (oś rzędnych po prawej stronie wykresu)



Rys. 6.36. W kolejności od góry: normalna reakcja nawierzchni N_f oraz N_r na odpowiednio przednie oraz tylne koło, ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu przedniego koła wraz z liniową prędkością kół, procentowe otwarcie przepustnicy (TPS)

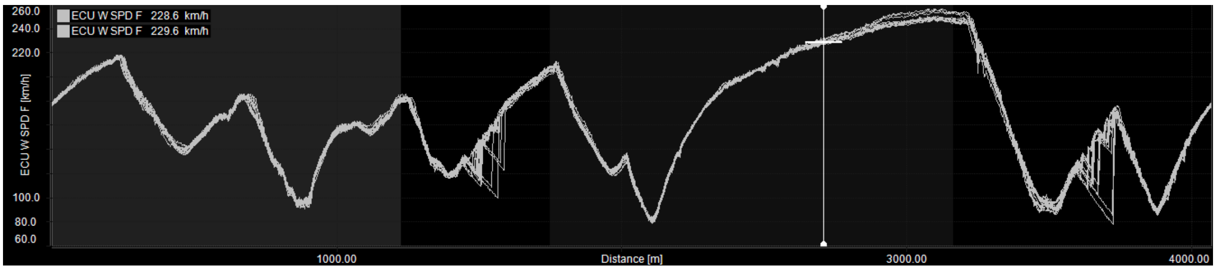
kontaktu przedniego koła z jezdnią (zerowa wartość reakcji nawierzchni). Poczyniona obserwacja znajduje potwierdzenie w obrazach z relacji internetowej (rys. 6.37) oraz w danych z układu pomiarowego. O utracie kontaktu koła z jezdnią świadczą lokalne spadki prędkości przedniego koła oraz bliska zeru wartość ugięcia elementu sprężystego (środkowy wykres na rys. 6.36). Zawodnik oraz „symulowany kierowca" próbują przeciwdziałać unoszeniu przedniego koła przejeżdżając przez rozpatrywane wzniesienie z niezerowym przyspieszeniem poprzecznym $\hat{a}_y$ (osiągi pojazdu ograniczone warunkiem reprezentowanym przez krzywą nr 3 na rys. 4.9a w podrozdziale 4.3).

Drugim fragmentem trasy, w którym należy spodziewać się utraty kontaktu przedniego koła z jezdnią jest szczyt wzniesienia za zakrętem nr 5. Poczyniona obserwacja znajduje odzwierciedlenie w relacji z wyścigu (rys. 6.37b) oraz w danych eksperymentalnych. W poddanym analizie okrążeniu, zawieszenie przedniego koła znajdowało się w omawianym fragmencie trasy w pozycji maksymalnego rozciągnięcia przez ponad 40 m, zaś prędkość liniowa przedniego koła zmalała ze 135 km/h do 118 km/h. Kierowca musiał ponadto powstrzymać pochylający ruch motocykla w stronę tylnego koła poprzez zmniejszenie wartości procentowego otwarcia przepustnicy ($s_{dist} = 1488$ m). Zamieszczony na rys. 6.38 zbiorczy wykres prędkości liniowej przedniego koła obrazuje powtarzalny charakter poczynionej obserwacji.

Porównując wyniki „symulacji” z eksperymentem, zauważyć można znaczące różnice między osiąganymi wartościami opóźnień. Pojazd SIM osiąga większe opóźnienie przed zakrętami nr 2, 6, 10a i 12. Maksymalne opóźnienie w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu zostało zarejestrowane w trakcie manewru hamowania przed szykaną z zakrętów nr 10a oraz 10b i wynosiło 1.20 g. W tym samym fragmencie trasy swoją maksymalną wartość opóźnienia wynoszącą 1.50 g osiąga także pojazd z „symulacji”. Pojazd SIM hamuje na granicy utraty kontaktu tylnego koła z jezdnią, co widoczne jest na rys. 6.36 jako zerowa wartość normalnej reakcji nawierzchni na tylne koło (3320-3400 m). Obciążenie pionowe przedniego koła przyjmuje wówczas maksymalną

a) b)

Rys. 6.37. Wybrane klatki relacji z wyścigu przedstawiające fragmenty trasy, na których obserwowana jest utrata kontaktu pomiędzy przednim kołem a jezdnią



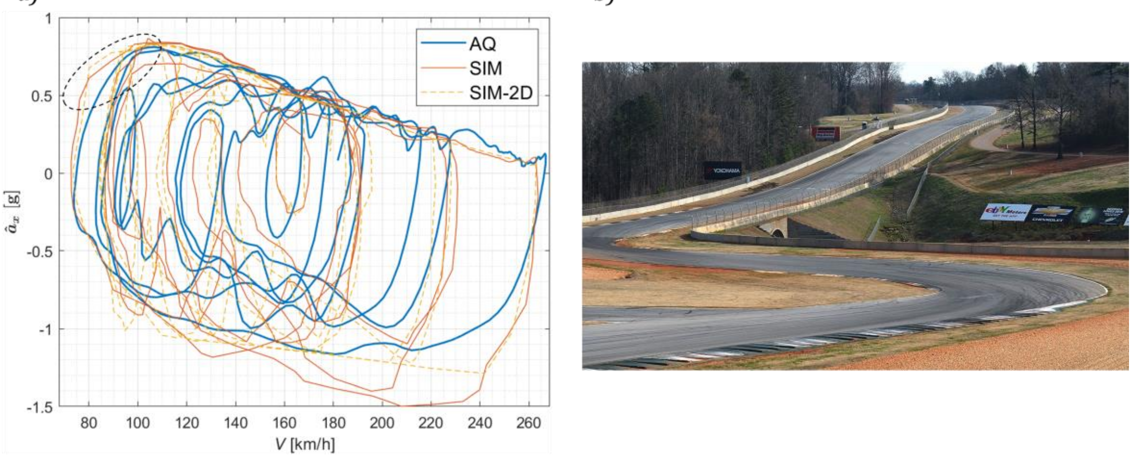
Rys. 6.38. Zestawienie przebiegów liniowej prędkości przedniego koła dla wszystkich okrążeń wyścigu

w trakcie całego okrążenia wartość równą 3234.3 N, która jest o 781.8 N większa niż ciężar pojazdu wraz z kierowcą. Zwiększona wartość normalnej reakcji nawierzchni w omawianym fragmencie trasy wynika ze zmiany pochylenia podłużnego μ jezdni. Działająca na pojazd siła odśrodkowa (związana ze zmianami μ) umożliwia uzyskanie o 0.3 g większej wartości opóźnienia oraz pozwala na opóźnienie rozpoczęcia manewru hamowania o 45 m. Analiza przebiegu fazy hamowania rozpatrywanego układu motocykl–kierowca znajdzie swoją kontynuację w podrozdziale 7.4.2.

Kolejne wartościowe informacje dotyczące optymalnego przebiegu manewru mogą zostać odczytane z wykresu przyspieszenia wzdłużnego przedstawionego na rys. 6.39a, którego oś odciętych odpowiada prędkości V. Naniesiony rezultat dla analizy 2D pozwala uwidocznić wpływ oporu aerodynamicznego na wartości przyspieszeń wzdłużnych. Wraz ze wzrostem prędkości ruchu rośnie maksymalna wartość opóźnienia. Zmiana pochylenia podłużnego jezdni na prostych odcinkach trasy poprzedzających zakręty nr 6 oraz 10a (rys. 6.39b) pozwala uzyskać większe opóźnienie niż w ruchu po jezdni płaskiej.

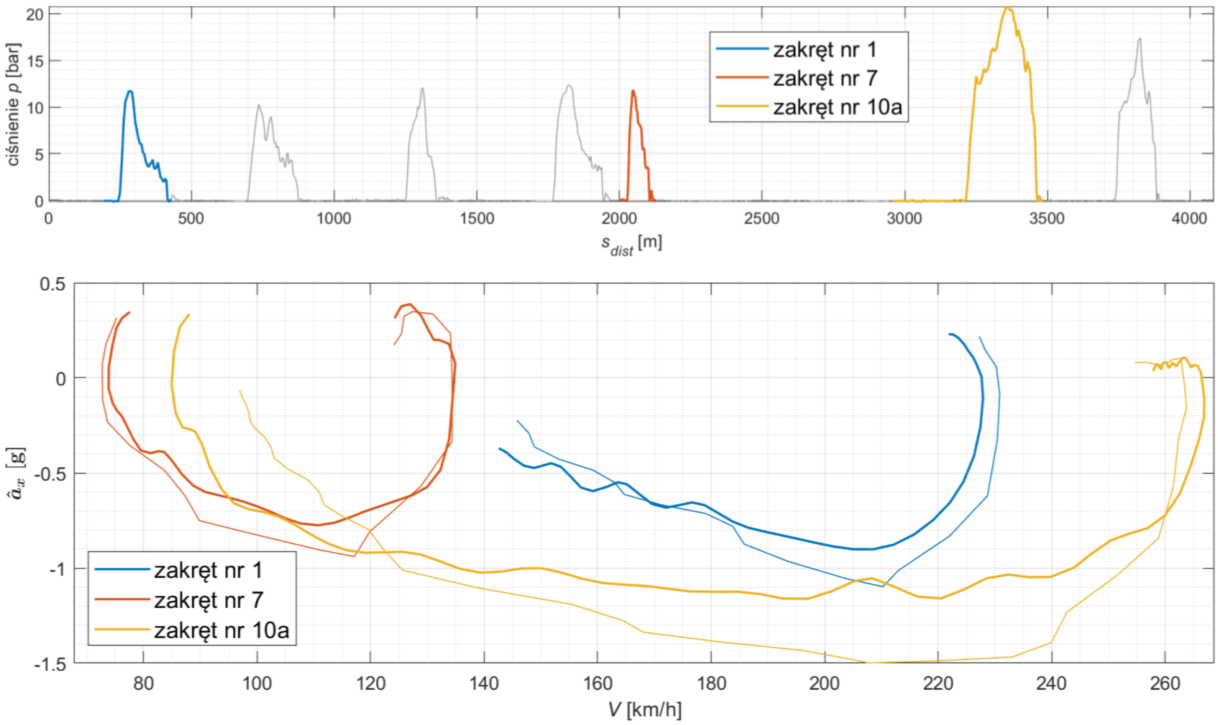
W przypadku manewru hamowania przed szykaną utworzoną z zakrętów nr 10a i 10b (hamowanie z maksymalnej prędkości), ekstremum opóźnienia pojazdu AQ obserwowane jest później niż dla pozostałych manewrów hamowania oraz niż wynika to z przebiegu manewru optymalnego. Aby uwidocznić omawiany aspekt, na rys. 6.40 wyszczególnione zostały przebiegi ciśnienia w układzie hamulcowym oraz przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ w funkcji prędkości V dla manewrów hamowania

a) *b)*



Rys. 6.39. Przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$ w funkcji prędkości V (a) oraz fotografia[30] przedstawiająca opadającą jezdnię przed szykaną utworzoną z zakrętów nr 10a i 10b (b)

[30] URL: indycar.com/Schedule/2012/Pro-Mazda-Championship-Series/Road-Atlanta [dostęp: 03.23].



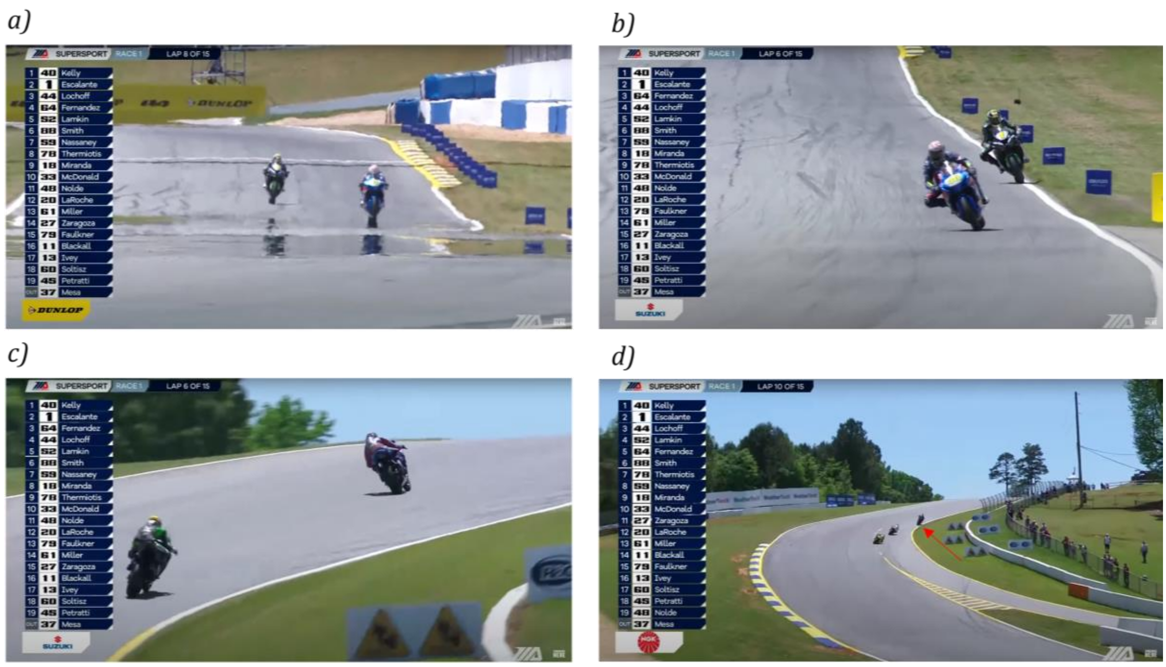
Rys. 6.40. Ciśnienie w układzie hamulcowym przedniego koła (u góry), wybrane przebiegi przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ w funkcji prędkości V (na dole)

poprzedzających zakręty nr 1, 7 oraz 10a. Manewry hamowania poprzedzające zakręty nr 1 oraz 7 charakteryzują się przebiegiem bliskim optymalnemu manewrowi (ekstremum opóźnienia osiągane w początkowej fazie manewru hamowania). Krzywa ciśnienia przyjmuje wówczas charakterystyczny kształt płetwy rekina. Maksymalne ciśnienie obserwowane jest tuż po inicjacji hamowania, a następnie progresywnie maleje aż do zerowej wartości. Odmienny kształt krzywej ciśnienia w trakcie manewru hamowania przed zakrętem nr 10a znajduje odzwierciedlenie na dolnym wykresie z rys. 6.40 w formie przesunięcia ekstremum opóźnienia w kierunku mniejszych prędkości. Przeprowadzona analiza pozwala stwierdzić, że optymalny przebieg krzywej ciśnienia w układzie hamulcowym przedniego koła powinien przyjąć kształt płetwy rekina. Wysnuty wniosek znajduje potwierdzenie w literaturze traktującej o technikach analizy danych z pokładowych systemów pomiarowych [70].

Omówienie wybranych fragmentów trasy

W rozdziale 4.4.1 została zwrócona uwaga na charakterystyczny ruch pojazdu w stronę środka jezdni, następujący po zetknięciu z zewnętrzną krawędzią toru w końcowej fazie manewru skręcania. Zaobserwowana wówczas trajektoria wynikała z wprowadzonych w podrozdziałach 4.1.2 i 4.1.3 ograniczeń na wartości dopuszczalne zmiennych sterujących. W niniejszym przykładzie, ta charakterystyczna cecha poruszania się pojazdów jednośladowych po torze wyścigowym zauważalna jest zarówno w rezultatach ZSO, zarejestrowanych pomiarach, jak również w relacji z wyścigu, z której wycinki zostały przedstawione na rys. 6.41. Zamieszczone obrazy przedstawiają kolejne położenia motocykli na prostej startowej między zakrętem nr 12 a 1. Po zetknięciu z krawędzią jezdni w końcowej fazie manewru skręcania przypadającego na zakręt nr 12, kierowcy zbliżają się do środka jezdni (rys. 6.41a), a następnie kierują motocykle w stronę zewnętrznej krawędzi trasy, którą osiągają w fazie inicjowania skrętu w kierunku zakrętu nr 1 (rys. 6.41b). Motocykle są już wówczas przechylone w kierunku zbliżającego się łuku trasy (rys. 6.41b), zgodnie z optymalnym przebiegiem manewru opisanym w podrozdziale 4.4.2.

Następujący dalej zakręt nr 1 jest fragmentem toru o znaczącej różnicy między trajektoriami pojazdów. Rozpatrywany kierowca kierował swój pojazd w końcowej części zakrętu nr 1 w kierunku prawej krawędzi jezdni, podczas gdy optymalna trajektoria ruchu przebiega blisko linii środkowej trasy (rys. 6.30). Kierowcy prowadzący wyścig, przedstawieni na rys. 6.41c, w tym rekordzista toru w klasie Supersport - Sean Dylan Kelly (rekordowy czas okrążenia 1:28.173), poruszali się trajektorią bliższą wzorcowej.



Rys. 6.41. Fragmenty przekazu telewizyjnego z wyścigu nr 1: położenie pojazdów na prostej startowej (górny rząd rysunków) oraz na zakręcie nr 1 (dolny rząd rysunków)

Zawodnicy zajmujący miejsca od trzeciego do piątego, w tym rozpatrywany kierowca (drugi motocykl na rys. 6.41d), inicjowali skręt w stronę zakrętu nr 2 od prawej krawędzi jezdni.

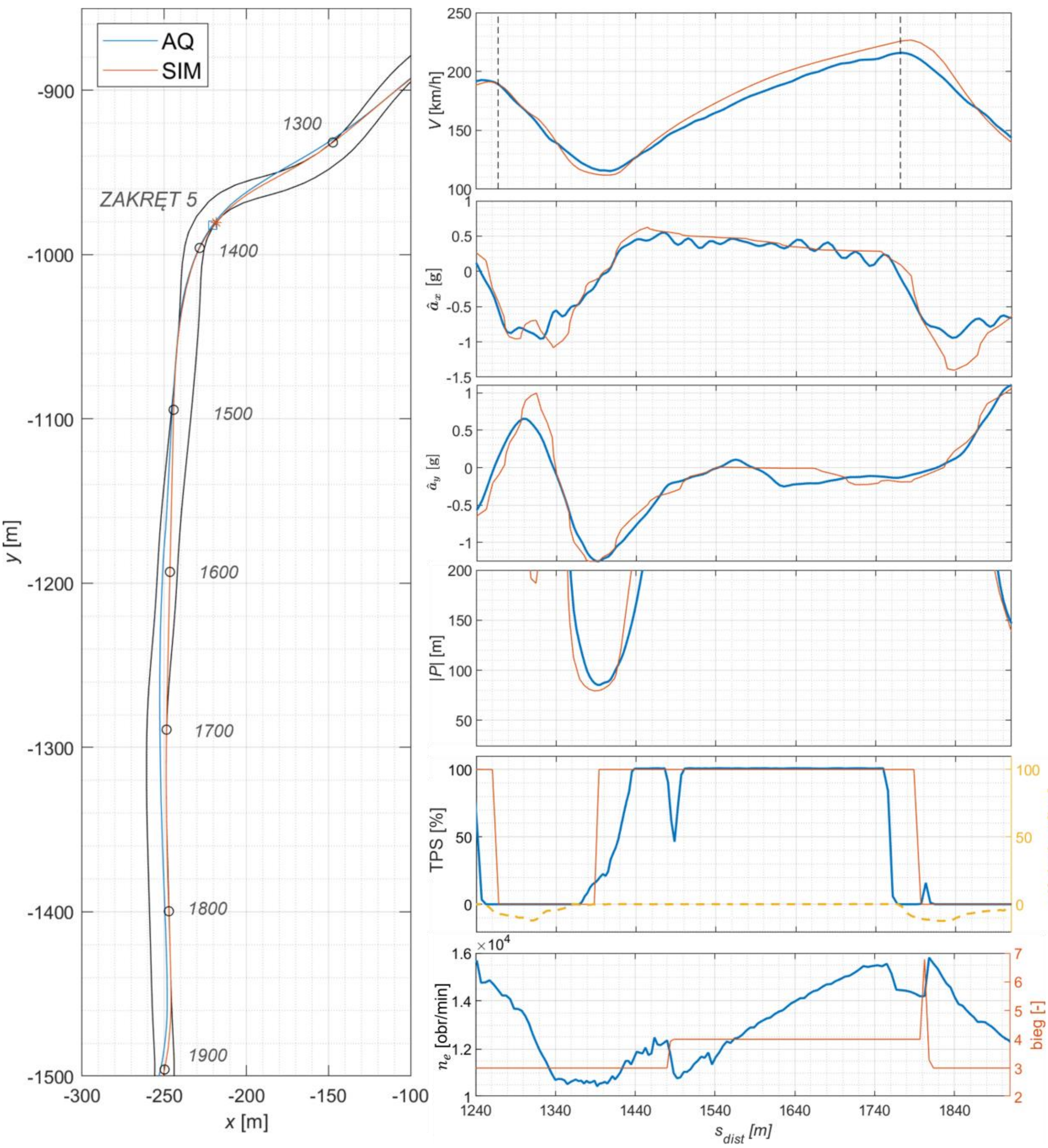
Analiza odcinka trasy pomiędzy zakrętami nr 5 i 6

W ostatnim przykładzie poświęconym analizie ruchu po torze Road Atlanta omówiony zostanie odcinek trasy pomiędzy zakrętami nr 5 i 6. Rozpatrywany fragment toru przedstawiony został po lewej stronie rys. 6.42, zaś po jego prawej stronie zamieszczono przebiegi: prędkości, przyspieszenia, modułu promienia krzywizny oraz wybranych informacji z systemu pomiarowego: prędkości obrotowej silnika, procentowego otwarcia przepustnicy (TPS) oraz wybranego biegu.

Motocykl SIM osiąga o 3.5 km/h mniejszą prędkość na zakręcie nr 5, lecz o ponad 10.5 km/h większą prędkość na końcu prostego odcinka trasy pomiędzy zakrętami nr 5 i 6. Różnica czasu między fragmentami toru oznaczonymi na wykresie prędkości pionowymi przerywanymi liniami wynosi 0.166 s na korzyść rozwiązania numerycznego.

Pojazdy poruszają się na zakręcie nr 5 z identycznym przyspieszeniem poprzecznym $\hat{a}_y = -1.25$ g, przy czym trajektoria motocykla SIM charakteryzuje się mniejszym promieniem krzywizny. Ponadto, ekstremum krzywizny trajektorii obserwowane jest 5 m wcześniej niż w przypadku trajektorii eksperymentalnej. Ekstrema krzywizny oznaczono na rys. 6.42 znacznikami w kształcie kwadratu (AQ) oraz gwiazdki (SIM).

Zarejestrowany eksperymentalnie przebieg otwierania przepustnicy jest charakterystyczny dla doświadczonego zawodnika sportu motocyklowego (równomierne otwieranie przepustnicy), zaś moment rozpoczęcia przyspieszania jest zgodny z wyznaczonym numerycznie. Pomimo tego maksymalne zarejestrowane dodatnie przyspieszenie $\hat{a}_x$ w fazie przyspieszania z zakrętu nr 5 jest mniejsze niż w manewrze optymalnym. Z charakterystyki trakcyjnej przedstawionej na rys. 6.29b wynika, że dla danej prędkości ruchu powinien zostać wykorzystany bieg drugi. Rzeczywisty kierowca korzystał zaś z biegu trzeciego. Mniejszy promień krzywizny trajektorii pojazdu SIM oraz mniejsza prędkość w szczycie łuku pozwala „symulowanemu kierowcy" na wcześniejsze wyprostowanie motocykla (zmniejszenie przyspieszenia poprzecznego) i wykorzystanie większej dostępnej siły napędowej. Na podstawie relacji internetowej z omawianego wyścigu można stwierdzić, że prowadzący wyścig rekordzista toru korzystał w omawianym fragmencie trasy z biegu drugiego.



Rys. 6.42. Zbliżenie na fragment toru obejmujący zakręt nr 5 oraz odcinek trasy między zakrętami 5 i 6 (po lewej). Przebiegi (po prawej): prędkości V, przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$, przyspieszenia poprzecznego $\hat{a}_y$, modułu promienia krzywizny |P|, procentowego otwarcia przepustnicy (TPS) i ciśnienia w układzie hamulcowym przedniego koła, prędkości obrotowej silnika oraz wybranego biegu

Kolejna strata czasowa na analizowanym odcinku trasy związana była ze zbyt wczesną zmianą biegu z trzeciego na czwarty w fazie przyspieszania z zakrętu nr 5. Kierowca zmienił bieg na szczycie wzniesienia, w momencie, w którym przednie koło traciło kontakt z jezdnią. Zmiana przełożenia odbyła się przy zbyt niskiej prędkości obrotowej silnika skutkując niepełnym wykorzystaniem charakterystyki trakcyjnej.

Błędny wybór biegu przed zakrętem nr 5 oraz nieodpowiedni moment zmiany przełożenia w skrzyni biegów w fazie przyspieszania z zakrętu nr 5 spowodowały zaobserwowaną na końcu prostego odcinka trasy różnicę prędkości wynoszącą blisko 11 km/h (w miejscu odpowiadającym położeniu drugiej przerywanej linii na górnym wykresie na rys. 6.42).

6.5.4. Czasochłonność rozwiązania pojedynczego zadania optymalizacji

W niniejszym rozdziale, ze względu na opis charakterystyk jezdni w funkcji współrzędnej krzywoliniowej s, zadanie sterowania optymalnego w programie GPOPS-II zostało zdefiniowane jako jednofazowe (podrozdział 3.3.4). W porównaniu do segmentowego opisu toru stosowanego w rozdziale 4, czas rozwiązania pojedynczego zadania optymalizacji dla dwuwymiarowego modelu jezdni zmalał w przybliżeniu dwukrotnie i zawierał się w przedziale między 100 a 150 s (dla analizowanych torów o pętli zamkniętej). Opis problemu za pomocą jednej fazy pozwolił na skrócenie czasu obliczeń, jednakże wydłużeniu uległ proces przygotowania modelu jezdni. Utrudnione było również tworzenie fikcyjnych scenariuszy testowych.

Czas rozwiązania pojedynczego zadania optymalizacji dla jezdni trójwymiarowej był ponad dziesięciokrotnie dłuższy niż w przypadku jezdni dwuwymiarowej. Wzrost czasu obliczeń związany był z brakiem możliwości wykorzystywania narzędzia ADiGator służącego do różniczkowania algorytmicznego (brak wsparcia dla procedury interpolacji funkcji o trzech lub więcej zmiennych).

6.6. Podsumowanie

We wstępie do rozdziału wyprowadzone zostały zależności kinematyczne charakteryzujące ruch pojazdu po trójwymiarowej jezdni oraz zaprezentowany został uogólniony na przypadek ruchu przestrzennego model pojazdu. Następnie omówiono wpływ geometrii jezdni na przebieg manewru optymalnego oraz przedstawiono rozbudowany przykład dla toru wyścigowego Road Atlanta, który wzbogacono o porównanie z danymi eksperymentalnymi.

Różnice pomiędzy manewrem optymalnym na dwu i trójwymiarowej jezdni zostały omówione na przykładzie fragmentu toru kartingowego w Starym Kisielinie. Zaobserwowano znaczącą różnicę czasu manewru, która wynikła z możliwości osiągnięcia większej prędkości na mocno nachylonych zakrętach. Wykazano ponadto, że maksymalna dopuszczalna przez diagram g-g-g wartość przyspieszenia poprzecznego zależy zarówno od pochylenia poprzecznego μ jezdni, jak i składnika $\widehat{\omega}_y V$.

Zaproponowane w niniejszej pracy modyfikacje w sformułowaniu ZSO w warunkach ruchu quasi-statycznego, polegające na uwzględnieniu:

- charakterystyki trakcyjnej,
- półempirycznego diagramu przyspieszeń g-g-g,
- uzależnionego od prędkości ruchu zbioru wartości dopuszczalnych zrywów,

pozwoliły na uzyskanie rezultatów numerycznych o wysokiej zgodności z pomiarami zarejestrowanymi w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu. Pomimo uproszczenia pojazdu do punktu materialnego, ograniczenia wprowadzone na wartości dopuszczalne zrywów pozwoliły na uwzględnienie cech wynikających z dynamiki układu oraz fizycznych uwarunkowań kierowcy. Ponadto, jak wykazano w ostatnim prezentowanym przykładzie obliczeniowym, wykorzystanie w procesie rekonstrukcji toru lokalnych numerycznych modeli terenu o wysokiej rozdzielczości pozwala na wierne odwzorowanie ruchu pojazdu po obiekcie wyścigowym o skomplikowanej i geometrycznie zróżnicowanej jezdni.

Sformułowane ZSO może znaleźć zastosowanie jako narzędzie wspomagające proces analizy danych. Możliwe było wskazanie fragmentów trasy, w których układ motocykl-kierowca dysponuje potencjałem na poprawę czasu, a także fragmentów, w których geometria jezdni umożliwia uzyskanie większych wartości przyspieszeń. Pomimo stosunkowo prostego modelu pojazdu możliwe było wskazanie obszarów toru o wysokim prawdopodobieństwie utraty kontaktu koła z jezdnią, co potwierdzono za pomocą pomiarów ugięcia zawieszenia oraz prędkości kół.

Sformułowane zadania: poszukiwania optymalnej trajektorii ruchu oraz numerycznego odwzorowania jezdni stanowią dodatkowe źródło informacji wspomagające proces zrozumienia i interpretacji pomiarów rejestrowanych w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu. Mogą być z powodzeniem traktowane jako wartościowy punkt odniesienia w analizie porównawczej, w szczególności, gdy nie są dostępne żadne inne dane referencyjne.

7. Analiza geometrii pojazdu w czasie ruchu

W niniejszym rozdziale podjęto próbę odpowiedzi na pytanie, czy w oparciu o rezultaty z ZSO możliwe jest wyciągnięcie wniosków na temat ustawień[31] pojazdu. Znajomość przebiegów czasowych ugięć elementów resorujących byłaby cenną informacją z punktu widzenia dostosowywania geometrii pojazdu oraz doboru ustawień zawieszenia do wymagań danego toru wyścigowego oraz preferencji kierowcy. W celu uzyskania odpowiedzi na postawione pytanie, zaprezentowany zostanie model drgań pojazdu jednośladowego, o trzech stopniach swobody, którego równania ruchu wyprowadzone zostaną za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju, natomiast obciążeniami działającymi na modelowany pojazd będą siły oraz momenty określone na podstawie jego przyspieszeń. Za pomocą zaproponowanego modelu drgań oszacowane zostaną ugięcia zawieszenia jednośladowych pojazdów wyścigowych, które następnie zostaną porównane z badaniami drogowymi.

W prezentowanych w dalszej części rozdziału rozważaniach wykorzystywany będzie termin "ugięcie elementu sprężystego". Przyjęto umownie, że termin ten oznaczać będzie deformację spowodowaną wyłącznie działającym na element sprężysty obciążeniem, abstrahując od wartości napięcia wstępnego.

Opis geometrii pojazdu jednośladowego, nieliniowych charakterystyk elementów resorująco-tłumiących oraz układów dźwigniowych stosowanych w zawieszeniu tylnego koła, przywoływany w dalszej części niniejszego rozdziału, zamieszczony został w załączniku B, w którym zaprezentowano również opis autorskiej aplikacji do zarządzania procesem modyfikacji geometrii pojazdów jednośladowych.

7.1. Model drgań pojazdu jednośladowego

Względem budowanego modelu numerycznego zostały sformułowane następujące oczekiwania:

- wynikiem obliczeń będzie przebieg czasowy ugięcia zawieszenia,
- do przeprowadzenia obliczeń wystarczająca będzie znajomość prędkości początkowej pojazdu oraz jego przyspieszeń (z ZSO lub zarejestrowanych eksperymentalnie),

[31] Pojęcie „ustawienie pojazdu" związane jest geometrią pojazdu oraz charakterystykami elementów resorująco-tłumiących.

- uzyskana zostanie satysfakcjonująca zgodność rezultatów z referencyjnymi danymi eksperymentalnymi,
- czas obliczeń dla pojedynczego okrążenia toru wyścigowego nie przekroczy kilku minut.

Przyjęty model pojazdu jednośladowego przedstawiono na rys. 7.1 oraz 7.2. Składa się on z czterech ciał:

- głównego złożenia motocykla oraz kierowcy – ciało 1,
- złożenia wahacza (zawieszenia tylnego koła) – ciało 2,
- tylnego koła – ciało 3,
- komponentów masy nieresorowanej zawieszenia przedniego koła – ciało 4.

Położenie środków ciężkości ciał przedstawiono na rys. 7.2. Środek ciężkości czwartego ciała (koło przednie wraz z oponą, tarcza lub tarcze hamulcowe, zacisk lub zaciski, nogi ruchome widelca teleskopowego oraz błotnik przedniego koła) przyjęto dla uproszczenia w środku ciężkości przedniego koła. W modelu pominięto ugięcie sprężyste opon oraz zależność promienia opony od kąta przechyłu $\tilde{\varphi}$ motocykla. Drugie z przyjętych uproszczeń wynikało ze zredukowania przestrzennego ruchu pojazdu do ruchu płaskiego.

Wprowadzone na rys. 7.1 i 7.2 oznaczenia to:

- l_f – początkowa (maksymalna) długość odcinka |AF|,
- l_s – długość wahacza,
- l_m – długość ramy, mierzona od osi wahacza (punkt P) do linii widelca (punkt F),
- R_f – promień opony przedniej,
- R_r – promień opony tylnej,
- g_m^x i g_m^z – współrzędne środka ciężkości złożenia głównego w lokalnym układzie współrzędnych o wersorach $\mathbf{i}_m, \mathbf{k}_m$,
- g_s^x i g_s^z – współrzędne środka ciężkości złożenia wahacza w lokalnym układzie współrzędnych o wersorach $\mathbf{i}_s, \mathbf{k}_s$.

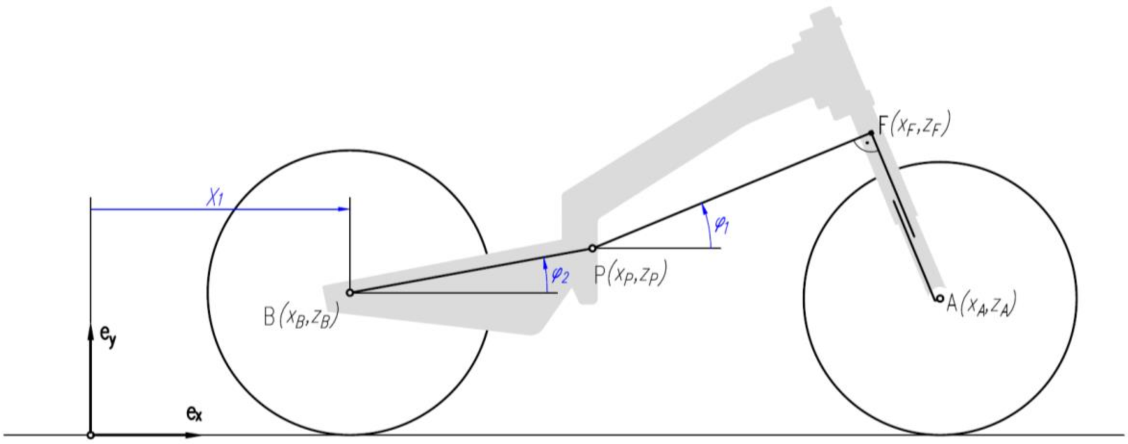
Odmierzane względem poziomu kąty φ_{10} (kąt nachylenia ramy) i φ_{20} (kąt nachylenia wahacza) charakteryzują geometrię pojazdu dla zerowej wartości ugięcia elementów resorujących.

7.1.1. Współrzędne uogólnione oraz energia kinetyczna modelu pojazdu

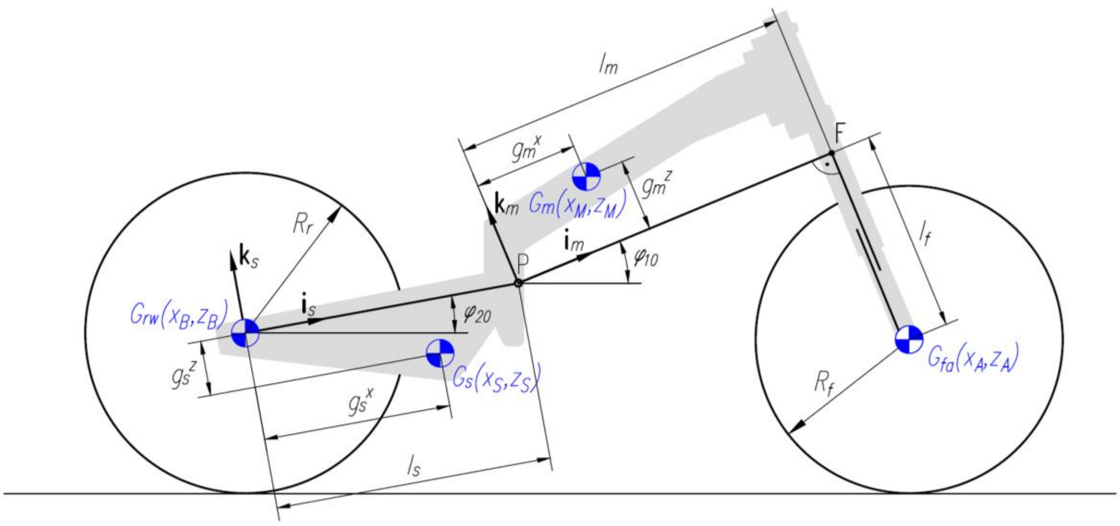
Równania ruchu układu z rys. 7.1 i 7.2 zbudowane zostaną za pomocą równań Lagrange’a II rodzaju, które przedstawić można ogólną zależnością

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial E_k}{\partial q_j}=Q_j,\quad (j=1,\dots,k), \tag{7.1}$$

gdzie E_k jest energią kinetyczną układu, q_j – współrzędną uogólnioną, Q_j – siłą uogólnioną, zaś k jest liczbą stopni swobody układu (liczbą współrzędnych uogólnionych).



Rys. 7.1. Model pojazdu jednośladowego o trzech stopniach swobody



Rys. 7.2. Położenie środków ciężkości ciał

Przyjęty model pojazdu opisano za pomocą następujących współrzędnych uogólnionych:

- $q_1 = x_1$ – przemieszczenie pojazdu wzdłuż wersora $\mathbf{e}_x$ nieruchomego układu współrzędnych,
- $q_2 = \varphi_1$ – kąt nachylenia ramy do podłoża,
- $q_3 = \varphi_2$ – kąt nachylenia wahacza do podłoża.

Energię kinetyczną ciał układu wyznaczono za pomocą twierdzenia Königa, zgodnie z którym energia kinetyczna ciała sztywnego równa jest sumie energii kinetycznej w ruchu postępowym środka masy ciała oraz energii kinetycznej w ruchu obrotowym ciała wokół jego środka masy. Twierdzenie Königa może zostać zapisane za pomocą ogólnej zależności

$$E_k = \frac{1}{2} m_c v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2, \tag{7.2}$$

w której m_c jest masą bryły, v_c – prędkością środka masy, ω – prędkością kątową bryły, zaś J_c jest momentem bezwładności ciała sztywnego względem osi równoległej do wektora prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ przechodzącej przez środek masy ciała.

Sformułowana za pomocą równania (7.2) energia kinetyczna pierwszego ciała przyjmuje postać

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2. \tag{7.3}$$

Prędkość kątowa ω_1 opisana jest zależnością $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$, zaś prędkość v_1 środka masy opisuje równanie

$$v_1 = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{z}_M^2}. \tag{7.4}$$

Wielkości $\dot{x}_M$ i $\dot{z}_M$ są odpowiednio poziomą oraz pionową składową liniowej prędkości środka ciężkości G_m. Wyrażone za pomocą współrzędnych uogólnionych współrzędne punktu $G_m(x_M, z_M)$ przyjmują wartości

$$x_M = x_1 + g_m^x \cos\varphi_1 - g_m^z \sin\varphi_1 + l_s \cos\varphi_2, \tag{7.5}$$

$$z_M = R_r + g_m^x \sin\varphi_1 + g_m^z \cos\varphi_1 + l_s \sin\varphi_2. \tag{7.6}$$

Energię kinetyczną złożenia wahacza opisuje zależność

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2, \tag{7.7}$$

w której $\omega_2 = \dot{\varphi}_2$ oraz $v_2 = \sqrt{\dot{x}_S + \dot{z}_S}$. Współrzędne środka ciężkości $G_S(x_S, z_S)$ wyrażone za pomocą współrzędnych uogólnionych opisane są zależnościami

$$x_S = x_1 + g_s^x \cos\varphi_2 - g_s^z \sin\varphi_2, \tag{7.8}$$

$$z_S = R_r + g_s^x \sin\varphi_2 + g_s^z \cos\varphi_2. \tag{7.9}$$

Energię kinetyczną tylnego koła przedstawia równanie

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2, \tag{7.10}$$

gdzie $v_3 = \dot{x}_1$. Przy założeniu zerowego poślizgu między oponą a nawierzchnią zależność na prędkość kątową tylnego koła przyjmuje postać

$$\omega_3 = \frac{v_3}{R_r} = \frac{\dot{x}_1}{R_r}. \tag{7.11}$$

Ciało czwarte posiada energię kinetyczną równą

$$E_{k_4} = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 + \frac{1}{2} J_4 \omega_4^2, \tag{7.12}$$

gdzie $v_4 = \dot{x}_A$. Ze względu na przyjęte uproszczenie dotyczące położenia środka ciężkości czwartego ciała, prędkość kątowa ω_4 może zostać zapisana jako $\dot{x}_A / R_f$, zaś J_4 jest momentem bezwładności przedniego koła (oraz elementów wraz z nim wirujących) określonym względem jego osi. Współrzędna prostokątna x_A opisująca położenie środka ciężkości $G_{fa}(x_A, z_A)$ może zostać zapisana zależnością

$$\begin{gathered} x_A = x_1 + l_m \cos\varphi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \left(l_m \sin\varphi_1 + l_s \sin\varphi_2 + R_r - R_f\right) + \\ + l_s \cos\varphi_2. \end{gathered} \tag{7.13}$$

Całkowita energia kinetyczna układu równa jest sumie energii kinetycznych wszystkich ciał i opisana jest równaniem

$$E_k = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_{k_4}. \tag{7.14}$$

Równania Lagrange'a II rodzaju dla modelowanego układu przyjmują postać

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_1} = Q_{x_1}, \tag{7.15}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}, \tag{7.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \frac{\partial E_k}{\partial \varphi_2} = Q_{\varphi_2}, \tag{7.17}$$

gdzie Q_{x_1}, Q_{φ_1} i Q_{φ_2} są siłami uogólnionymi związanymi z odpowiednimi współrzędnymi uogólnionymi.

7.2. Siły uogólnione

Na układ działają następujące siły i momenty czynne:

- siła grawitacji,
- siły aerodynamiczne,
- siły wzdłużne w punkcie styku kół z nawierzchnią,
- moment od siły obwodowej w łańcuchu.

Do sił czynnych zaliczono również siły wewnętrzne w połączeniach podatnych (siły sprężystości) oraz siły dyssypacyjne. Siły uogólnione Q_{x_1}, Q_{φ_1} i Q_{φ_2} wyznaczono nadając układowi przemieszczenia wirtualne, a następnie analizując związane z nimi prace wirtualne δL.

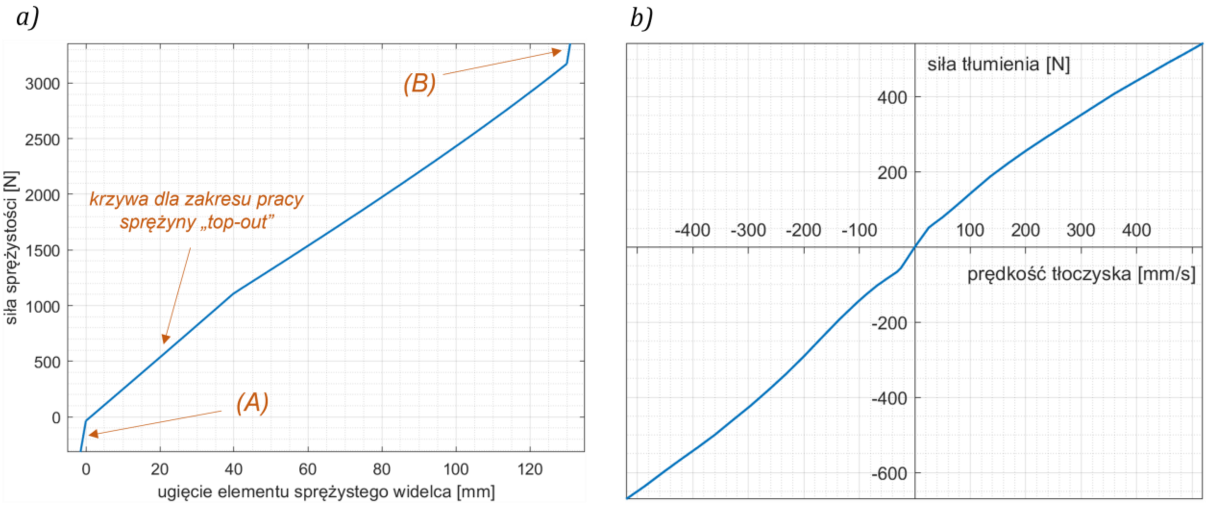
7.2.1. Siły sprężystości oraz siły dyssypacyjne

W pierwszym podejściu do modelowania zawieszenia przyjęto liniowy model sprężyny oraz model tłumienia wiskotycznego. Siły potencjalne (sprężystości) wprowadzono do układu za pomocą pochodnych cząstkowych energii potencjalnej, zaś siły dyssypacyjne za pomocą pochodnych cząstkowych potencjału dyssypacyjnego (dyssypacyjnej funkcji Rayleigha). Uzyskane rezultaty obliczeń były jednak dalekie od oczekiwanych.

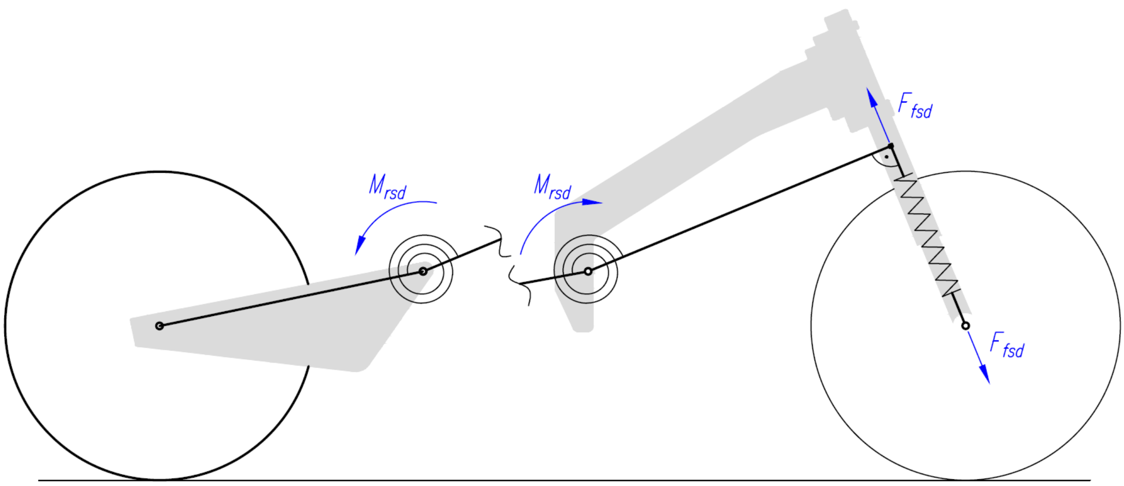
W rzeczywistości, pomimo stosowania liniowych sprężyn śrubowych, wypadkowa siła sprężystości elementu resorująco-tłumiącego jest w ogólnym przypadku nieliniowa - rys. 7.3a (powody nieliniowości siły sprężystości zostały omówione w załączniku B). Nieliniowa jest również charakterystyka tłumienia (rys. 7.3b), współczynnik tłumienia jest funkcją prędkości oraz kierunku ruchu tłoczyska. Z tego też względu charakterystyki rzeczywistych elementów resorująco-tłumiących stablicowano, uzależniając wartości sił od odpowiednich wielkości wyrażonych za pomocą współrzędnych uogólnionych. Następnie, siły sprężystości oraz dyssypacyjne wprowadzono do układu jako kolejny składnik sił uogólnionych.

Zawieszenie przedniego koła

Zawieszenie przedniego koła modelowanego pojazdu to tradycyjny widelec teleskopowy. Siła sprężystości oraz siła dyssypacyjna zostały wprowadzone do układu jako para przeciwnie skierowanych sił oznaczonych na rys. 7.4 symbolem F_{fsd}. Siła F_{fsd} jest sumą siły sprężystości F_{fs} oraz siły dyssypacyjnej F_{fd}.



Rys. 7.3. Przykładowy przebieg siły sprężystości (a) oraz siły tłumienia (b) w zawieszeniu przedniego koła



Rys. 7.4. Siły oraz momenty od elementów resorujących w zawieszeniu przedniego oraz tylnego koła. Zwroty przedstawionych na rysunku sił odpowiadają dodatniej wartości ugięcia u_f oraz kąta skręcenia φ_{rs}

Siła sprężystości F_{fs} została uzależniona od ugięcia u_f przedniego elementu sprężystego, zaś siła dyssypacyjna F_{fd} od prędkości $\dot{u}_f$. Ugięcie u_f opisuje zależność

$$u_f = l_f - \frac{R_r - R_f + l_m \sin\varphi_1 + l_s \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1}, \tag{7.18}$$

przedstawiająca różnicę między początkową (l_f) a chwilową długością odcinka |AF| przedstawionego na rys. 7.1.

Wykresy stablicowanych sił F_{fs} i F_{fd} przedstawiono na rys. 7.3. Stromo nachylone krzywe oznaczone na rys. 7.3a literami „A" i „B" zostały wprowadzone w celu ograniczenia skoku zawieszenia do rzeczywistych wartości.

Prace wirtualne poziomych oraz pionowych składowych siły F_{fsd} zostały zestawione w tabeli 7.1. Współrzędne punktu $F(x_F, z_F)$ opisane są zależnościami

$$x_F = x_1 + l_m \cos\varphi_1 + l_s \cos\varphi_2, \tag{7.19}$$

$$z_F = R_r + l_m \sin\varphi_1 + l_s \sin\varphi_2. \tag{7.20}$$

Zawieszenie tylnego koła

Zawieszenie tylnego koła może zostać zastąpione sprężyną kołową. Zamieszczony na rys. 7.4 moment M_{rsd} jest sumą momentu M_{rs} charakteryzującego sprężystość zawieszenia oraz momentu M_{rd} związanego z tłumieniem.

Względny ruch ciał (ramy i wahacza) powoduje skręcenie sprężyny kołowej. Ze skręceniem sprężyny związana jest para momentów M_{rs} o takich samym wartościach, lecz o przeciwnym znakach. Momenty M_{rs} są momentami swobodnymi przyłożonymi do złożenia głównego oraz złożenia wahacza w sposób przedstawiony na rys. 7.4. Moment M_{rs} zależy od kąta skręcenia sprężyny kołowej φ_{rs}, który opisany jest równaniem

$$\varphi_{rs} = \varphi_1 - \varphi_{10} + \varphi_{20} - \varphi_2. \tag{7.21}$$

Przedstawiona na rys. 7.5a zależność momentu M_{rs} od kąta skręcenia sprężyny kołowej φ_{rs} może zostać wyznaczona na podstawie charakterystyk zawieszenia przedstawionych na rys. B.6 w załączniku B. Wprowadzone na rys. 7.5a krzywe (oznaczone literami „A" i „B") ograniczają wartość kąta skręcenia φ_{rs} do dopuszczalnego w rzeczywistości zakresu wartości.

Tabela 7.1. Praca wirtualna siły sprężystości oraz dyssypacyjnej w zawieszeniu przedniego koła

Składowa siły oraz punkt przyłożenia	Praca wirtualna
Pozioma składowa siły F_{fsd} przyłożona w punkcie F	$\delta L_1 = -F_{fsd} \sin\varphi_1 \, \delta x_F$
Pionowa składowa siły F_{fsd} przyłożona w punkcie F	$\delta L_2 = F_{fsd} \cos\varphi_1 \, \delta z_F$
Pozioma składowa siły F_{fsd} przyłożona w punkcie A	$\delta L_3 = F_{fsd} \sin\varphi_1 \, \delta x_A$
Pionowa składowa siły F_{fsd} przyłożona w punkcie A	$\delta L_1 = -F_{fsd} \cos\varphi_1 \, \delta z_A = 0$

Tłumienie w układzie reprezentowane jest przez parę momentów M_{rd} o tej samej wartości, lecz o przeciwnych znakach. Moment M_{rd} zależy od prędkości tłoczyska amortyzatora oraz chwilowego położenia wahacza względem ramy nośnej i może zostać opisany dwuwymiarową tablicą wartości, której graficzną reprezentację przedstawiono na rys. 7.5b.

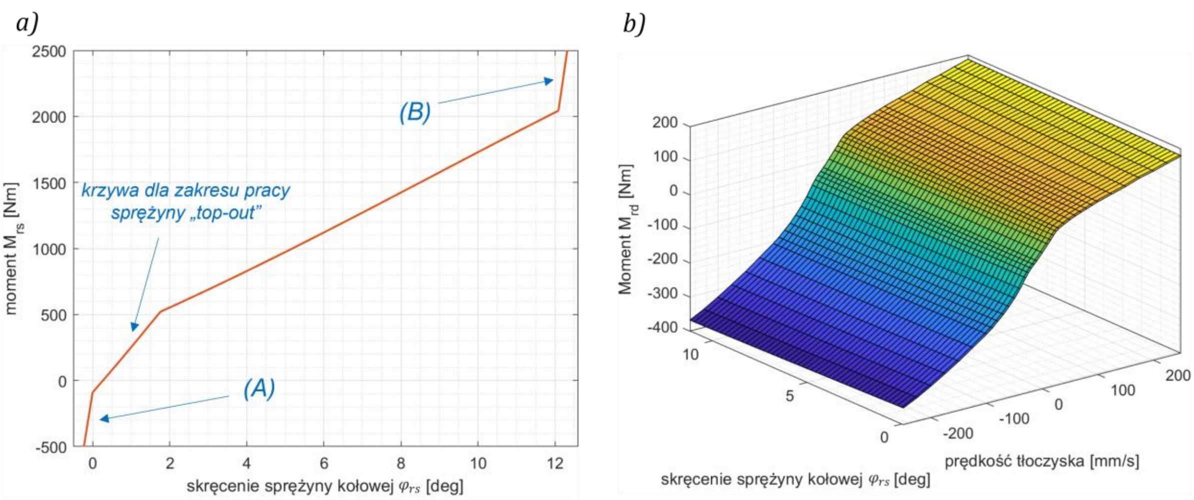
Praca wirtualna momentu M_{rsd} opisana jest zależnością

$$\delta L_5 = -M_{rsd}\delta\varphi_1 + M_{rsd}\delta\varphi_2. \tag{7.22}$$

7.2.2. Siła ciężkości oraz siła odśrodkowa

Obciążenie od sił ciężkości oraz sił odśrodkowych zostało wyznaczone za pomocą równań (6.26), (6.27) i (6.31). Na każde z ciał działa pozorna siła ciężkości $m\tilde{g}$, gdzie $\tilde{g}$ opisane jest zależnością (6.49). Równania (6.26), (6.27), (6.31) oraz pozorna grawitacja $\tilde{g}$ pozwalają uwzględnić w prowadzonych obliczeniach przestrzenny model jezdni.

Na rys. 7.6a przedstawiono motocykl poruszający się z pewnym niezerowym przyspieszeniem poprzecznym $\tilde{a}_y$. Siłą obciążającą zawieszenie pojazdu jest wypadkowa



Rys. 7.5. Przykładowy przebieg momentu M_{rs} (a) oraz momentu związanego z tłumieniem M_{rd} w zawieszeniu tylnego koła (b)

pozornej siły grawitacji $m\tilde{g}$ oraz siły $m\tilde{a}_y$ o wartości $m\tilde{g}/\cos\tilde{\varphi}$. Praca wirtualna sił $m_1\tilde{g}$ oraz $m_1\tilde{a}_y$ przyłożonych w środku ciężkości pierwszego ciała opisana jest zależnością

$$\delta L_6 = -\frac{m_1\tilde{g}}{\cos\tilde{\varphi}}\delta z_M. \tag{7.23}$$

Analogiczną zależność sformułowaną dla złożenia wahacza przedstawia równanie

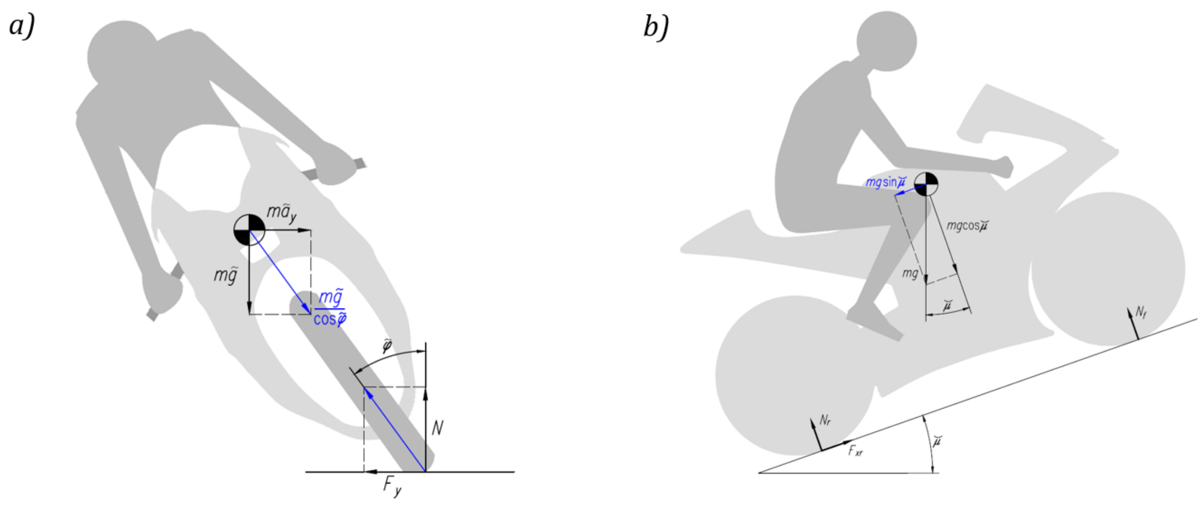
$$\delta L_7 = -\frac{m_2\tilde{g}}{\cos\tilde{\varphi}}\delta z_S. \tag{7.24}$$

W przypadku trzeciego oraz czwartego ciała układu, praca wirtualna wymienionych sił równa jest zeru, ponieważ ruch tych ciał odbywa się wyłącznie wzdłuż wersora $\mathbf{e}_x$ nieruchomego układu współrzędnych prostokątnych.

Rys. 7.6b przedstawia poruszający się ruchem jednostajnym pojazd na wzniesieniu o pewnym pochyleniu podłużnym

$$\breve{\mu} = -\operatorname{asin}(\cos\mu\sin\phi\sin\hat{\chi} - \sin\mu\cos\hat{\chi}) \tag{7.25}$$

będącym w ogólności kątem między wektorem prędkości V w przestrzennym ruchu pojazdu a jego rzutem na płaszczyznę horyzontalną. Na rys. 7.6b pominięto siłę oporu aerodynamicznego oraz opór toczenia. Zaznaczona siła ciężkości mg może zostać rozłożona na dwie składowe: prostopadłą oraz równoległą do płaszczyzny jezdni. Składowa prostopadła do płaszczyzny jezdni została uwzględniona w równaniach (7.23) i (7.24) za pomocą pozornej grawitacji $\tilde{g}$. Składową równoległą do płaszczyzny jezdni wprowadzono do układu za pomocą prac wirtualnych zestawionych w tabeli 7.2.



Rys. 7.6. Siły działające na motocykl: przechylony o pewien kąt $\tilde{\varphi}$ (a) oraz poruszający się ruchem jednostajnym na wzniesieniu o pochyleniu podłużnym $\breve{\mu}$ (b). Na rysunkach pominięto siły oporu toczenia oraz siłę oporu aerodynamicznego

Tabela 7.2. Praca wirtualna składowej siły ciężkości równoległej do płaszczyzny jezdni w ruchu po jezdni o niezerowym pochyleniu podłużnym $\breve{\mu}$

Ciało	Praca wirtualna
Złożenie główne	$\delta L_9 - m_1 \mathrm{g} \sin \breve{\mu}\, \delta x_M$
Złożenie wahacza	$\delta L_{10} = -m_2 \mathrm{g} \sin \breve{\mu}\, \delta x_S$
Tylne koło	$\delta L_{11} = -m_3 \mathrm{g} \sin \breve{\mu}\, \delta x_1$
Komponenty nieresorowane przedniego zawieszenia	$\delta L_{12} = -m_4 \mathrm{g} \sin \breve{\mu}\, \delta x_A$

7.2.3. Siły aerodynamiczne

W przyjętym modelu pojazdu oporami ruchu są:

- opór bezwładności – uwzględniony w równaniach Lagrange'a,
- opór wzniesienia – wprowadzony w podrozdziale 7.2.2,
- opór toczenia – omówiony w dalszej części rozprawy w podrozdziale 7.2.4,
- opór aerodynamiczny.

Za opór aerodynamiczny odpowiada siła F_d opisana równaniem (4.41). Na pojazd oddziałuje również siła nośna F_l opisana zależnością

$$F_l = \frac{1}{2} \rho_a C_l A V^2, \tag{7.26}$$

prostopadła do siły F_d i położona w płaszczyźnie symetrii pojazdu. Wielkość C_l oznacza współczynnik siły nośnej. Siły F_d i F_l przyłożone są w punkcie nazywanym środkiem ciśnienia.

Praca wirtualna siły oporu aerodynamicznego oraz siły nośnej opisana jest zależnością

$$\delta L_8 = -F_d \delta x_D + F_l \delta z_D, \tag{7.27}$$

gdzie δx_D i δz_D są wirtualnymi przyrostami współrzędnych prostokątnych opisujących położenie środka ciśnienia. Współrzędne x_D i z_D wyrażone są zależnościami (7.5) i (7.6), w których wielkości g_m^x i g_m^z należy zastąpić wielkościami $g_{m,d}^x$ i $g_{m,d}^z$.

7.2.4. Siły wzdłużne

Wzdłużne siły reakcji nawierzchni oddziałujące na przednie lub tylne koło pojazdu uzależnione są od fazy ruchu, w celu kontrolowania której wprowadzono wielkości γ_n i γ_h zdefiniowane jako

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{dla } F_x \geq 0, \\ 0 & \text{dla } F_x < 0, \end{cases} \tag{7.28}$$

$$\gamma_h = \begin{cases} 1 & \text{dla } F_x < 0, \\ 0 & \text{dla } F_x \geq 0, \end{cases} \tag{7.29}$$

w których

$$F_x = F_R - F_F = m\tilde{a}_x + F_{wr} + F_{wf} + F_d. \tag{7.30}$$

Zależność (7.30) powstała w wyniku przekształcenia równania (6.25).

Wielkość γ_n przyjmuje wartość 1 dla siły F_x większej lub równej zero. Wówczas na tylne koło pojazdu oddziałuje niezerowy moment napędowy. Wielkość γ_h przyjmuje wartość równą jedności, gdy siła F_x jest mniejsza od zera. Na któreś z kół pojazdu działa wówczas niezerowy moment hamujący.

Siła napędowa

Wzdłużna siła reakcji nawierzchni w trakcie rozpędzania (przyłożona w punkcie styku tylnego koła z jezdnią) opisana jest zależnością $F_{xr} = m\tilde{a}_x + F_{wf} + F_d$. Jej pracę wirtualną przedstawia równanie

$$\delta L_9 = (F_R\gamma_n - F_{wr})\delta_{x1} + R_r(F_R\gamma_n - F_{wr})\delta_{\varphi_2}, \tag{7.31}$$

w którym składnik $R_r(F_R\gamma_n - F_{wr})$ jest wartością momentu siły F_{xr} (rozłożonej zgodnie z równaniem (4.36) na dwa składniki: siłę napędową F_R działającą na tylne koło w fazie rozpędzania ($\gamma_n = 1$) oraz siłę oporu toczenia F_{wr} występującą w obydwu fazach ruchu), przeniesionej z punktu N do punktu B, względem jej pierwotnego punktu przyłożenia (punktu N).

W przypadku motocykli wyścigowych moment obrotowy pochodzący od wału zdawczego skrzyni biegów przenoszony jest na tylne koło za pomocą przekładni łańcuchowej. Siła obwodowa w łańcuchu wywołuje moment obrotowy względem osi wahacza, który wpływa na ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu tylnego koła. Wartość tego momentu wyznaczono na podstawie rys. 7.7, na którym przedstawiono schematyczną ilustrację przekładni łańcuchowej w motocyklu. Wprowadzono następujące niestosowane dotąd oznaczenia:

- η – kąt nachylenia prostoliniowej części łańcucha (względem poziomu),
- l_c – długość prostoliniowej części łańcucha,

- a_l – odległość w poziomie między osią obrotu wahacza, a osią obrotu koła łańcuchowego napędzającego,
- b_l – odległość w pionie między osią obrotu wahacza, a osią obrotu koła łańcuchowego napędzającego,
- h_{pc} – odległość w pionie między osiami obrotu kół łańcuchowych,
- r_c – promień koła łańcuchowego zamontowanego przy tylnym kole (koła łańcuchowego napędzanego),
- r_p – promień koła łańcuchowego zamontowanego na wale zdawczym skrzyni biegów (koła łańcuchowego napędzającego).

Wprowadzona na rysunku siła obwodowa T w łańcuchu wynosi

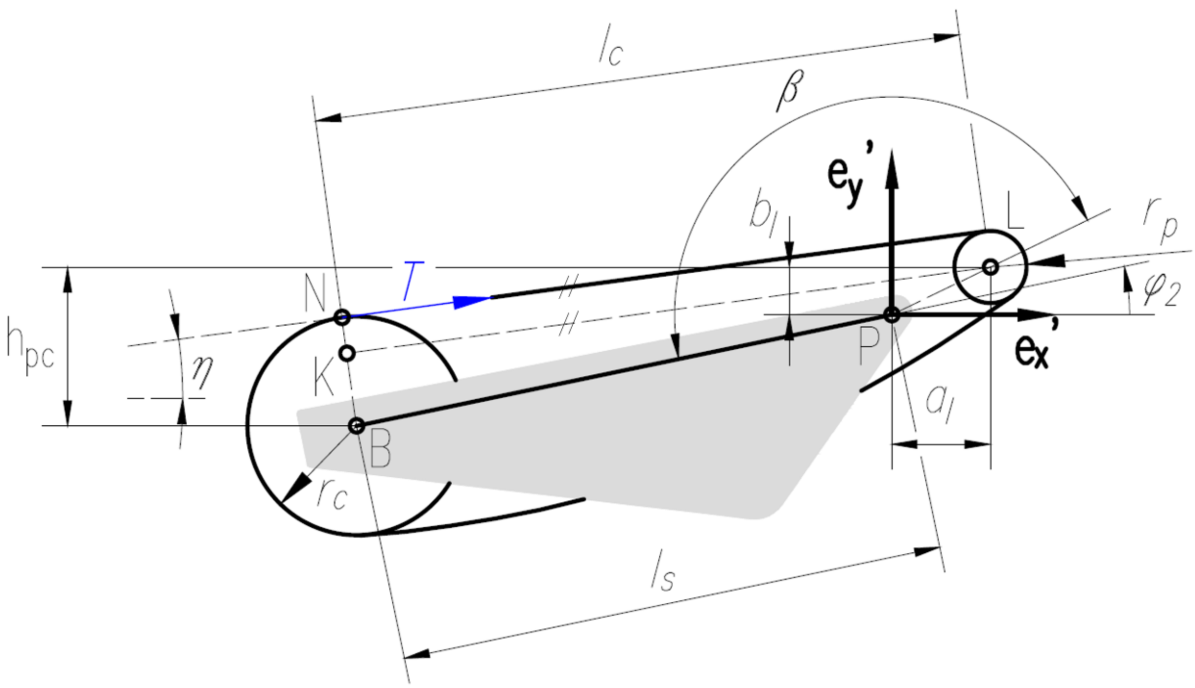
$$T = F_R \frac{R_r}{r_c}. \tag{7.32}$$

Moment siły T względem osi wahacza, oznaczony symbolem M_T, opisany jest zależnością

$$M_T = T(r_c - l_s \sin(\varphi_2 - \eta)). \tag{7.33}$$

Kąt η dany jest równaniem

$$\eta = \mathrm{asin}\left(\frac{h_{pc} - r_c + r_p}{l_c}\right), \tag{7.34}$$



Rys. 7.7. Model przekładni łańcuchowej w układzie napędowym motocykla

gdzie

$$h_{pc} = b_l + l_s \sin\varphi_2, \tag{7.35}$$

$$l_c = |\overline{\mathrm{KL}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{BL}}|^2 - \left(r_c - r_p\right)^2}. \tag{7.36}$$

Długość odcinka $|\overline{\mathrm{BL}}|$ wynosi

$$|\overline{\mathrm{BL}}| = \sqrt{a_l^2 + b_l^2 + l_s^2 - 2l_s\sqrt{a_l^2 + b_l^2}\cos\beta}, \tag{7.37}$$

gdzie

$$\beta = \pi - \mathrm{arctg}\left(\frac{b_l}{a_l}\right) + \varphi_2. \tag{7.38}$$

Odległości a_l i b_l określone są zależnościami

$$a_l = A_l\cos(\varphi_1 - \varphi_{10}) - B_l\sin(\varphi_1 - \varphi_{10}), \tag{7.39}$$

$$b_l = A_l\sin(\varphi_1 - \varphi_{10}) + B_l\cos(\varphi_1 - \varphi_{10}), \tag{7.40}$$

gdzie A_l i B_l są wielkościami a_l i b_l określonymi dla zerowego ugięcia elementów resorujących pojazdu.

Praca wirtualna momentu M_T wynosi

$$\delta L_{10} = M_T\gamma_n\delta\varphi_1 - M_T\gamma_n\delta\varphi_2. \tag{7.41}$$

Moment od siły obwodowej łańcucha obecny jest również w trakcie fazy hamowania, gdy przepustnica w układzie zasilania silnika jest zamknięta. W tym przypadku tylne koło napędza silnik pojazdu. Napięta jest wówczas dolna część łańcucha, a siła T jest przeciwnie skierowana.

Siła hamowania

W pierwszej kolejności omówiony zostanie przypadek hamowania hamulcem przedniego koła. Wzdłużna siła reakcji nawierzchni działająca na przednie koło opisana jest za pomocą zależności

$$F_{xf} = -m\tilde{a}_x - F_{wr} - F_d. \tag{7.42}$$

Praca wirtualna siły F_{xf}, składającej się z dwóch składników: siły hamowania $F_h = F_F$ oraz siły oporu toczenia F_{wf}, wyrażona jest relacją

$$\delta L_{11_A} = -(F_h \gamma_h + F_{wf})\delta x_A - R_f(F_h \gamma_h + F_{wf})\delta \varphi_1. \tag{7.43}$$

Dla przypadku hamowania obydwoma układami hamulcowymi należy przyjąć założenie dotyczące rozdziału siły hamowania. Można w tym celu zapisać relację między wzdłużnymi a pionowymi siłami reakcji nawierzchni

$$\frac{F_{xf}}{N_f} = -\frac{F_{xr}}{N_r}\lambda_h, \text{gdzie } \lambda_\mathrm{h} > 0. \tag{7.44}$$

Wprowadzony współczynnik λ_h umożliwia sterowanie stopniem wykorzystania układu hamulcowego tylnego koła (rozkładem siły hamowania) i jest równy jedności w przypadku hamowania optymalnego. Przekształcając równanie (7.44) można zapisać zależność

$$\frac{F_{xf}}{F_{xr}} = -\frac{N_f}{Nr}\lambda_h = -\alpha_h \lambda_h. \tag{7.45}$$

Współczynnik α_h opisuje stosunek normalnych reakcji nawierzchni i może zostać zapisany za pomocą równania

$$\alpha_h = -\frac{m\tilde{a}_x h + F_d h_p - mb\sqrt{\tilde{a}_y^2 + \tilde{g}^2}}{m\tilde{a}_x h + F_d h_p + m(w-b)\sqrt{\tilde{a}_y^2 + \tilde{g}^2}}. \tag{7.46}$$

Podstawiając zależność (7.45) do równania (6.25) otrzymywana jest zależność na wzdłużną siłę reakcji nawierzchni działającą na tylne koło

$$F_{xr} = \frac{m\tilde{a}_x + F_d}{1 + \alpha_h \lambda_h}. \tag{7.47}$$

Siła F_{xf} wyznaczona za pomocą równań (7.45) i (7.47) opisana jest zależnością

$$F_{xf} = -\frac{(m\tilde{a}_x + F_d)\alpha_h \lambda_h}{1 + \alpha_h \lambda_h}. \tag{7.48}$$

Równania (7.47) i (7.48) są prawdziwe dla $\alpha_h > 0$, czyli dla przyspieszeń $\tilde{a}_x$ spełniających warunek

$$\tilde{a}_x > -\frac{m(w-b)\sqrt{\tilde{a}_y^2 + \tilde{g}^2} + F_d h_p}{mh}. \tag{7.49}$$

Prace wirtualne wzdłużnych sił reakcji nawierzchni dane są za pomocą zależności

$$\delta L_{11_B} = F_R\gamma_h\delta x_1 + R_rF_R\gamma_h\delta\varphi_2 + \\ -\left(F_F\gamma_h + F_{wf}\right)\delta x_A - R_f\left(F_F\gamma_h + F_{wf}\right)\delta\varphi_1. \tag{7.50}$$

W zależności od przyjętej strategii hamowania, w zbiorczym równaniu prac wirtualnych znajdzie się równanie (7.43) lub (7.50). W równaniu (7.50) pominięty został opór toczenia F_{wr} ponieważ składnik ten jest już uwzględniony w zależności (7.31).

Należy w tym miejscu zauważyć, że przypadek hamowania za pomocą obydwu układów hamulcowych jest jedyną sytuacją, w której w zaproponowanym modelu drgań występuje konieczność wykorzystania modelu opony.

7.3. Schemat procesu obliczeniowego

Równania ruchu (7.15) – (7.17) zostały rozpisane za pomocą modułu do obliczeń symbolicznych Symbolic Math Toolbox dostępnego w dodatkach do oprogramowania MATLAB. W kolejnym kroku, otrzymany układ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu został przekształcony do układu równań różniczkowych pierwszego rzędu za pomocą funkcji *odeToVectorField*. Następnie, w celu zastosowania procedury numerycznego rozwiązywania układów równań różniczkowych (*ode45*) wyrażenia symboliczne zostały przekształcone do funkcji programu MATLAB za pomocą procedury *matlabFunction*.

W trakcie budowy modelu pojazdu podjęto decyzję o stworzeniu aplikacji z graficznym interfejsem użytkownika. Przedstawioną na rys. 7.8 aplikację utworzono za pomocą modułu MATLAB App Designer.

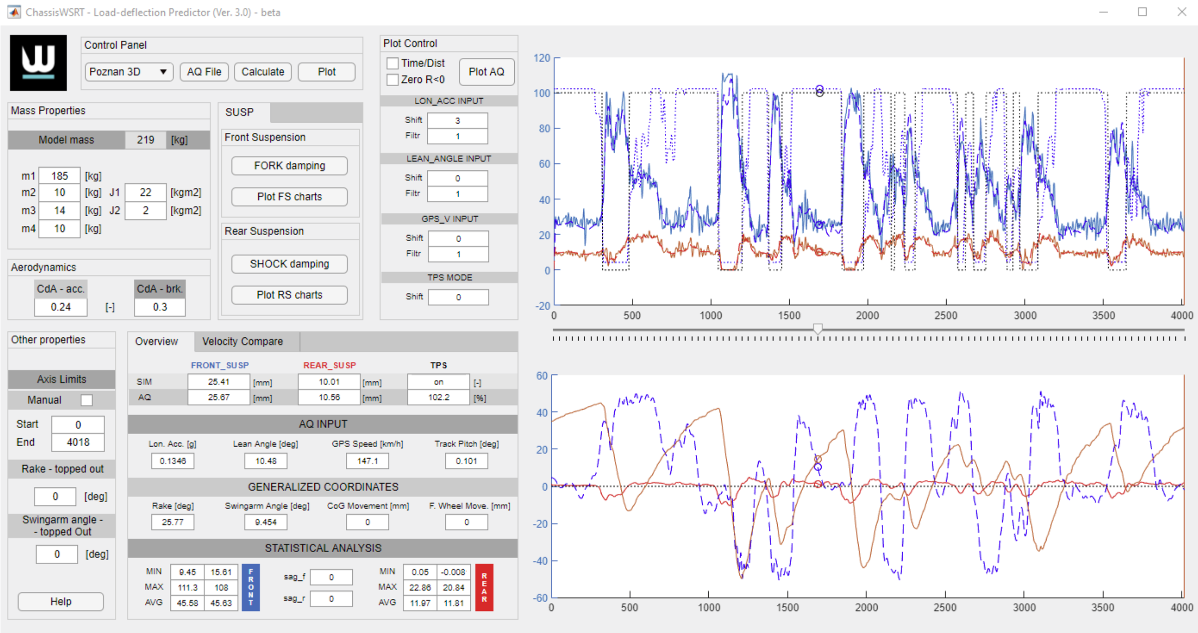
Po uruchomieniu aplikacji użytkownik jest proszony o:

- wskazanie pliku zawierającego informacje o charakterystykach jezdni,
- wskazanie pliku z przebiegami czasowymi przyspieszenia wzdłużnego $\hat{a}_x$ oraz przyspieszenia poprzecznego $\hat{a}_y$,
- podanie prędkości początkowej pojazdu,
- wczytanie charakterystyki tłumienia przedniego oraz tylnego amortyzatora.

Informacje o wymiarach geometrycznych motocykla przekazywane są automatycznie z aplikacji do zarządzania geometrią pojazdu opisanej w załączniku B.

Sprzęgnięcie modelu jezdni z danymi eksperymentalnymi wymaga przypisania każdemu punktowi trajektorii informacji o:

- charakterystykach jezdni odpowiadających najbliższemu punktowi na krzywej szkieletowej,



Rys. 7.8. Widok ekranu przedstawiający interfejs użytkownika aplikacji stworzonej do analizy ugięć elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu

- odległości pojazdu od krzywej szkieletowej (w kierunku prostopadłym do niej),
- odchyleniu trajektorii ruchu od krzywej szkieletowej (wyznaczenie kąta $\hat{\chi}$).

Następnie, na podstawie określonych wielkości wyznaczane są przyspieszenia $\tilde{a}_x, \tilde{a}_y$ oraz $\tilde{g}$.

Rezultatem obliczeń jest przebieg ugięcia elementów resorujących pojazdu, który może zostać wyświetlony w formie przebiegu czasowego lub w funkcji pokonanego dystansu.

7.4. Przykłady obliczeniowe

W prezentowanych dalej przykładach przyjęte zostały następujące uproszczenia:

- pominięto opór bezwładności brył będących w ruchu obrotowym (w równaniach (7.10) i (7.12) pominięto składnik opisujący energię kinetyczną w ruchu obrotowym),
- pominięto siłę nośną,
- pominięto ujemną wartość momentu napędowego silnika przy zamkniętej przepustnicy w układzie zasilania silnika.

Przyjęte uproszczenia miały na celu zachowanie spójności z modelem pojazdu wprowadzonym w rozdziałach 4 i 6.

Poprawność budowy modelu została zweryfikowana na drodze obliczeń analitycznych (załącznik C).

W dalszej części rozdziału zostaną zaprezentowane dwa przykłady obliczeniowe, w których rezultaty otrzymane za pomocą modelu zostaną porównane z badaniami drogowymi. Pierwszy z przykładów dotyczyć będzie ruchu motocykla klasy Supersport 300 po Torze Poznań, drugi natomiast będzie kontynuacją analizy ruchu motocykla klasy Supersport (600) po torze Road Atlanta. Charakterystyki analizowanych pojazdów zestawiono w tabeli 7.3. Momenty bezwładności ciał przyjęto na podstawie danych literaturowych [71]. Wartość współczynnika $C_d A$ oszacowano na podstawie maksymalnej prędkości pojazdu, zaś wysokość środka ciśnienia określono na podstawie analizy ugięcia elementów sprężystych w ruchu pojazdu na wprost (po prostej startowej toru).

7.4.1. Analiza porównawcza z badaniami jezdnymi – Tor Poznań

Badania drogowe na Torze Poznań zostały zrealizowane w trakcie IV rundy Motocyklowych Mistrzostw Polski odbywającej się w dniach 23-25.09.2022 r. Badanym pojazdem był motocykl Yamaha R3, zaś jego kierowcą ówczesny rekordzista Toru Poznań w klasie Supersport 300. Zamontowany w motocyklu pokładowy układ pomiarowy firmy 2D Datarecording umożliwiał pomiar:

- ugięcia elementów resorujących pojazdu,
- położenia (współrzędnych geograficznych),
- ciśnienia w układzie hamulcowym przedniego koła,
- procentowego otwarcia przepustnicy,
- prędkości kół,
- parametrów pracy silnika.

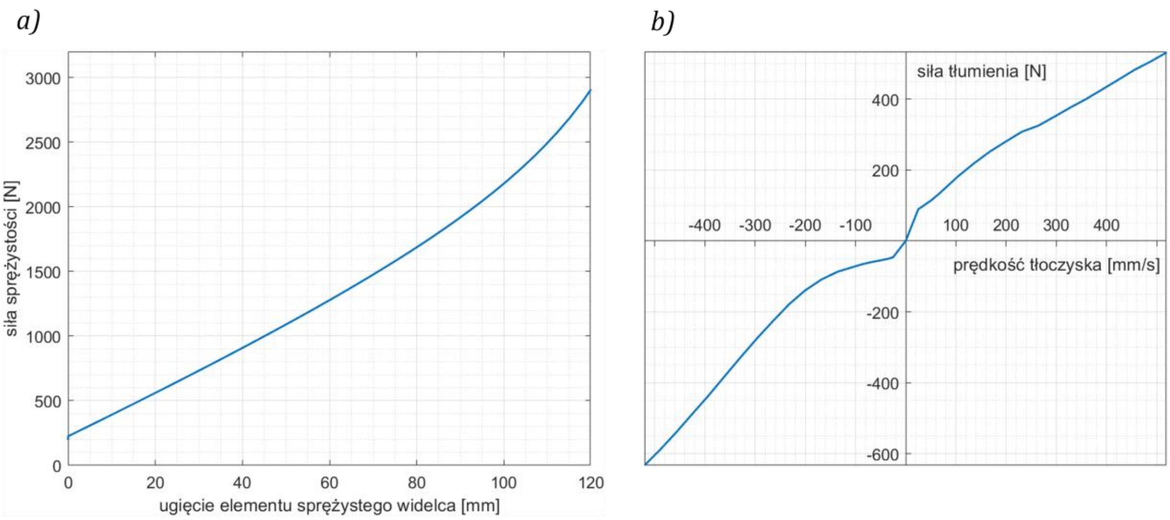
Charakterystyki tłumienia amortyzatorów (rys. 7.9 oraz 7.10) zostały zarejestrowane na specjalistycznym stanowisku badawczym przedstawionym na rys. 7.11, znajdującym się w pracowni LTD34[32] zajmującej się wyścigowymi zawieszeniami motocyklowymi.

Najlepszy czas okrążenia uzyskany w trakcie trwających trzy dni zawodów wyniósł 105.629 s. Okrążenie zostało osiągnięte w trakcie wyścigu, podczas którego zamontowana była kamera pokładowa. Jej obecność spowodowała zakłócenia odbioru danych satelitarnych, w wyniku czego otrzymano pomiary słabej jakości. Z tego względu jako okrążenie referencyjne wybrano okrążenie z kwalifikacji, które kierowca pokonał w czasie 106.488 s.

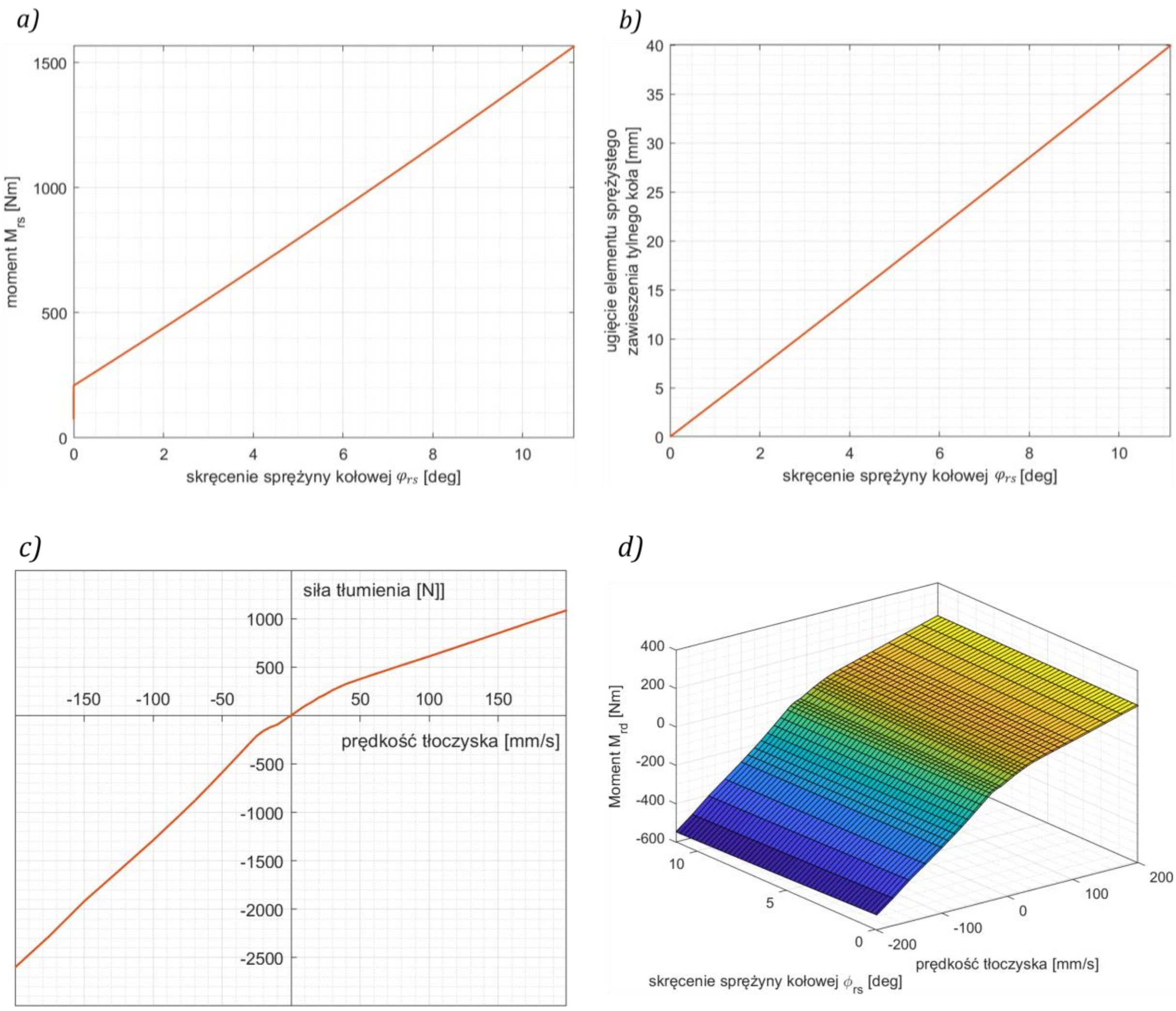
[32] Adres strony internetowej firmy Luka Technic Designs LTD34, URL: ltd34.pl [dostęp: 05.2023].

Tabela 7.3. Charakterystyki pojazdów Yamaha R3 oraz Yamaha R6 przyjęte w analizach

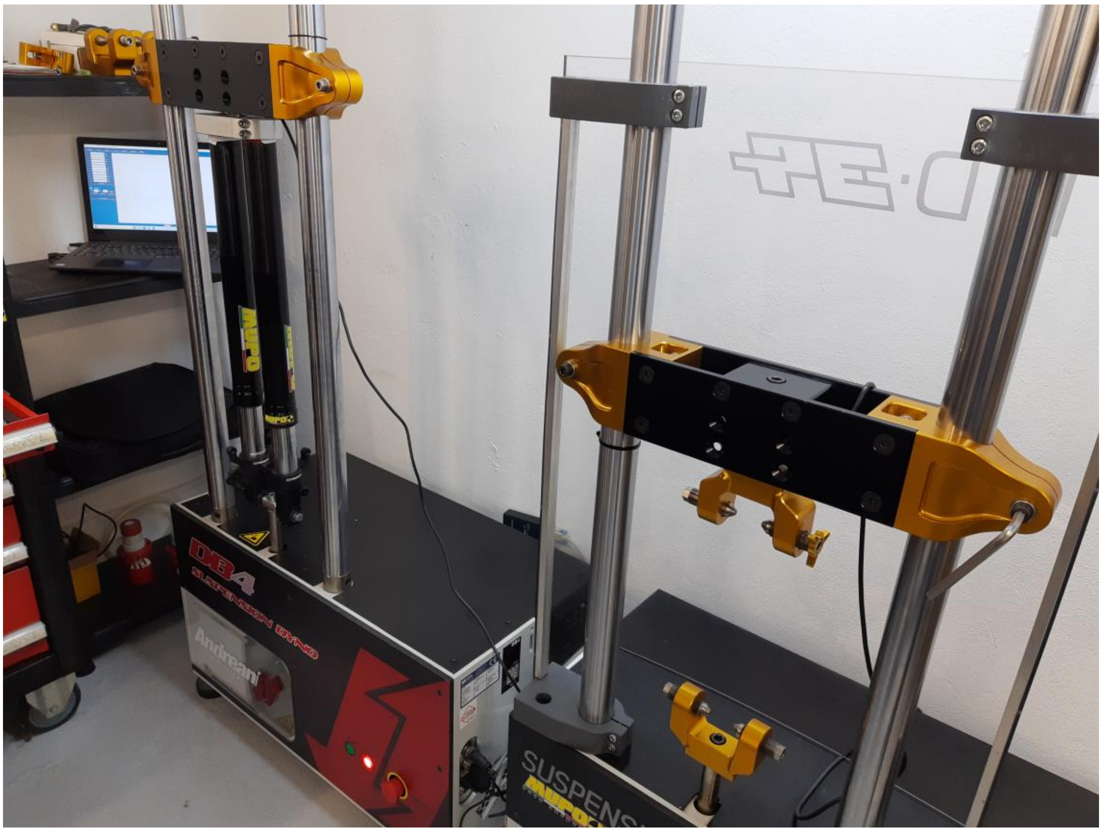
		Model	
Symbol	Charakterystyka	R3	R6
m_1	masa ciała 1 [kg]	185	213
m_2	masa ciała 2 [kg]	10	12
m_3	masa ciała 3 [kg]	14	16
m_4	masa ciała 4 [kg]	10	14
J_1	moment bezwładności ciała 1 [kgm^2]	24.0	26.2
J_2	moment bezwładności ciała 2 [kgm^2]	0.7	0.8
l_m	długość ramy [m]	0.685	0.698
l_s	długość wahacza [m]	0.591	0.580
l_f	początkowa długość odcinka $\|AF\|$ [m]	0.479	0.491
R_f	promień opony przedniej [m]	0.296	0.302
R_r	promień opony tylnej [m]	0.310	0.330
g_m^x	położenie środka ciężkości ciała 1 wzdłuż wersora $\mathbf{i}_m$ [m]	0.217	0.245
g_m^z	położenie środka ciężkości ciała 1 wzdłuż wersora $\mathbf{k}_m$ [m]	0.170	0.179
g_s^x	położenie środka ciężkości ciała 2 wzdłuż wersora $\mathbf{i}_s$ [m]	0.341	0.400
g_s^z	położenie środka ciężkości ciała 2 wzdłuż wersora $\mathbf{k}_s$ [m]	0.005	-0.095
$g_{m,d}^x$	położenie środka ciśnienia wzdłuż wersora $\mathbf{i}_m$ [m]	0.167	0.150
$g_{m,d}^z$	położenie środka ciśnienia wzdłuż wersora $\mathbf{k}_m$ [m]	0.134	0.142
A_l	początkowe poziome położenie osi koła łańcuchowego napędzającego względem osi obrotu wahacza [m]	0.080	0.090
B_l	początkowe pionowe położenie osi koła łańcuchowego napędzającego względem osi obrotu wahacza [m]	0.003	0.009
φ_{10}	początkowy kąt nachylenia ramy [°]	25.5	23.9
φ_{20}	początkowy kąt nachylenia wahacza [°]	12.1	13.7
r_p	promień koła łańcuchowego napędzającego [m]	0.037	0.041
r_c	promień koła łańcuchowego napędzanego [m]	0.111	0.116
C_dA	iloczyn współczynnika oporu aerodynamicznego oraz pola powierzchni czołowej [m^2]	0.26	0.28
ρ_a	gęstość powietrza [kg/m^3]	1.20	1.20
f_w	współczynnik oporu toczenia [-]	0.02	0.02



Rys. 7.9. Przebiegi: siły sprężystości (a) oraz siły tłumienia (b) charakteryzujące widelec teleskopowy motocykla Yamaha R3



Rys. 7.10. Charakterystyki zawieszenia tylnego koła motocykla Yamaha R3: przebieg momentu M_{rs} (a), ugięcie elementu sprężystego w funkcji skręcenia sprężyny kołowej (b), przebieg siły tłumienia w elemencie tłumiącym (c), przebieg momentu M_{rd} (d)

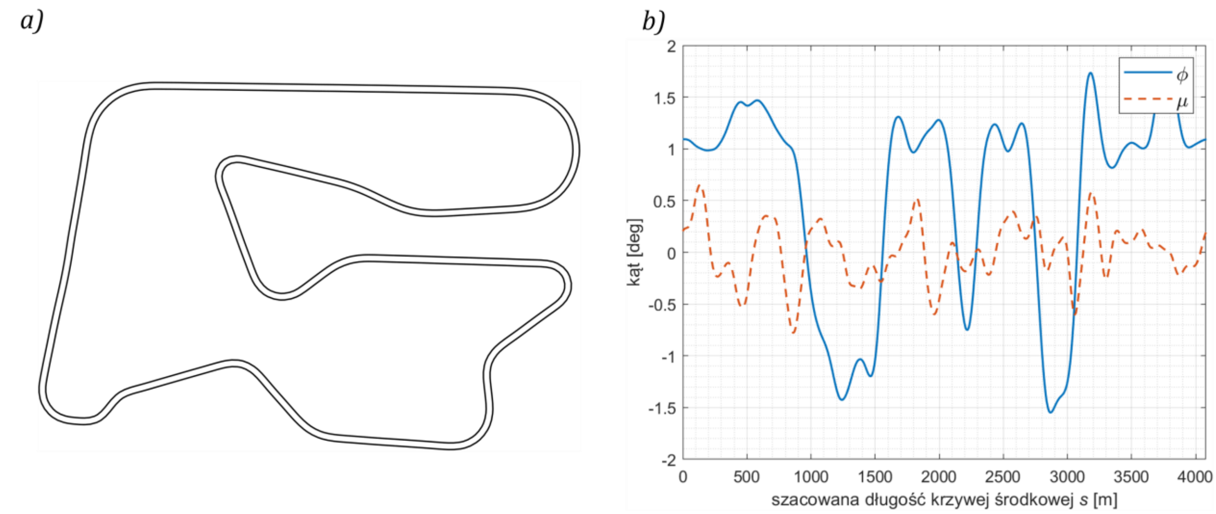


Rys. 7.11. Stanowisko badawcze charakterystyk elementów resorująco-tłumiących znajdujące się w siedzibie firmy Luka Technic Designs LTD34

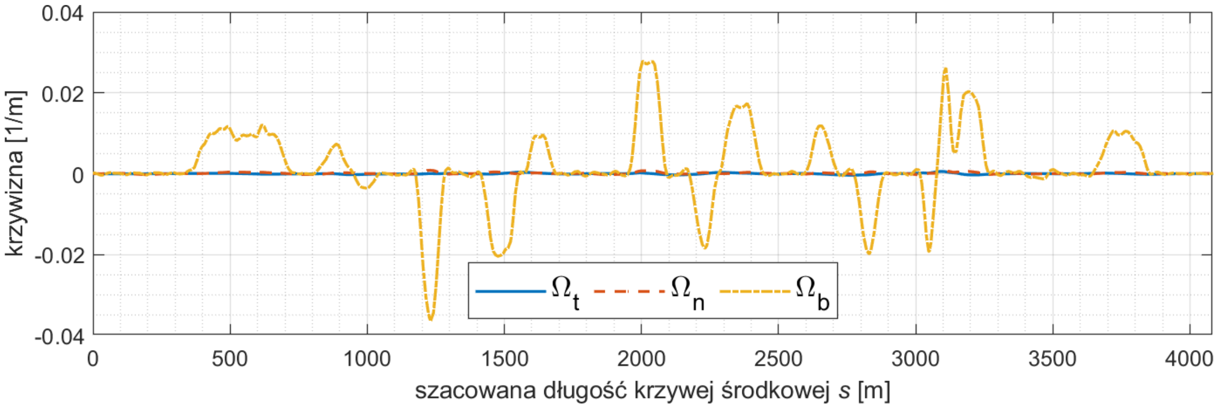
Minimalny czas okrążenia wyznaczony w ZSO wyniósł 105.588 s. W obliczeniach przyjęto trójwymiarowy model jezdni oraz hybrydowy diagram g-g. Przyjęte zostało także zgodne z rzeczywistością założenie o technice hamowania wyłącznie za pomocą układu hamulcowego przedniego koła. Mapę toru oraz charakterystyki jezdni przedstawiono na rys. 7.12 i 7.13. Eksperyment z „symulacją" porównano na rys. 7.14, na którym pokazano: prędkość pojazdu V, przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$ oraz przyspieszenie poprzeczne $\hat{a}_y$.

Wyniki otrzymane za pomocą modelu drgań zostały przedstawione na rys. 7.15 oraz 7.16. Rys. 7.15 przedstawia rezultat obliczeń dla danych wejściowych w postaci zarejestrowanych przyspieszeń rzeczywistego pojazdu, zaś rys. 7.16 dla przyspieszeń wyznaczonych w ZSO. Na obydwu rysunkach naniesione zostały ugięcia rzeczywistych elementów resorujących. Podstawowe wskaźniki charakteryzujące pracę zawieszenia zostały zestawione w tabeli 7.4.

Uzyskano bardzo dobra zgodność rezultatów numerycznych z pomiarami, zarówno pod względem zmienności krzywych jak i wartości obliczonych wskaźników. Dotyczy to w szczególności obliczeń, w których wymuszeniami były zarejestrowane w trakcie badań



Rys. 7.12. Mapa toru Poznań (a), pochylenie poprzeczne ϕ oraz podłużne μ charakteryzujące geometrię jezdni (b)

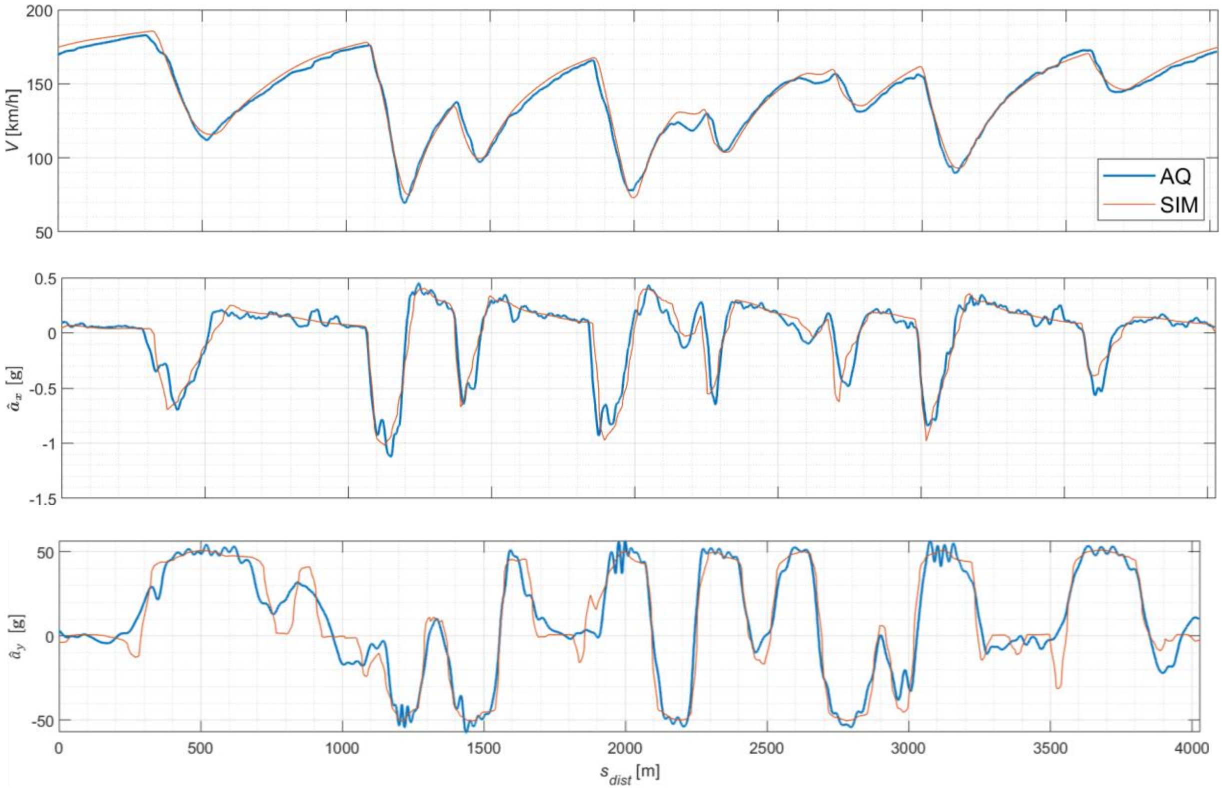


Rys. 7.13. Krzywizny jezdni Toru Poznań

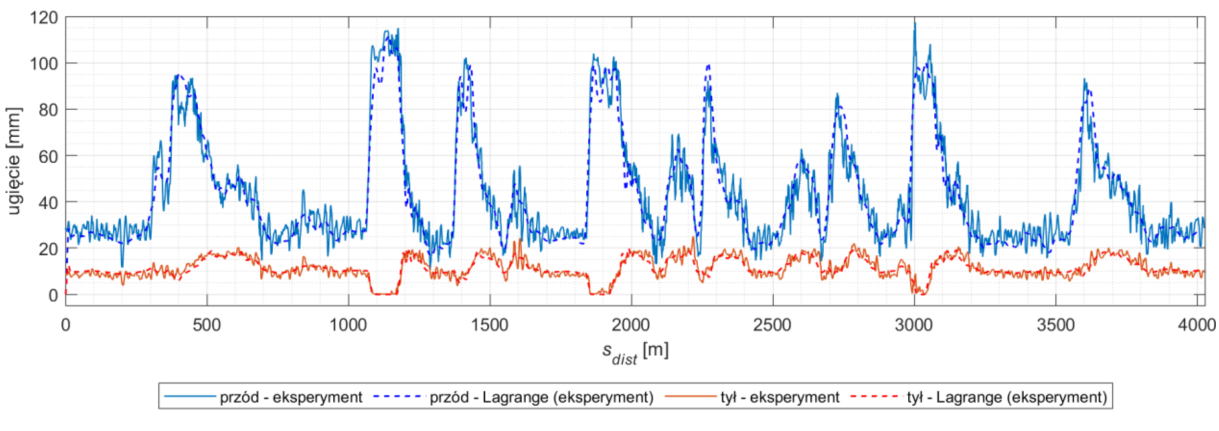
przyspieszenia. Rezultaty dla przyspieszeń z symulacji są zbliżone.

Porównanie rezultatów dla różnej sztywności sprężyn w zawieszeniu przedniego koła (7.5 N/mm oraz 8.0 N/mm w każdym teleskopie) przedstawiono na rys. 7.17. Zakres osi odciętych ograniczono do pierwszego zakrętu trasy. Modyfikacja sztywności zawieszenia spowodowała różnicę średniej wartości ugięcia równą w przybliżeniu 5 mm. Przedstawiony na rys. 7.17 przebieg wprowadzonej w podrozdziale 6.5.3 wielkości Γ pozwala na oszacowanie fazy ruchu pojazdu (przyspieszanie lub hamowanie).

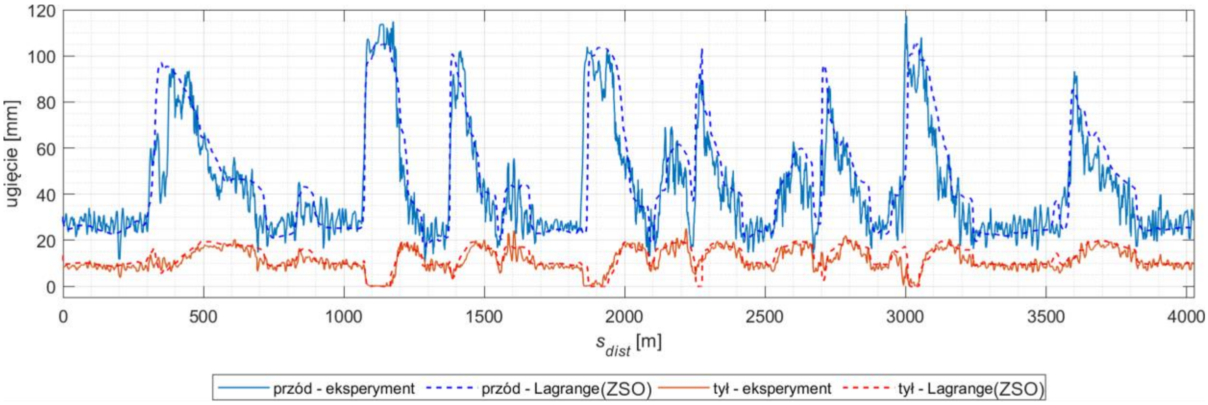
Znajomość ugięcia elementów resorujących pozwala na wyznaczenie przebiegów czasowych wybranych wielkości charakteryzujących geometrię pojazdu. Przykład takiej analizy, dokonanej za pomocą opisanej w załączniku B aplikacji do zarządzania geometrią pojazdów jednośladowych, zaprezentowano na rys. 7.18. Przedstawiono: kąt główki ramy, wyprzedzenie oraz kąt nachylenia wahacza względem płaszczyzny jezdni. Zamieszczone na rys. 7.18 krzywe dotyczą wyników obliczeń, w których:



Rys. 7.14. Porównanie badania drogowego z rezultatami z zadania sterowania optymalnego, w kolejności od górnego wykresu: prędkość V, przyspieszenie wzdłużne $\hat{a}_x$, przyspieszenie poprzeczne $\hat{a}_y$



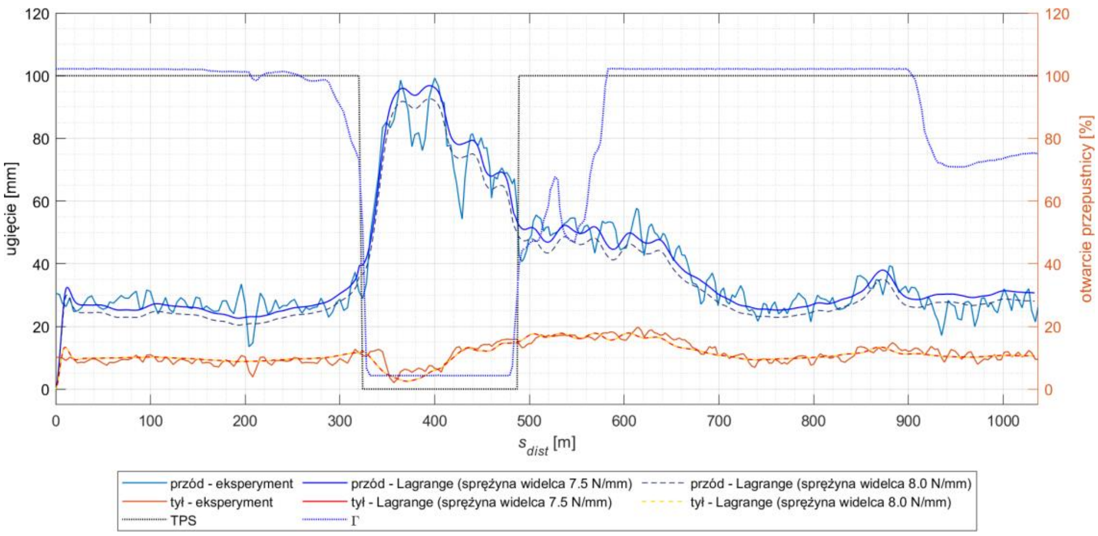
Rys. 7.15. Porównanie zarejestrowanych ugięć zawieszenia z wynikami otrzymanymi na podstawie modelu numerycznego. Rezultaty numeryczne otrzymane dla danych wejściowych będących przyspieszeniami rzeczywistego pojazdu



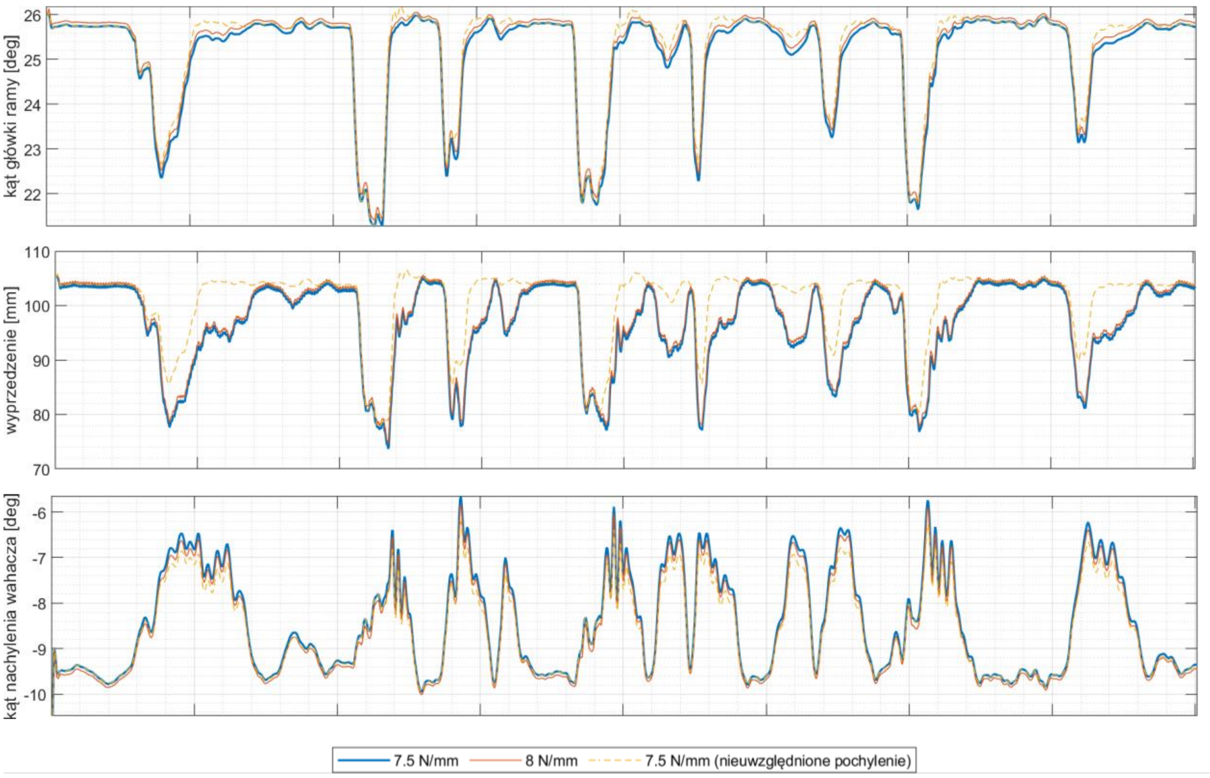
Rys. 7.16. Porównanie wyników otrzymanych na podstawie modelu numerycznego z pomiarami. Wykres sporządzony dla danych wejściowych w postaci przyspieszeń z rozwiązania zadania sterowania optymalnego

Tabela 7.4. Minimalne, maksymalne oraz średnie wartości ugięć elementów sprężystych. Wielkości wyrażone w milimetrach

	Badanie eksperymentalne		Model (przyspieszenia zarejestrowane eksperymentalnie)		Model (przyspieszenia z ZSO)	
	Przód	Tył	Przód	Tył	Przód	Tył
Min	10.25	0.08	16.49	-0.01	7.809	-0.08
Max	117.30	25.09	111.7	20.02	105.7	22.53
Średnia	44.52	11.83	44.66	11.57	47.79	13.01



Rys. 7.17. Ugięcia elementów sprężystych dla fragmentu trasy obejmującego pierwszy zakręt. Pomiary eksperymentalne oraz rezultaty numeryczne dla różnej sztywności sprężyn w widelcu teleskopowym



Rys. 7.18. Przebiegi zmian wielkości charakteryzujących geometrię pojazdu wyznaczone na podstawie przebiegów ugięć zawieszenia, w kolejności od górnego wykresu: kąt główki ramy, wyprzedzenie oraz kąt nachylenia wahacza względem poziomu

- uwzględniono przechylenie pojazdu $\tilde{\varphi}$ – pogrubiona linia ciągła w kolorze niebieskim,
- pominięto przechylenie pojazdu $\tilde{\varphi}$ – linia przerywana,
- zastosowano dane wejściowe (ugięcia elementów sprężystych) wyznaczone dla zmienionej sztywności elementu sprężystego w widelcu teleskopowym – linia cienka w kolorze pomarańczowym.

Pominięcie kąta przechylenia $\tilde{\varphi}$ powoduje znaczące różnice w rezultatach, w szczególności w przypadku wartości wyprzedzenia.

7.4.2. Analiza porównawcza z badaniami jezdnymi – tor Road Atlanta

W niniejszym przykładzie, będącym kontynuacją rozważań prowadzonych w podrozdziale 6.5, nie znano pełnej konfiguracji oraz specyfikacji pojazdu (w przeciwieństwie do przykładu z podrozdziału 7.4.1). Z tego też względu przyjęto szereg założeń, które oparto na doświadczeniu, dostępnej dokumentacji oraz informacjach ze strony internetowej kierowcy, na której udostępnione zostały prezentowane dane eksperymentalne [68].

Geometrię pojazdu określono na podstawie pomiarów przedstawionego na rys. 7.19 motocykla Yamaha R6. Przyjęte podczas budowy modelu pojazdu uproszczenia oraz założenia przedstawiają się następująco:

- długość wahacza oraz wysunięcie widelca teleskopowego ponad górną półkę kierownicy (w motocyklu amerykańskiego zawodnika) oszacowano na podstawie zdjęć z omawianej rundy wyścigowej,
- sztywność elementów podatnych zawieszenia ustalono na podstawie dokumentacji producenta zawieszenia,
- założono standardową długość elementu resorująco-tłumiącego w zawieszeniu tylnego koła.

Wykorzystane w obliczeniach numerycznych charakterystyki elementów resorująco-tłumiących (rys. 7.3 oraz 7.5) zostały przyjęte na podstawie badań przeprowadzonych na identycznych komponentach z wyszczególnionymi przez amerykańskiego zawodnika na jego stronie internetowej [68]. Pomiary charakterystyk (dla standardowych ustawień regulatorów tłumienia, wyszczególnionych w specyfikacji zawieszenia) zostały wykonane w siedzibie pracowni LTD34.

W trakcie pierwszej części analizy (podrozdział 6.5) zidentyfikowane zostały fragmenty trasy, w których pojazd z „symulacji" hamował z opóźnieniem większym niż pojazd rzeczywisty. Stwierdzono wówczas, że „symulowany kierowca" wykorzystywał zmiany pochylenia podłużnego jezdni (na odcinku trasy przypadającym na manewr hamowania) do uzyskania większej wartości opóźnienia.

Za pomocą zaproponowanego modelu drgań poddano weryfikacji możliwość hamowania z opóźnieniem wyznaczonym w ZSO. Rezultaty obliczeń zostały

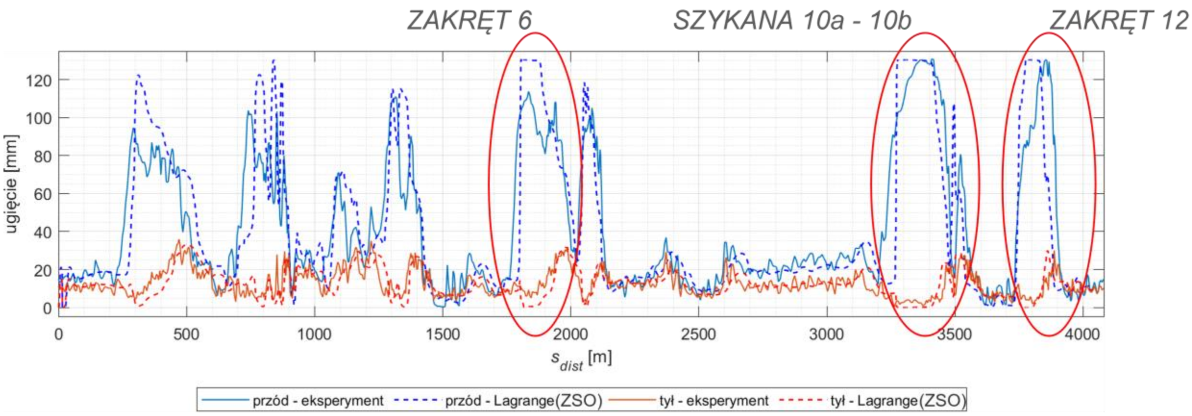
a) *b)*

Rys. 7.19. Motocykl Yamaha R6, na podstawie którego określono wielkości charakteryzujące geometrię pojazdu, przed (a) i w trakcie prac pomiarowych (b)

przedstawione na rys. 7.20. Z zaprezentowanych wykresów wynika, że w trakcie manewrów hamowania poprzedzających zidentyfikowane w podrozdziale 6.5 fragmenty trasy (zakręty nr: 6, 10a oraz 12) zostałaby osiągnięta maksymalna wartość ugięcia (wykorzystany skok zawieszenia[33]), a więc hamowanie z wyznaczonym w ZSO opóźnieniem byłoby niemożliwe (bez wprowadzenia zmian w ustawieniach pojazdu).

W trakcie jazdy rzeczywistym pojazdem maksymalna wartość ugięcia została osiągnięta dwukrotnie: w trakcie fazy hamowania przed zakrętem nr 10a (na odcinku między 3364. a 3416. metrem trasy) oraz w trakcie fazy hamowania przed zakrętem nr 12 (dla $s_{dist} = 3856$ m).

Na podstawie zaprezentowanych rezultatów oraz zamieszczonej w podrozdziale 6.5 analizy, można stwierdzić, że kierowca dysponował możliwością zwiększenia wartości opóźnienia w trakcie manewru hamowania przed zakrętem nr 6 oraz na początku manewrów hamowania przed zakrętami nr 10a oraz 12. Dla manewru hamowania poprzedzającego zakręt nr 6, maksymalne ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu przedniego koła było o 17 mm mniejsze od dopuszczalnego. W przypadku manewrów hamowania poprzedzających zakręty nr 10a oraz 12, maksymalna wartość ugięcia rejestrowana była dopiero po (odpowiednio) 160. i 118. metrze od rozpoczęcia fazy hamowania. Przesunięcie ekstremum ugięcia względem rezultatu numerycznego dla przyspieszeń z ZSO wynikało z nieprawidłowego przebiegu ciśnienia w układzie



Rys. 7.20. Porównanie ugięć elementów sprężystych motocykla Yamaha R6 poruszającego się po torze Road Atlanta. Przebiegi danych eksperymentalnych oraz wyznaczonych numerycznie dla danych wejściowych w postaci przyspieszeń wyznaczonych w zadaniu minimalizacji czasu manewru

[33] W przypadku wykorzystania skoku, zawieszenie traci zdolność do absorbowania nierówności nawierzchni, co zwiększa ryzyko utraty przyczepności.

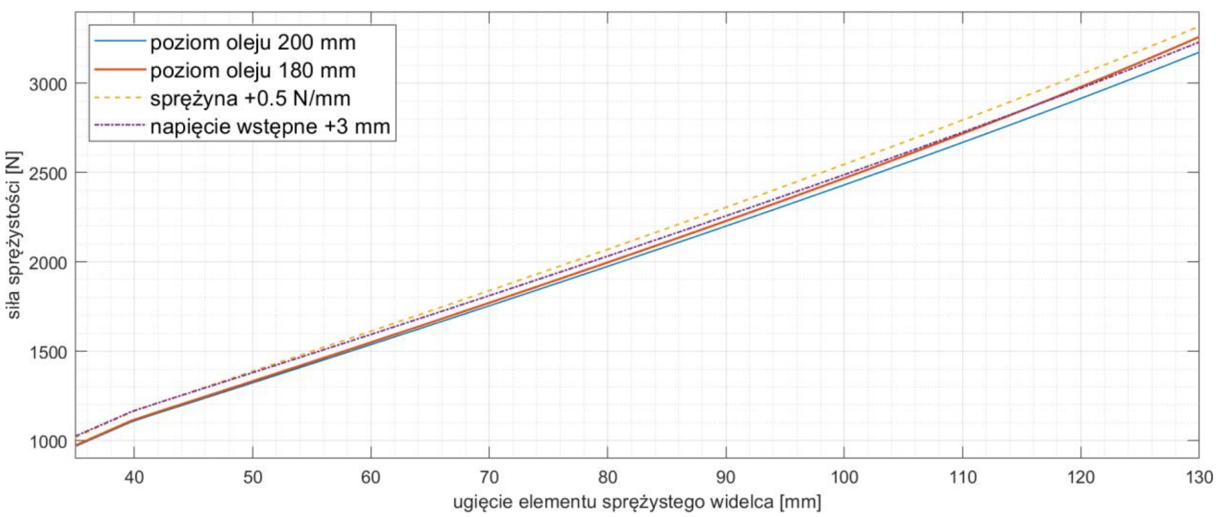
hamulcowym przedniego koła, co opisano szczegółowo w podrozdziale 6.5.3.

Zauważony problem polegający na osiągnięciu maksymalnej dopuszczalnej wartości ugięcia zawieszenia mógłby zostać rozwiązany za pomocą:

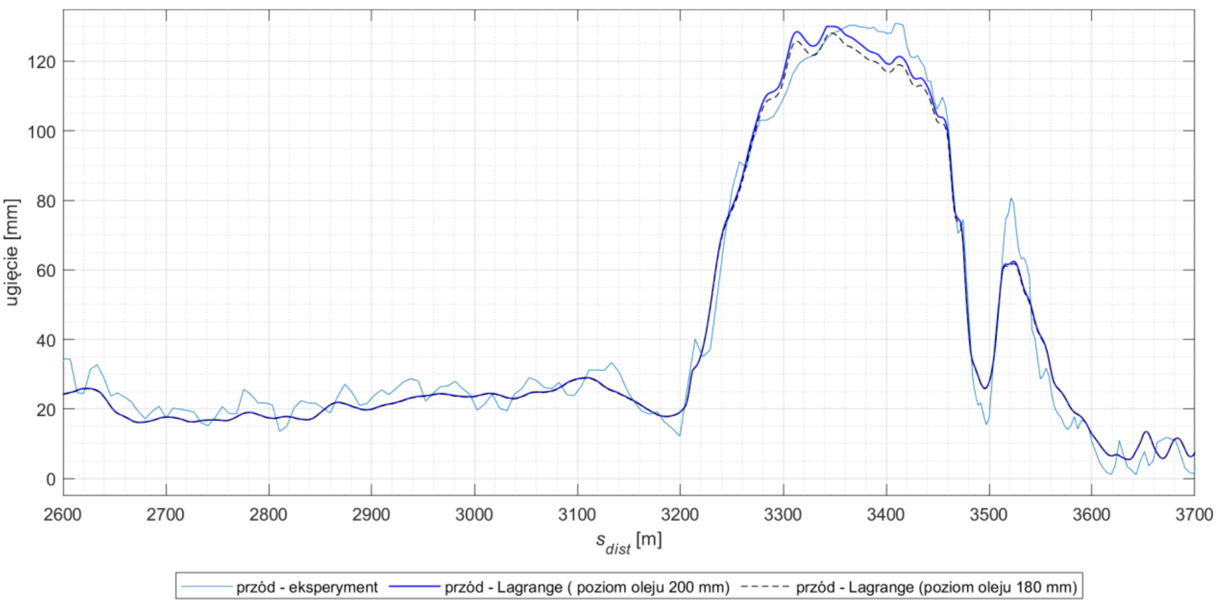
- zmiany napięcia wstępnego elementów sprężystych w widelcu teleskopowym,
- zmiany sztywności sprężyn w widelcu,
- zmiany poziomu oleju (objętości komory kompensacyjnej amortyzatora).

Wpływ wymienionych zmian na wypadkową siłę sprężystości elementu resorująco-tłumiącego przedstawiony został na rys. 7.21. Zmiana napięcia wstępnego przesuwa charakterystykę wzdłuż osi rzędnych wykresu, zmiana sztywności sprężyny zmienia nachylenie krzywej, zaś zmiana poziomu oleju wpływa na progresję siły sprężystości. Dwa pierwsze rozwiązania, ze względu na globalny charakter zmiany charakterystyki, wpłynęłyby na ugięcie zawieszenia w całym zakresie pracy, powodując zmianę geometrii pojazdu we wszystkich fazach ruchu. Zmiana poziomu oleju (załącznik B) ma charakter lokalny i powoduje zmianę charakterystyki dla ugięć bliskich maksymalnego.

Zakładając sytuację, w której kierowca motocykla nie zgłasza innych zastrzeżeń dotyczących zachowania pojazdu, należałoby rozważyć rozwiązanie możliwie neutralne dla prawidłowo przebiegających faz ruchu. W związku z tym analizie poddano przypadek zmiany poziomu oleju. Rezultaty obliczeń dla poziomu oleju wynoszącego 180 mm oraz 200 mm zostały przedstawione na rys. 7.22. Maksymalna wartość ugięcia w trakcie



Rys. 7.21. Porównanie siły sprężystości dla różnej objętości komory kompensacyjnej, sztywności sprężyny oraz napięcia wstępnego

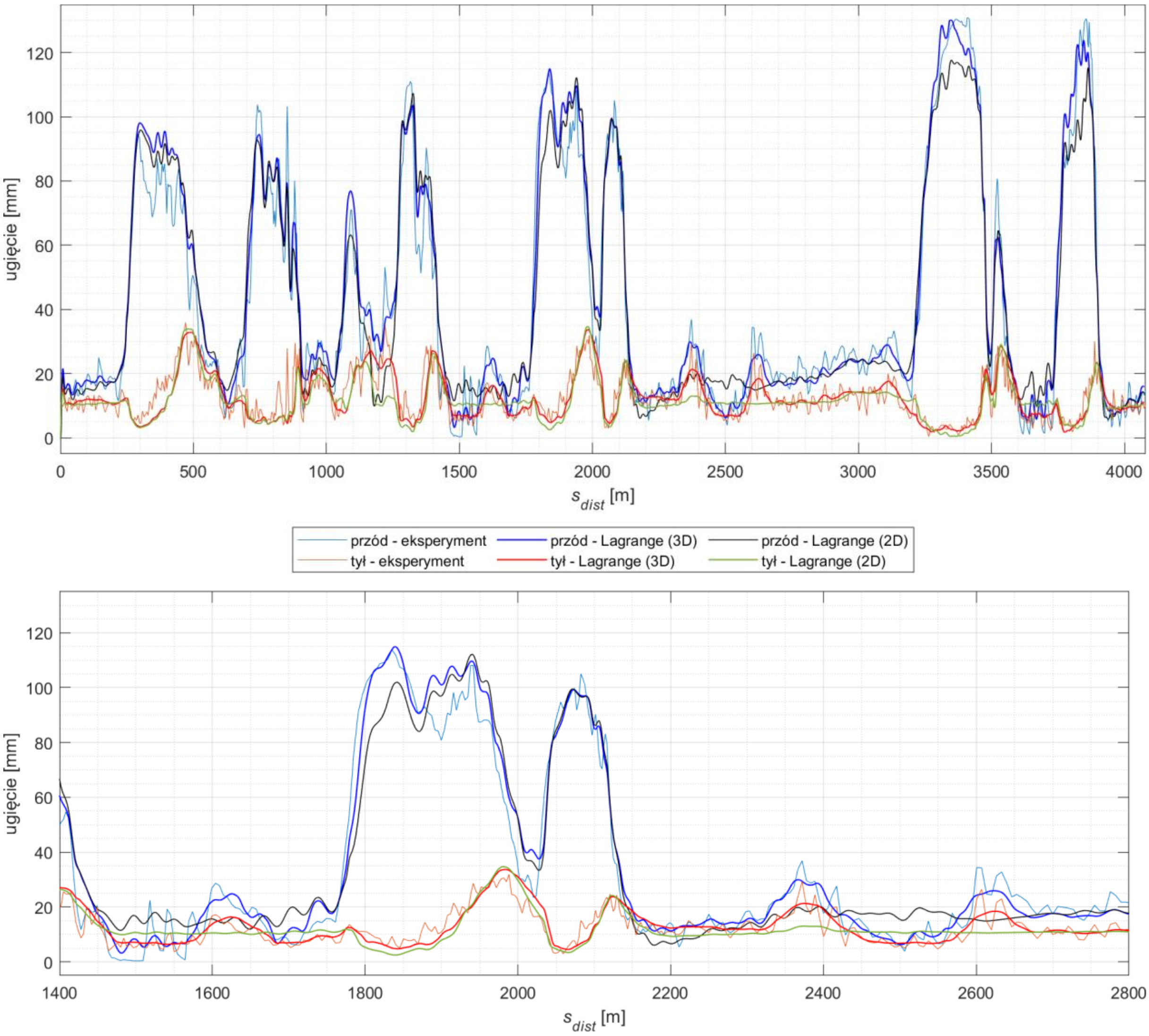


Rys. 7.22. Wpływ objętości komory kompensacyjnej na rezultat obliczeń

manewru hamowania poprzedzającego zakręt nr 10a zmalała o 1.8 mm, zaś średnia wartość ugięcia na przestrzeni całego okrążenia zmalała o 0.5 mm. Zaproponowana zmiana powinna umożliwić uzyskanie pożądanego rezultatu, to znaczy zmniejszyć maksymalną wartość ugięcia przy jednoczesnej minimalizacji wpływu wprowadzonej zmiany na geometrię pojazdu w pozostałych fazach ruchu.

Rozpatrywany w niniejszym podrozdziale przykład umożliwia przeprowadzenie analizy wpływu modelu jezdni (2D lub 3D) na wynik obliczeń. Na górnym wykresie z rys. 7.23 porównano ugięcie rzeczywistych elementów sprężystych z wartościami oszacowanymi na podstawie zarejestrowanych eksperymentalnie przyspieszeń. Obliczenia numeryczne zostały przeprowadzone dla dwu i trójwymiarowego modelu jezdni. Dolny wykres z rys. 7.23 przedstawia fragment trasy między zakrętami nr 5 i 9. Największe różnice między wynikami obliczeń numerycznych obserwowane są w trakcie przejazdów przez wzniesienia (1470-1570 m i 2420-2570 m) oraz w trakcie manewrów hamowania poprzedzających zakręty nr 6, 10a i 12. Trójwymiarowy model jezdni pozwolił uzyskać wysoką zgodność rezultatów numerycznych z eksperymentem. W przypadku dwuwymiarowego modelu jezdni, różnica ugięcia w trakcie pokonywania szczytów wzniesień sięga (względem danych eksperymentalnych) 10 mm w przypadku zawieszenia przedniego koła oraz 5 mm w przypadku zawieszenia koła tylnego.

Pozyskane eksperymentalnie charakterystyki tłumienia umożliwiły wierne odwzorowanie przebiegów ugięcia zawieszenia.



Rys. 7.23. Porównanie rezultatów obliczeń dla dwuwymiarowego oraz trójwymiarowego modelu jezdni (górny wykres), zbliżenie na fragment trasy między zakrętami nr 5 i 9 (dolny wykres)

7.5. Podsumowanie

Niniejszy rozdział poświęcony został próbie odpowiedzi na pytanie, czy w oparciu o rezultaty z ZSO możliwe jest wyciągnięcie wniosków na temat ustawień pojazdu.

Podrozdziały 7.1 i 7.2 poświęcono opisowi modelu pojazdu jednośladowego, za pomocą którego, na podstawie informacji o przyspieszeniach pojazdu (z ZSO lub eksperymentu), wyznaczono przybliżone wartości ugięć elementów resorujących w zawieszeniu przedniego oraz tylnego koła. Równania ruchu sformułowano za pomocą równań Lagrange'a II rodzaju. Przedstawiono również szczegółowy opis obciążeń działających na analizowany pojazd. W obliczeniach numerycznych uwzględniono trójwymiarowy model jezdni oraz nieliniowe charakterystyki sił sprężystości oraz tłumienia. Rezultaty obliczeń numerycznych porównano z badaniami drogowymi.

Zaprezentowano również przykład, w którym zbadano wpływ wybranych charakterystyk zawieszenia na średnie i maksymalne wartości ugięć elementów sprężystych.

Analiza porównawcza z eksperymentem wykazała bardzo dobrą zgodność rezultatów, pomimo, że skomplikowany trójwymiarowy ruch pojazdu został zredukowany do ruchu płaskiego. Wykazano, że model jezdni w znaczący sposób wpływa na otrzymywane za pomocą modelu numerycznego rezultaty, w szczególności na trasach charakteryzujących się zmianami pochylenia podłużnego jezdni (niezerowa krzywizna normalna).

Zaproponowany model drgań spełnia sformułowane na początku rozdziału oczekiwania[34]. Pozwala na weryfikację ugięć elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu jednośladowego na podstawie znajomości jego przyspieszeń - z ZSO lub zarejestrowanych w trakcie badań drogowych. Powinien również umożliwić skrócenie czasu poszukiwania odpowiednich ustawień pojazdu, dzięki zastosowaniu numerycznej weryfikacji różnych konfiguracji wprowadzanych zmian. Może zostać również rozważony jako narzędzie rozszerzające możliwości układów pomiarowych, których działanie oparte jest wyłącznie o pomiary satelitarne.

[34] W odniesieniu do wymagania dotyczącego czasu obliczeń, maksymalny czas w przypadku prezentowanych przykładów nie przekroczył dwóch minut.

8. Podsumowanie

W trakcie prowadzonych prac badawczych szczególną uwagę zwracano na aplikacyjny aspekt rozważanego zagadnienia oraz możliwość wykorzystania otrzymywanych numerycznie wyników w późniejszej pracy z kierowcą wyścigowym lub podczas prac poświęconych rozwojowi i udoskonalaniu wyścigowego pojazdu jednośladowego. Z tego też względu prezentowane w niniejszej rozprawie przykłady obliczeniowe zostały w większości przypadków zestawione z pomiarami zarejestrowanymi w trakcie ruchu rzeczywistych pojazdów. Prezentowane dane eksperymentalne pozyskiwane były za pomocą wyścigowych pokładowych układów pomiarowych.

Z punktu widzenia możliwości użytkowania narzędzi numerycznych w warunkach pracy na torze wyścigowym (np. w trakcie trwania jazd testowych) istotny jest czas trwania obliczeń. Z tego też względu analizie poddano problem sterowania optymalnego pojazdem w warunkach ruchu quasi-statycznego, który ze względu na zwięzły opis dynamiki sterowanego układu przedstawiany jest w literaturze jako mało złożony obliczeniowo. Cechą charakterystyczną przyjętego podejścia jest również jego uniwersalność wynikająca z opisu obwiedni osiągów pojazdu za pomocą diagramów przyspieszeń (diagramów g-g). Dla tego samego układu równań stanu możliwa jest zarówno analiza ruchu samochodu, jak i motocykla. Zmianie ulega jedynie kształt obwiedni diagramu przyspieszeń.

Analiza rezultatów wstępnych symulacji numerycznych realizowanych w początkowej fazie procesu badawczego wykazała, że prezentowane w literaturze podejście polegające na sterowaniu pojazdem za pomocą jego przyspieszenia wzdłużnego oraz poprzecznego jest niewystarczające do uzyskania precyzyjnych i wartościowych rezultatów z punktu widzenia analizy porównawczej z danymi eksperymentalnymi. Rozpatrywany problem charakteryzowało sterowanie typu „bang-bang". Pojazd dysponował możliwością natychmiastowej zmiany wartości sterowania na dowolną wartość dopuszczalną określoną obwiednią diagramu g-g, w związku z czym otrzymywane rezultaty cechował brak realizmu. Zastosowane w następnym kroku prowadzonych prac znane w literaturze podejście sterowania pojazdem za pomocą pochodnych pierwotnych zmiennych sterujących pozwoliło uzyskać bliższe rzeczywistości rezultaty, lecz jedynie w przypadku ograniczonego zakresu osiąganych przez pojazd prędkości. Otrzymane rezultaty trudno więc było uznać za w pełni satysfakcjonujące. Na kanwie zdobytych doświadczeń zastosowano własne, oryginalne podejście, w którym stałą wartość dopuszczalną zmiennych sterujących (będących pochodnymi przyspieszenia – zrywami) zastąpiono zbiorem ograniczonym od góry oraz od dołu hiperbolicznymi funkcjami zależnymi od prędkości ruchu. Ograniczenia wyznaczono na podstawie zbiorów danych eksperymentalnych, które zawierały informacje o rejestrowanych w trakcie ruchu rzeczywistego pojazdu zrywach. Zastosowane podejście pozwoliło uwzględnić istotne cechy dynamiki pojazdu wpływające na zmienność przyspieszeń, jak również uwzględnić skończoną wartość momentu przykładanego do kierownicy powiązaną z fizycznymi uwarunkowaniami człowieka. Za pomocą licznych przykładów obliczeniowych wykazano, że zaproponowane zmiany w sformułowaniu problemu pozwalają uzyskać wysoką zgodność zmian przyspieszeń w całym zakresie osiąganych przez pojazd prędkości.

Wprowadzona modyfikacja pozwoliła na otrzymanie lepszego oszacowania położenia punktów odniesienia (rozpoczęcia fazy hamowania, przyspieszania, inicjacji skrętu) oraz w zauważalnym stopniu wpłynęła na kształt wyznaczanej w zadaniu optymalizacji trajektorii ruchu. Po ograniczeniu dopuszczalnych wartości zmiennych sterujących (zrywów) zaobserwowano (w otrzymywanych wynikach) manewry charakterystyczne dla profesjonalnych kierowców wyścigowych, które mogą zostać potraktowane jako ogólne wskazówki do efektywnej (szybkiej) jazdy motocyklem po torze wyścigowym. Zaproponowana modyfikacja problemu została również z powodzeniem zastosowana w uogólnionym na ruch przestrzenny pojazdu zadaniu minimalizacji czasu manewru. Wykazano również, na jednym z przedstawionych przykładów, że rezultaty otrzymane za pomocą sformułowanego zadania sterowania optymalnego mogą zostać wykorzystane do poprawy czasu manewru w warunkach rzeczywistego ruchu.

Mając na względzie praktyczne cechy omawianego modelu obliczeniowego zwrócono szczególną uwagę na dobór danych wejściowych w procesie numerycznego odwzorowania geometrii jezdni. Proces ten sformułowano jako zadanie optymalizacji (zadanie sterowania optymalnego), w którym minimalizowanym wskaźnikiem jakości była odległość numerycznie odwzorowywanej krawędzi trasy od zadanych danych wejściowych. W przedstawionej analizie skupiono się na metodach pozyskiwania informacji o wysokościowym położeniu krawędzi. Porównano ze sobą numeryczne modele terenu o różnych rozdzielczościach, a także poruszono temat rejestrowanej za pomocą pomiarów satelitarnych wysokości elipsoidalnej. Zaprezentowano wówczas, że nieodpowiednio pozyskane dane wejściowe mogą skutkować rezultatami wizualnie niezgodnymi z rzeczywistością. Zaprezentowane (w rozdziałach 6 i 7) przykłady obliczeniowe, umożliwiły stwierdzenie, że modele numeryczne o wysokiej rozdzielczości (na przykład prezentowane w niniejszej rozprawie modele o rozdzielczości 1 m) pozwalają na satysfakcjonujące odwzorowanie geometrii rzeczywistej jezdni oraz (w następnym etapie obliczeń) cech ruchu pojazdu po trójwymiarowej trasie.

Satysfakcjonujące rezultaty zapewnił również zaproponowany model pojazdu jednośladowego o trzech stopniach swobody, za pomocą którego przeprowadzono analizę ugięcia elementów resorujących. Zbadano wpływ krzywizny normalnej jezdni na wartości normalnych reakcji nawierzchni i wynikowe ugięcia elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu. Zaprezentowano ponadto potencjał metody pod względem numerycznej weryfikacji różnych konfiguracji pojazdu, a następnie oceniono wpływ wybranych zmian w pojeździe na przewidywane wartości ugięć.

Sformułowane na początku rozprawy cele zostały spełnione w satysfakcjonującym dla autora niniejszej rozprawy stopniu. Zaprezentowane modele oraz zaproponowane modyfikacje podejść opisanych dotychczas w literaturze pozwoliły na uzyskanie rezultatów, które mogą być traktowane jako wartościowe dane porównawcze w analizie ruchu pojazdów jednośladowych w warunkach uczestnictwa w zmaganiach sportowych. Zaprezentowany przykład obliczeniowy dotyczący ruchu po skomplikowanej geometrycznie jezdni toru wyścigowego Road Atlanta pozwolił wykazać adekwatność oraz prawidłowość sformułowanych w pracy założeń oraz zaproponowanych modyfikacji w sformułowaniu problemu. Został również spełniony cel rozprawy dotyczący propozycji toku postępowania prowadzącego do wyznaczenia optymalnej trajektorii ruchu wyścigowego pojazdu jednośladowego w warunkach ruchu quasi-statycznego. Zaprezentowane zostały niezbędne do realizacji procesu obliczeniowego narzędzia, przedstawiono metody analizy rezultatów oraz opisano sposób realizacji obliczeń.

Sprzęgnięcie zaproponowanych modeli ze stworzoną aplikacją wspomagającą proces zarządzania geometrią jednośladów pozwala traktować cały przedstawiony proces obliczeniowy jako wartościowe, dodatkowe źródło informacji w analizie ruchu motocykli.

8.1. Kierunki dalszych badań

Możliwe kierunki dalszych badań podsumowano w formie następujących punktów:

1. Uwzględnienie w modelu pojazdu bardziej szczegółowego modelu opony oraz siły nośnej (siły docisku), co byłoby szczególnie wskazane ze względu na obserwowany w ostatnich latach znaczący rozwój aerodynamiki pojazdów jednośladowych.
2. Sprzęgnięcie procesu generowania diagramu g-g z utworzoną aplikacją do zarządzania geometrią motocykli, które miałoby na celu uwzględnienie zmian charakterystyk pojazdu spowodowanych ugięciami elementów sprężystych w zawieszeniu pojazdu.
3. Rozbudowanie zaproponowanego modelu drgań o pominięte w pracy aspekty związane z: ujemnym momentem silnika przy zamkniętej przepustnicy, bezwładnością elementów wirujących oraz siłą nośną.
4. Podjęcie próby estymacji kątów znoszenia kół w ruchu optymalnym przy założeniu ruchu krzywoliniowego w warunkach quasi-statycznych oraz uwzględnieniu zmian w geometrii pojazdu spowodowanych ugięciami elementów sprężystych.

Bibliografia

[1] H. Scherenberg, „Marcedes-Benz racing design and cars experience,” *SAE Technical Paper,* pp. 414-420, 1958.

[2] Stowarzyszenie Europejskich Producentów Motocykli ACEM, „Registrations of motorcycles and mopeds in key European markets broadly stable during 2022,” informacja prasowa, 2023, URL: pzpm.org.pl/en/Automotive-market/EUROPE/PZPM-ACEM-Registrations-of-new-PTW-in-EU/Year-2022 [dostęp: 03.03.2023].

[3] Europejskie Stowarzyszenie Producentów Pojazdów ACEM, „New passenger car registrations, European Union,” informacja prasowa, 2023, URL: acea.auto/files/20230118_PCPR_2212_FINAL.pdf [dostęp: 03.03.2023].

[4] Polski Związek Przemysłu Motoryzacyjnego, „Rejestracje nowych jednośladów w 2022,” informacja prasowa, 2023, URL: pzpm.org.pl/pl/Rynek-motoryzacyjny/Rejestracje-Pojazdow/Rejestracje-motocykle-i-motorowery/Rok-2022/GRUDZIEN-2022r/Pierwsze-rejestracje-motocykli-i-motorowerow-XII-2022r [dostęp: 03.03.2023].

[5] J. Biniewicz, „Projekt, analiza wytrzymałościowa i technologia wykonania konstrukcji nośnej i kompozytowej ramy pomocniczej motocykla wyścigowego,” Wydział SiMR PW, praca dyplomowa magisterska, 2018.

[6] M. Veneri i M. Massaro, „A free-trajectory quasi-steady-state optimal-control method for minimum lap-time of race vehicles,” *Vehicle System Dynamics,* tom 58, nr 6, pp. 933-954, 2020.

[7] M. Gadola, Vetturi D, D. Cambiaghi i inni, „A tool for lap time simulation,” *SAE Technical Papers,* 1996.

[8] F. Braghin, F. Cheli, S. Melzi i inni, „Race driver model,” *Computers & Structures,* tom 86, nr 13-14, pp. 1503-1516, Lipiec 2008.

[9] T. Fujioka i T. Kimur, „Numerical simulation of minimum-time cornering behavior,” *JSAE Review,* tom 13, nr 1, pp. 44-51, 1992.

[10] J. P. M. Hendrikx, T. J. J. Meijlink i R. F. C. Kriens, „Application of optimal control theory to inverse simulation of car handling," *Vehicle System Dynamics,* tom 26, nr 6, pp. 449-461, 1996.

[11] H. Hatwal i E. Mikulcik, „Some inverse solutions to an automobile path-tracking problem with input control of steering and brakes," *Vehicle System Dynamics,* tom 15, nr 2, pp. 61-71, 1986.

[12] M. Veneri, „Minimum-lap-time of race vehicles," Rozprawa doktorska, Padova, 2019.

[13] V. Cossalter, M. Da Lio, R. Lot i inni, „A general method for the evaluation of vehicle manoeuvrability with special emphasis on motorcycles," *Vehicle System Dynamics,* tom 31, nr 2, pp. 113-135, 1999.

[14] E. Bertolazzi, F. Biral i M. Da Lio, „Symbolic-numeric efficient solution of optimal control problems for multibody systems," *Journal of Computational and Applied Mathematics,* tom 185, nr 2, pp. 404-421, 2006.

[15] E. Bertolazzi, F. Biral i M. Da Lio, „Real-time motion planning for multibody systems," *Multibody System Dynamics,* tom 17, pp. 119-139, 2007.

[16] S. Bobbo, V. Cossalter, M. Massaro i inni, „Application of the "optimal maneuver method" for enhancing racing motorcycle performance," *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems,* tom 1, nr 1, pp. 1311-1318, 2009.

[17] R. Lot i F. Biral, „A curvilinear abscissa approach for the lap time optimization of racing vehicles," *Materiały konferencyjne z 19th World Congress IFAC, The International Federation of Automatic Control,* tom 47, nr 3, pp. 7559-7565, 24-29 sierpnia 2014.

[18] G. Perantoni i D. J. N. Limebeer, „Optimal Control of a Formula One Car on a Three-Dimensional Track - Part 1: Track Modeling and Identification," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control,* tom 137, nr 5:051019, Maj 2015.

[19] D. J. N. Limebeer i G. Perantoni, „Optimal Control of a Formula One Car on a Three-Dimensional Track - Part 2: Optimal Control," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control,* tom 137, nr 5:051019, May 2015.

[20] L. Leonelli i D. J. N. Limebeer, „Optimal control of a road racing motorcycle on a three-dimensional closed track," *Vehicle System Dynamics,* tom 58, nr 8, pp. 1285-1309, 2020.

[21] E. Marconi i M. Massaro, „The effect of suspensions and racetrack three-dimensionality on the minimum lap time of motorcycles," w *Advances in Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks*, Springer International Publishing, 2020, pp. 1367-1377.

[22] E. Marconi i M. Massaro, „Optimal recovery manoeuvres of racing motorcycles," *Maccanica,* tom 57, pp. 457-472, 2022.

[23] F. J. W. Whipple, „The Stability of the Motion of Bicycle," *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics,* 1899.

[24] H. B. Pacejka, Tire and vehicle dynamics, 3rd ed., Oxford: Butterworth Heinemann, 2012.

[25] N. Dal Bianco, R. Lot i K. Matthys, „Lap time simulation and design optimisation of a brushed dc electric motorcycle for the isle of man tt zero challenge," *Vehicle System Dynamics,* tom 56, nr 1, pp. 27-54, 2018.

[26] S. Lovato i M. Massaro, „A three-dimensional free-trajectory quasi-steady-state optimal-control method for minimum-lap-time of race vehicles," *Vehicle System Dynamics,* tom 60, nr 5, pp. 1512-1530, 2022.

[27] S. Lovato, M. Massaro i D. J. N. Limebeer, „Curved-ribbon-base track modelling for minimum lap-time optimisation," *Meccanica,* tom 56, pp. 2139-2152, 2021.

[28] J. Biniewicz i M. Pyrz, „A quasi-steady-state minimum lap time simulation of race motorcycles using experimental data," *Vehicle System Dynamics,* 2023, DOI: 10.1080/00423114.2023.2170256.

[29] D. P. Kelly i R. S. Sharp, „Time-optimal control of the race car: influence of a thermodynamic tyre model," *Vehicle System Dynamics,* tom 50, nr 4, pp. 641-622, 2012.

[30] W. J. West i D. J. N. Limebeer, „Optimal tyre management for a high-performance race car," *Vehicle System Dynamics,* tom 60, nr 1, pp. 1-19, 2022.

[31] A. Tremlett i D. J. N. Limebeer, „Optimal tyre usage for a formula one car," *Vehicle System Dynamics,* tom 54, nr 10, pp. 1448-1473, 2016.

[32] F. Christ, A. Wischnewski, A. Heilmeier i inni, „Time-optimal trajectory planning for a race car considering variable tyre-road friction coefficients," *Vehicle System Dynamics,* tom 59, nr 4, pp. 588-612, 2021.

[33] D. Brayshaw i M. Harrison, „A quasi steady state approach to race car lap simulation in order to understand the effects of racing line and centre of gravity location," tom 219, nr 6, pp. 725-739, 2005.

[34] V. Cossalter, R. Lot i D. Tavernini, „Optimization of the centre of mass position of a racing motorcycle in dry and wet track by means of the optimal maneuver method," *2013 IEEE International Conference on Mechatronics (ICM),* pp. 412-417, 2013.

[35] G. Perantoni i D. J. N. Limebeer, „Optimal control for a Formula One car with variable parameters," *Vehicle System Dynamics,* tom 52, nr 5, pp. 653-675, 2014.

[36] D. Casanova, R. S. Sharp i P. Symonds, „On the optimisation of the longitudinal location of the mass centre of a formula one car for two circuits," *Proceedings of the 6th International Symposium on Automotive Control (AVEC 2002),* pp. 6-12, 9-13 wrześnie 2002, Hiroszima, Japonia.

[37] M. I. Masouleh i D. J. Limebeer, „Heave spring and ride height optimisation of a formula one car suspension system," *54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC),* pp. 165-170, grudzień 2015, Osaka, Japonia.

[38] M. Massaro i D. J. N. Limebeer, „Minimum-lap-time optimisation and simulation," *Vehicle System Dynamics,* tom 59, nr 7, pp. 1069-1113, 2021.

[39] G. Sequenzia, S. M. Oliveri, G. Fatuzzo i inni, „An advanced multibody model for evaluating rider's influence on motorcycle dynamics," *Proceedings of the Insitution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics,* tom 229, nr 2, pp. 193-207, 2015.

[40] D. Casanova, „On minimum time vehicle manoeuvering: the theoretical optimal lap," Cranfield University, rozprawa doktorska, 2000.

[41] R. S. Sharp i H. Peng, „Vehicle dynamics applications of optimal control theory," *Vehicle System Dynamics,* tom 49, nr 7, pp. 1073-1111, 2011.

[42] R. S. Rice, „Measuring car-driver interaction with the g-g diagram," *SAE,* 1973.

[43] W. F. Milliken i D. L. Milliken, Race car vehicle dynamics, Society of Automotive Engineers, 1995.

[44] A. J. Tremlett, F. Assadian, D. J. Purdy i inni, „Quasi-steady-state linearisation of the racing vehicle acceleration envelope: a limited slip differential example,” *Vehicle System Dynamics,* tom 11, pp. 1416-1442, 2014.

[45] M. Massaro, S. Lovato i M. Veneri, „An optimal control approach to the computation of g-g diagrams,” *Vehicle System Dynamics,* 2023, DOI:10.1080/00423114.2023.2178467.

[46] B. Siegler, A. Deakin i D. Crolla, „Lap time simulation: comparison of steady state, quasi-static and transient racing car cornering strategies,” *Proceedings of the 2000 SAE Motorsports Engineering Conference and Exposition; SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems,* 13-16 listopada 2000, Dearborn, Michigan.

[47] T. Volkl i M. Muehlmeier, „Extended steady state lap time simulation for analyzing transient vehicle behavior,” *SAE International Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems,* tom 6, nr 1, pp. 283-292, 2013.

[48] F. Biral i R. Lot, „An interpretative model of g-g diagrams of racing motorcycle,” *Proceedings of the 3rd ICMEM International Conference on Mechanical Engineering and Mechanics,* 21-23 października 2009, Pekin, Chiny.

[49] R. Bellman, „On the Theory of Dynamic Programming,” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, National Academy of Sciences,* tom 8, pp. 716-719, 1952.

[50] T. Zielińska i M. S. Żurawska, Optymalizacja w sterowaniu i podejmowaniu decyzji, Warszawa: Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2017.

[51] D. J. N. Limebeer i M. Massaro, Dynamics and optimal control of road vehicles, Oxford: Oxford University Press, 2018.

[52] C. Kirches i inni, „The Direct Multiple Shooting Method for Optimal Control,” w *Fast Numerical Methods for Mixed-Integer Nonlinear Model-Predictive Control*, Wiesbaden, Vieweg+Teubner (GWV), 2011, pp. 13-29.

[53] J. Miller, „Strategia równoczesna w metodzie MSE rozwiązywania problemów sterowania optymalnego. Propozycja modyfikacji algorytmu,” *Pomiary Automatyka Robotyka,* tom 15, nr 12, pp. 66-68, 2011.

[54] A. Wachter i L. T. Biegler, „On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming,” *Mathematical Programming,* tom 1, pp. 25-57, 2006.

[55] P. E. Gill, W. Murray i M. A. Saunders, „SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization,” *Society for Industrial and Applied Mathematics,* tom 47, nr 1, pp. 99-131, 2005.

[56] M. A. Patterson i A. V. Rao, „GPOPS-II: A MATLAB software for solving multiple-phase optimal control problems using hp-adaptive Gaussian quadrature collocation methods and sparse nonlinear programming,” *ACM Transactions on Mathematical Software,* tom 41, nr 1, pp. 1-37, 2014.

[57] M. Patterson, „Efficient solutions to nonlinear optimal control problems using adaptive mesh orthogonal collocation methods,” University of Florida, 2013, rozprawa doktorska.

[58] N. Dal Bianco, E. Bertolazzi i F. Biral, „Comparison of direct and indirect methods for minimum lap time optimal control problems,” *Vehicle System Dynamics,* tom 57, nr 5, pp. 665-696, 2005.

[59] J. R. Anderson i B. Ayalew, „Modelling minimum-time manoeuvering with global optimisation of local receding horizon control,” *Vehicle System Dynamics,* tom 56, nr 10, pp. 1508-1531, 2018.

[60] D. Garg, M. Patterson, W. W. Hager i inni, „A unified framework for the numerical solution of optimal control problems using pseudospectral methods,” *Automatica,* tom 46, nr 11, pp. 1843-1851, 2010.

[61] M. J. Weinstein i A. V. Rao, „Algorithm 984: adigator, a toolbox for the algorithmic differentation of mathematical functions in matlab using source transformation via operator overloading,” *ACM Transactions on Mathematical Software,* tom 44, nr 2, pp. 1-25, 2017.

[62] Z. Song, R. Zhigang, Q. Deng i inni, „General models for estimating daily and monthly mean daily diffuse solar radiation in China's subtropical monsoon climatic zone,” *Renewable Enery,* tom 145, pp. 318-332, 2020.

[63] S. Younes, R. Claywell i T. Muneer, „Quality control of solar radiation data: present status and proposed new approach,” *Energy,* tom 2005, pp. 1533-1549, 2005.

[64] V. Cossalter, Motorcycle dynamics, Lulu, 2006.

[65] Praca zbiorowa/ pod red. Kazimierza Studzińskiego, „Mechanika pojazdów samochodowych," w *Techniczny poradnik samochodowy*, Warszawa, Państwowe Wydawnictwo Techniczne, 1956, pp. 130-171.

[66] National Geospatial-Intelligence Agency, „The Universal Grids and the Transverse Mercator and Polar Stereographic Map Projections," dokument normalizacyjny, 2014.

[67] 2D Datarecording, „Overview 2D GPS/GNSS modules 2022," Specyfikacja produktów, 2022, URL: 2d-datarecording.com/Downloads/Datasheets/Overview_2D_GPSGNSS_modules_2022_Website_Overview.pdf [dostęp: 05.2023].

[68] Baza danych udostępniona przez amerykańskie zawodnika sportu motocyklowego Nolana Lamkina, URL: nolanlamkinracing.com/2021-motoamerica-data-r6-revisited/ [dostęp: 03.2023].

[69] Dokumentacja firmy AIM dotycząca odbiorników sygnału satelitarnego, URL: aimsports.com/download/faqs/eng/hardware/channels/gps_module/FAQ_Channels_GPS_102_eng.pdf [dostęp:05.2023].

[70] J. Segers, Analysis Techniques for Racecar Data Acquisition, Second Edition, Warrendale, Pensylwania: SAE International, 2014.

[71] V. Cossalter i R. Lor, „A motorcycle multi-body model for real time simulations based on the naturacl coordinates approach," *Vehicle System Dynamics,* tom 37, nr 6, pp. 423-447, 2002.

[72] S. Jackowski, „Wstęp do Geometrii Różniczkowej.," Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Pomocnik studenta, 2020, URL: mimuw.edu.pl/~sjack/dydaktyka/WGR2019Z_SJ.pdf [dostęp: 05.2023].

[73] V. Cossalter, A. Doria i R. Lot, „Steady turning of two-wheeled vehicles," *Vehicle System Dynamics,* tom 31, pp. 157-181, 1999.

Załączniki

A. Opis jezdni w geometrii różniczkowej

Własności dowolnej gładkiej krzywej przestrzennej $\mathbf{c}: (s_0, s_f) \to R^3$ klasy C^3, sparametryzowanej długością łuku s, dla której $\mathbf{c}''(s) \neq 0$, nieprzecinającej się oraz unormowanej, to znaczy takiej, dla której $|\mathbf{c}'(s)| = 1$, określone są wzorami Freneta-Serreta. Zależności te opisują pochodne wersorów związanego z krzywą trójścianu Freneta: wersora osi stycznej T, normalnej głównej N i binormalnej B (rys. 5.1 w podrozdziale 5.1). Trójścian Freneta tworzą trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny nazywane: płaszczyzną ściśle styczną do krzywej (rozpiętą przez wersory **T** i **N**), normalną (rozpiętą przez wersory **N** i **B**) oraz prostującą (rozpiętą przez wersory **T** i **B**). Wersor **T** opisany jest równaniem $\mathbf{T} = \mathbf{c}'$, wersor **N** opisuje zależność $\mathbf{N} = \mathbf{T}'/|\mathbf{T}'|$, zaś wersor **B** jest prostopadły do dwóch pozostałych i powstaje w wyniku mnożenia wektorowego
$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. Zależności Freneta-Serreta zapisane w postaci macierzowej przedstawiają się następująco[35]

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

gdzie τ jest torsą krzywej, zaś κ jej krzywizną daną wzorem

$$\kappa = |\mathbf{T}'|. \tag{A.2}$$

Promień krzywizny wyraża zależność

$$\rho = 1/\kappa. \tag{A.3}$$

Pierwsza zależność w równaniu macierzowym (A.1) wynika wprost z definicji wersora **N**.

W celu wyprowadzenia zależności na torsję τ należy jednostkową długość wersora **B** zapisać za pomocą iloczynu skalarnego

---

[35] W przypadku krzywej przestrzennej, dla której $\mathbf{c}'(s) \neq 1$, parametr s zastępowany jest parametrem $s(t)$ i obowiązujące są zależności

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s}.$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1. \tag{A.4}$$

W wyniku zróżniczkowania (A.4) otrzymuje się

$$\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' = 0. \tag{A.5}$$

Korzystając z własności formy dwuliniowej zapisać można zależność

$$\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{A.6}$$

z której wynika, że $\mathbf{B}'$ jest ortogonalne do $\mathbf{B}$. Wiadomo również, że iloczyn skalarny $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$, ponieważ $\mathbf{B} \perp \mathbf{T}$. W wyniku zróżniczkowania wyrażenia $\mathbf{B} \cdot \mathbf{T} = 0$ otrzymywane jest równanie

$$\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0. \tag{A.7}$$

Drugi składnik równania (A.7) zeruje się ze względu na ortogonalność wersorów $\mathbf{B}$ oraz $\mathbf{N}$, ponieważ $\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}$. Z zerowania pierwszego składnika równania (A.6) oraz (A.7) wynika, że pochodna $\mathbf{B}'$ jest ortogonalna do wersorów $\mathbf{T}$ i $\mathbf{B}$ i może zostać wyrażona za pomocą zależności

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}, \tag{A.8}$$

która jest trzecim wzorem Freneta-Serreta. Torsja τ jest więc dana zależnością

$$\tau = -\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N} = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{|\dot{\mathbf{c}}||\ddot{\mathbf{c}}|}. \tag{A.9}$$

Trzecie równanie w macierzy (A.1) powstaje poprzez zróżniczkowanie wyrażenia $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

Ponieważ pochodna wersora wynika jedynie ze zmiany jego kierunku, równania Freneta-Serreta (A.1) opisują prędkość kątową trójścianu Freneta.

Orientacja trójścianu O_{TPB} w nieruchomym układzie współrzędnych prostokątnych może zostać przedstawiona za pomocą macierzy obrotu[36]

$$\mathbf{R}(s) = [\mathbf{T}\ \mathbf{P}\ \mathbf{B}]. \tag{A.10}$$

Korzystając z (A.10), zależność (A.1) może zostać przekształcona do postaci

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}\begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{RS}(\mathbf{\Omega}_F), \tag{A.11}$$

[36] W algebrze liniowej, macierz obrotu $\mathbf{R}$ jest macierzą transformacji związaną z obrotem układu współrzędnych, dla której prawdziwe są warunki $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ oraz det $(\mathbf{R}) = 1$. Każda macierz obrotu może zostać wyrażona za pomocą wektora osi obrotu oraz kąta obrotu.

w której $\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}_F)$ jest macierzą antysymetryczną[37], zaś $\mathbf{\Omega}_F$ jest wektorem prędkości kątowej trójścianu Freneta nazywanym wektorem Darboux.

Prędkość kątowa $\mathbf{\Omega}_F$ równa jest sumie prędkości kątowych względem osi trójścianu

$$\mathbf{\Omega}_F = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{T} + \boldsymbol{\omega}_\mathrm{N} + \boldsymbol{\omega}_\mathrm{B}. \tag{A.12}$$

Aby wyznaczyć wielkości $\boldsymbol{\omega}_T, \boldsymbol{\omega}_N$ oraz $\boldsymbol{\omega}_B$ posłużyć się można pojęciem prędkości polowej opisanej w ogólnym przypadku zależnością

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}(s + \Delta s)}{2\Delta s}, \tag{A.13}$$

w której $\mathbf{A}$ jest (dla pewnego Δs) polem powierzchni figury (połowy równoległoboku[38]) ograniczonej przez promień wodzący $\mathbf{r}(s)$ poruszający się wokół ogniska.

Z różniczki wyrażenia $\mathbf{r}(s + \Delta s)$ otrzymywana jest zależność

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s)\Delta s}{2\Delta s} = \frac{\mathbf{r}(s) \times \mathbf{r}'(s)}{2}. \tag{A.14}$$

Każdy z wektorów trójścianu Freneta zakreśla łuk o stałym promieniu. Wyrażenie $\mathrm{d}\mathbf{A}/\mathrm{d}s$ jest więc związane ze zmianą kąta w czasie i składniki równania (A.12) mogą zostać wyrażone jako

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{T} = \frac{\mathbf{T} \times \mathbf{T}'}{2}, \tag{A.15}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{N} = \frac{\mathbf{N} \times \mathbf{N}'}{2}, \tag{A.16}$$

$$\boldsymbol{\omega}_\mathrm{B} = \frac{\mathbf{B} \times \mathbf{B}'}{2}. \tag{A.17}$$

Końcowy wzór na prędkość kątową trójścianu Freneta, wyznaczony za pomocą równania (A.12) oraz wzorów Freneta-Serreta, określa zależność

$$\mathbf{\Omega}_F = \kappa\mathbf{B} + \tau\mathbf{T}. \tag{A.18}$$

---

[37] Dowolna macierz antysymetryczna 3x3 może zostać zapisana jako

$$\mathbf{S}(\mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{bmatrix},$$

gdzie n_x, n_y, n_z są elementami wektora $\mathbf{n}$. Macierz antysymetryczna, z definicji, spełnia warunek $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$.

[38] Pole równoległoboku utworzone z dwóch wektorów **a** i **b** równe jest iloczynowi wektorowemu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tych wektorów.

Prawdziwe jest więc sformułowanie

$$\mathbf{S}(\mathbf{\Omega}_F) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}. \tag{A.19}$$

Krzywa $\mathbf{c}(s)$, na mocy twierdzenia o jednoznaczności rozwiązań równań różniczkowych z zadanym warunkiem początkowym [72], może zostać odtworzona za pomocą zależności

$$\mathbf{c}(s) = \int_{s_0}^{s_f} \mathbf{t} \mathrm{d}s, \tag{A.20}$$

jeśli znane są warunki początkowe na $\mathbf{c}(s_0)$.

Powierzchnia zorientowana

Wyprowadzenia prezentowanych w dalszej części niniejszego załącznika formuł zamieszczone są w publikacji [18]. Występujące różnice oznaczeń zostały podsumowane w formie poniższej listy:

- osie trójścianu Freneta oznaczono jako **T**, **N**, **B** zamiast **t**, **p**, **b**,
- osie reperu Darboux oznaczone zostały jako **t**, **n**, b zamiast **t**, **n**, **m**,
- prędkość kątową reperu Darboux przyjęto oznaczać symbolem $\mathbf{\Omega}_D$ zamiast $\mathbf{\Omega}_B$,
- składowe prędkości kątowej reperu Darboux oznaczono symbolami $\mathbf{\Omega}_t$, $\mathbf{\Omega}_n$, $\mathbf{\Omega}_b$ zamiast $\mathbf{\Omega}_x$, $\mathbf{\Omega}_y$, $\mathbf{\Omega}_z$.

Opis powierzchni zorientowanej danej równaniem

$$\mathbf{w}(s,n) = \mathbf{c}(s) + \mathbf{n}(s)n \in R^3 : s \in < s_o, s_f >, n \in < n_l(s), n_r(s) >, \tag{A.21}$$

gdzie n jest wielkością skalarną przedstawiającą przesunięcie poprzeczne w płaszczyźnie powierzchni zorientowanej (w kierunku wersora **n** prostopadłego do stycznej **t**), dokonywany jest w ruchomym układzie współrzędnych O_{tnb} poruszającym się po krzywej **c**, którego płaszczyzna O_{tn} jest styczna do drogi, a oś t pokrywa się z osią T trójścianu Freneta (rys. 5.1 w podrozdziale 5.1).

Reper Darboux powstaje w wyniku obrócenia trójścianu Freneta o kąt v. Jego prędkość kątowa wynosi więc

$$\mathbf{\Omega}_D = \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, v)\mathbf{\Omega}_D^{(TNB)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau + v' \\ 0 \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau + v' \\ \kappa \sin v \\ \kappa \cos v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_t \\ \Omega_n \\ \Omega_b \end{bmatrix}, \tag{A.22}$$

gdzie $\mathbf{R}(\mathbf{e}_x, v)$ jest elementarną macierzą obrotu, zaś wielkości Ω_t, Ω_n i Ω_b nazywane są odpowiednio skręceniem geodezyjnym, krzywizną normalną oraz krzywizną geodezyjną.

Układ współrzędnych związany z powierzchnią zorientowaną może zostać otrzymany z inercjalnego układu współrzędnych za pomocą trzech macierzy obrotu związanych z kątami Eulera. Macierze rotacji związane z elementarnymi obrotami opisane są zależnościami

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_\phi & -\mathrm{s}_\phi \\ 0 & \mathrm{s}_\phi & \mathrm{c}_\phi \end{bmatrix}, \tag{A.23}$$

$$\mathbf{R}_y(\mu) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_y, \mu) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\mu & 0 & \mathrm{s}_\mu \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}_\mu & 0 & \mathrm{c}_\mu \end{bmatrix}, \tag{A.24}$$

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \theta) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\theta & -\mathrm{s}_\theta & 0 \\ \mathrm{s}_\theta & \mathrm{c}_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.25}$$

Przyjęta w niniejszym problemie sekwencja obrotów[39] zyx prowadzi do zależności

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{R}_y(\mu)\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}_\theta\mathrm{c}_\mu & \mathrm{c}_\theta\mathrm{s}_\mu\mathrm{s}_\phi - \mathrm{s}_\theta\mathrm{c}_\phi & \mathrm{c}_\theta\mathrm{s}_\mu\mathrm{c}_\phi + \mathrm{s}_\theta\mathrm{s}_\phi \\ \mathrm{s}_\theta\mathrm{c}_\mu & \mathrm{s}_\theta\mathrm{s}_\mu\mathrm{s}_\phi + \mathrm{c}_\theta\mathrm{c}_\phi & \mathrm{s}_\theta\mathrm{s}_\mu\mathrm{c}_\phi - \mathrm{c}_\theta\mathrm{s}_\phi \\ -\mathrm{s}_\mu & \mathrm{c}_\mu\mathrm{s}_\phi & \mathrm{c}_\mu\mathrm{c}_\phi \end{bmatrix}. \tag{A.26}$$

Wielkości „s” oraz „c” oznaczają odpowiednio sinus oraz cosinus. Ze względu na fakt, że prezentowany opis dotyczy geometrii drogi, przyjęto umownie, że wielkości θ, ϕ oraz μ będą nazywane odpowiednio odchyleniem, pochyleniem poprzecznym oraz pochyleniem podłużnym. Wersory **t**, **n**, **b** reperu Darboux opisane są odpowiednio przez pierwszą, drugą oraz trzecią kolumnę macierzy (A.26).

Prędkość kątowa $\mathbf{\Omega}_D$ reperu Darboux powiązana jest z kątami Eulera zależnością

$$\mathbf{\Omega}_D = \mathbf{R}^T\left(\theta'\mathbf{e}_z + \mu'\mathbf{R}_z\mathbf{e}_y + \phi'\mathbf{R}_z\mathbf{R}_y\mathbf{R}_x\right) = \mathbf{J}[\phi'\ \mu'\ \theta']^T, \tag{A.27}$$

w której macierz **J** opisana jest jako

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\mathrm{s}_\mu \\ 0 & \mathrm{c}_\phi & \mathrm{c}_\mu\mathrm{s}_\phi \\ 0 & -\mathrm{s}_\phi & \mathrm{c}_\mu\mathrm{c}_\phi \end{bmatrix}. \tag{A.28}$$

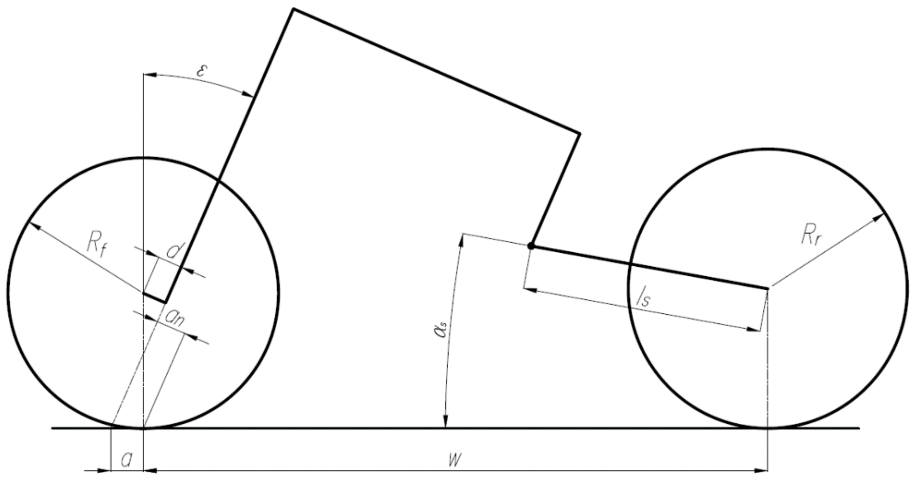
[39] Z każdą kombinacją obrotów związane jest położenie osobliwe [18]. W sekwencji obrotów zyx położenie osobliwe występuje dla $\mu = \pm\pi/2$.

B. Aplikacja do zarządzania geometrią motocykla

Geometrię pojazdu jednośladowego charakteryzują wielkości (rys. B.1):

- w – rozstaw osi,
- d – odsadzenie kolumny zawieszenia przedniego (odległość osi widelca teleskopowego od osi główki ramy),
- l_s – długość wahacza,
- ε – kąt główki ramy,
- α_s – kąt nachylenia wahacza do podłoża,
- R_f – promień przedniej opony,
- R_r – promień tylnej opony,
- $a_n = R_f \sin\varepsilon - d$ – wyprzedzenie normalne,
- $a = a_n / \cos\varepsilon$ – wyprzedzenie.

Istotnym etapem prac rozwojowych nad ulepszaniem motocykla oraz prac prowadzonych w trakcie dni testowych, jest proces dostosowywania pojazdu do charakterystyki toru wyścigowego, opon i wymagań kierowcy. Praca nad ustawieniami pojazdu polega na wprowadzaniu zmian w jego geometrii, na modyfikacji charakterystyki sprężystości i tłumienia elementów resorująco-tłumiących oraz na doborze ustawień elektronicznych systemów[40] wspomagających jazdę.



Rys. B.1. Geometria pojazdu jednośladowego

[40] Systemami wspomagającymi jazdę wyścigową są: układ regulacji poślizgu wzdłużnego opony napędzanej (z ang. *traction control*), układ zapobiegający unoszeniu przedniego koła ponad jezdnię w trakcie przyspieszania (z ang. *anti-wheelie*), sterowana elektronicznie przepustnica (z ang. *ride-by-wire*) oraz układ regulacji ujemnego momentu obrotowego silnika przy zamkniętej przepustnicy w układzie dolotowym silnika (z ang. *engine-braking*).

Geometria drogowego motocykla o konwencjonalnym zawieszeniu teleskopowym oraz napędzie za pomocą przekładni łańcuchowej może zostać zmodyfikowana za pomocą:

- zmiany długości wahacza (zmiany liczby ogniw łańcucha) – rys. B.2a,
- zmiany położenia widelca teleskopowego względem górnej półki kierownicy,
- zmiany sztywności elementów sprężystych zawieszenia oraz modyfikacji ich napięcia wstępnego.

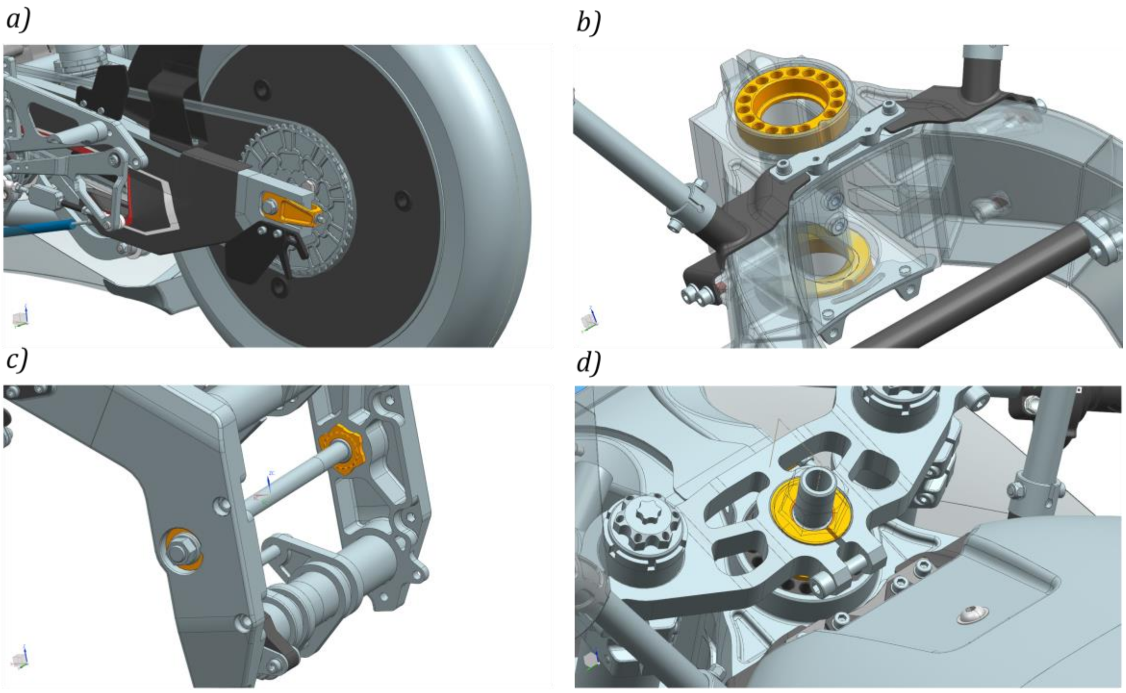
Podwozia motocykli wyścigowych umożliwiają dodatkowo:

- regulację długości ramy oraz kąta główki ramy - rys. B.2b,
- zmianę położenia osi wahacza - rys. B.2c,
- regulację odsadzenia kolumny zawieszenia przedniego względem osi główki ramy - rys. B.2d,
- modyfikację charakterystyki zawieszenia tylnego koła za pomocą wymiennych elementów układu dźwigniowego oraz regulowanej długości elementu resorująco-tłumiącego,
- modyfikację położenia silnika względem głównej ramy nośnej,
- zmianę długości tylnego elementu resorująco-tłumiącego,
- regulację tłumienia przy ściskaniu i rozciąganiu amortyzatora, dla niskich i wysokich prędkości tłoczyska w elemencie tłumiącym.

Lista możliwych modyfikacji uzależniona jest od klasy oraz modelu motocykla. Geometria podwozia modyfikowana jest zazwyczaj za pomocą wymiennych wkładek, których przykłady zostały przedstawione na rys. B.2. Zamieszczone rysunki przedstawiają modele CAD elementów regulacyjnych motocykla PreMoto3 zaprojektowanego i zbudowanego na Politechnice Warszawskiej przez akademicki zespół zarządzany przez autora rozprawy.

Modyfikacja geometrii jednośladu za pomocą jednej z wyszczególnionych metod powoduje jednoczesną zmianę kilku wielkości charakterystycznych. Na przykład, zmiana położenia przedniego zawieszenia względem półek kierownicy wpływa na kąt główki ramy, wartość wyprzedzenia, kąt nachylenia wahacza oraz rozstaw osi. Zmienia się również położenie wypadkowego środka ciężkości. W odpowiedzi na potrzebę kontrolowania procesu zmian powstało kilka pakietów oprogramowania[41], które znalazły zastosowanie wśród inżynierów wyścigowych oraz producentów motocykli. Wymienione aplikacje umożliwiają wyznaczenie wielkości charakteryzujących geometrię motocykla dla dowolnej wartości ugięcia zawieszenia. Rozszerzona wersja oprogramowania MotoSpec Chassis Program umożliwia ponadto analizę wybranych wielkości charakterystycznych na przestrzeni całego okrążenia lub wybranego fragmentu trasy. Analiza ta dokonywana jest na podstawie przebiegu czasowego ugięcia zawieszenia zarejestrowanego za pomocą czujników przemieszczeń liniowych. Przykładowe sposoby montażu takich czujników zostały przedstawione na rys. B.3.

W trakcie prowadzonych badań podjęto decyzję o opracowaniu własnej wersji aplikacji ułatwiającej proces modyfikacji geometrii pojazdu jednośladowego. Uzyskano w ten sposób swobodę rozbudowy funkcjonalności programu oraz wyzbyto się ograniczeń związanych z zamkniętym formatem plików. Własną wersję aplikacji opracowano w środowisku MATLAB.



Rys. B.2. Elementy regulacyjne geometrii motocykla (oznaczone na rysunkach kolorem pomarańczowym): regulacja długości wahacza (a), wkładki regulacyjne długości ramy oraz kąta główki ramy (b), wkładki regulacyjne położenia osi wahacza względem ramy nośnej pojazdu (c), wkładki regulacyjne odsadzenia kolumny zawieszenia przedniego koła od osi główki ramy (d)

---

[41] Pakiety oprogramowania: MotoSpec Chassis Program, SuspAct, ZeroChassis.

Rys. B.3. Przykładowe sposoby montażu czujników przemieszczeń liniowych. Zdjęcia: lewe oraz w prawym górnym rogu przedstawiają motocykl PreMoto3 zbudowany na Wydziale SiMR Politechniki Warszawskiej. Rysunek trzeci jest fotografią z sieci[42]

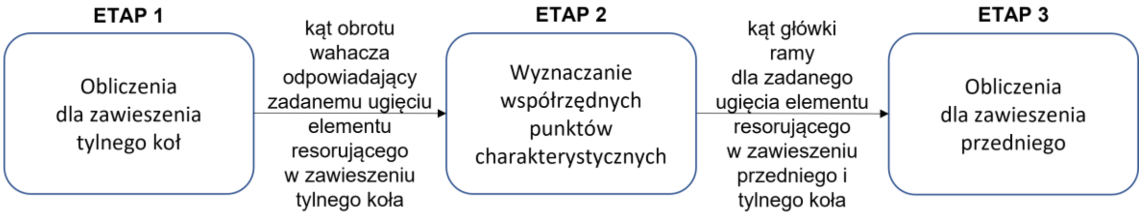
Aplikacja zapewnia funkcjonalność zbliżoną do jej komercyjnych odpowiedników i pozwala na:

- analizę geometrii pojazdu dla zadanych ugięć elementów resorujących oraz zadanego kąta przechyłu,
- porównywanie geometrii różnych motocykli,
- graficzne przedstawienie wyników, w tym charakterystyk mechanizmu dźwigniowego tylnego zawieszenia,
- tworzenie wielosegmentowych charakterystyk siły sprężystości w elemencie resorującym,
- realizację obliczeń, w których profil poprzeczny opony opisany jest za pomocą elipsy.

Aplikacja oferuje także unikalne możliwości, takie jak:

- analiza geometrii motocykla z uwzględnieniem kąta skrętu kierownicy,
- analiza wielkości charakteryzujących geometrię pojazdu w oparciu o przebiegi czasowe: ugięcia elementów resorujących, kąta przechyłu oraz kąta skrętu kierownicy.

[42] URL: datamc.org/data-acquisition/adding-sensors/suspension-potentiometers [dostęp: 05.2023].



Rys. B.4. Etapy procesu obliczeniowego stworzonej aplikacji

Proces obliczeniowy podzielony został na trzy etapy (rys. B.4). Niezbędne wymiary oraz informacje o pojeździe przechowywane są w zbiorczym arkuszu kalkulacyjnym MS Excel.

Pierwszy etap obliczeń

Zbudowana aplikacja zapewnia wsparcie dla następujących układów tylnego zawieszenia:

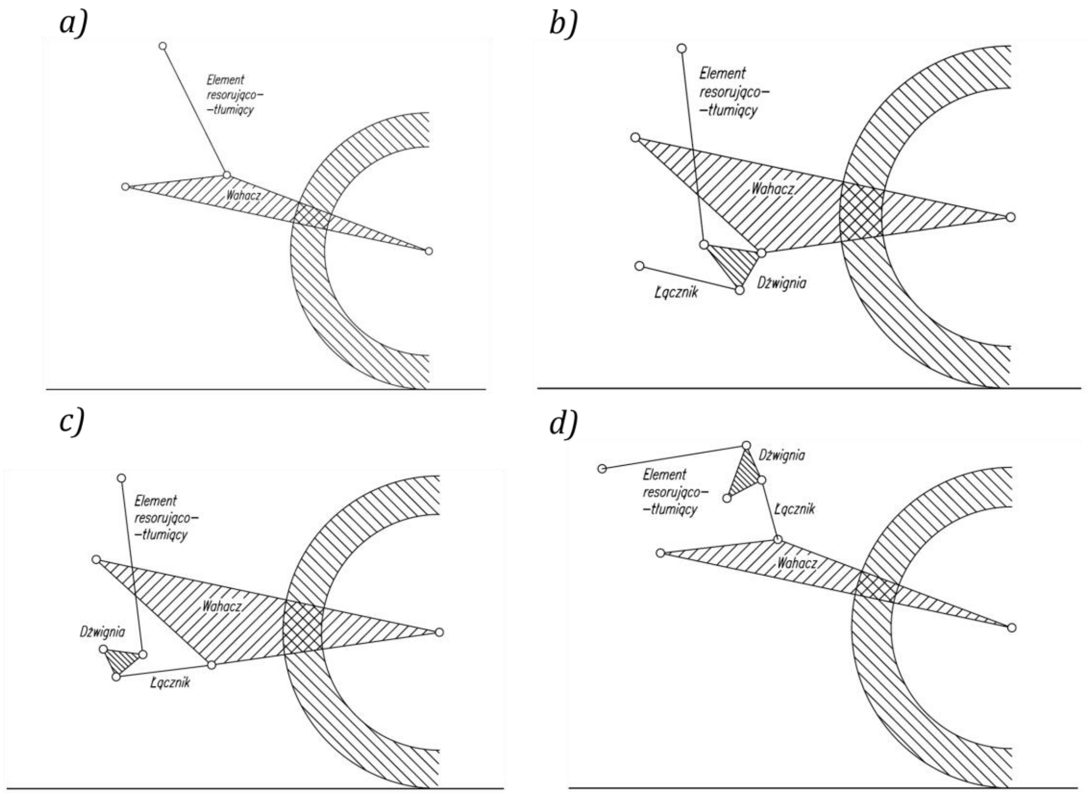
- elementu resorującego połączonego bezpośrednio z wahaczem (rys. B.5a),
- mechanizmu dźwigniowego typu ProLink (rys. B.5b),
- mechanizmu dźwigniowego typu Unitrak (rys. B.5c),
- mechanizmu dźwigniowego znanego z motocykli Ducati Panigale (rys. B.5c).

W ramach pierwszego etapu obliczeń wyznaczane są podstawowe charakterystyki zawieszenia tylnego koła:

- relacja kinematyczna między ugięciem sprężyny, a pionowym przemieszczeniem tylnego koła (rys. B.6a i rys. B.6b),
- sztywność zredukowana tylnego zawieszenia (rys. B.6c),
- statyczna siła pionowa wywołująca pionowe przemieszczenie koła (rys. B.6d).

Zamieszczone na rys. B.6 charakterystyki zostały przedstawione jako funkcje pionowego przemieszczenia tylnego koła.

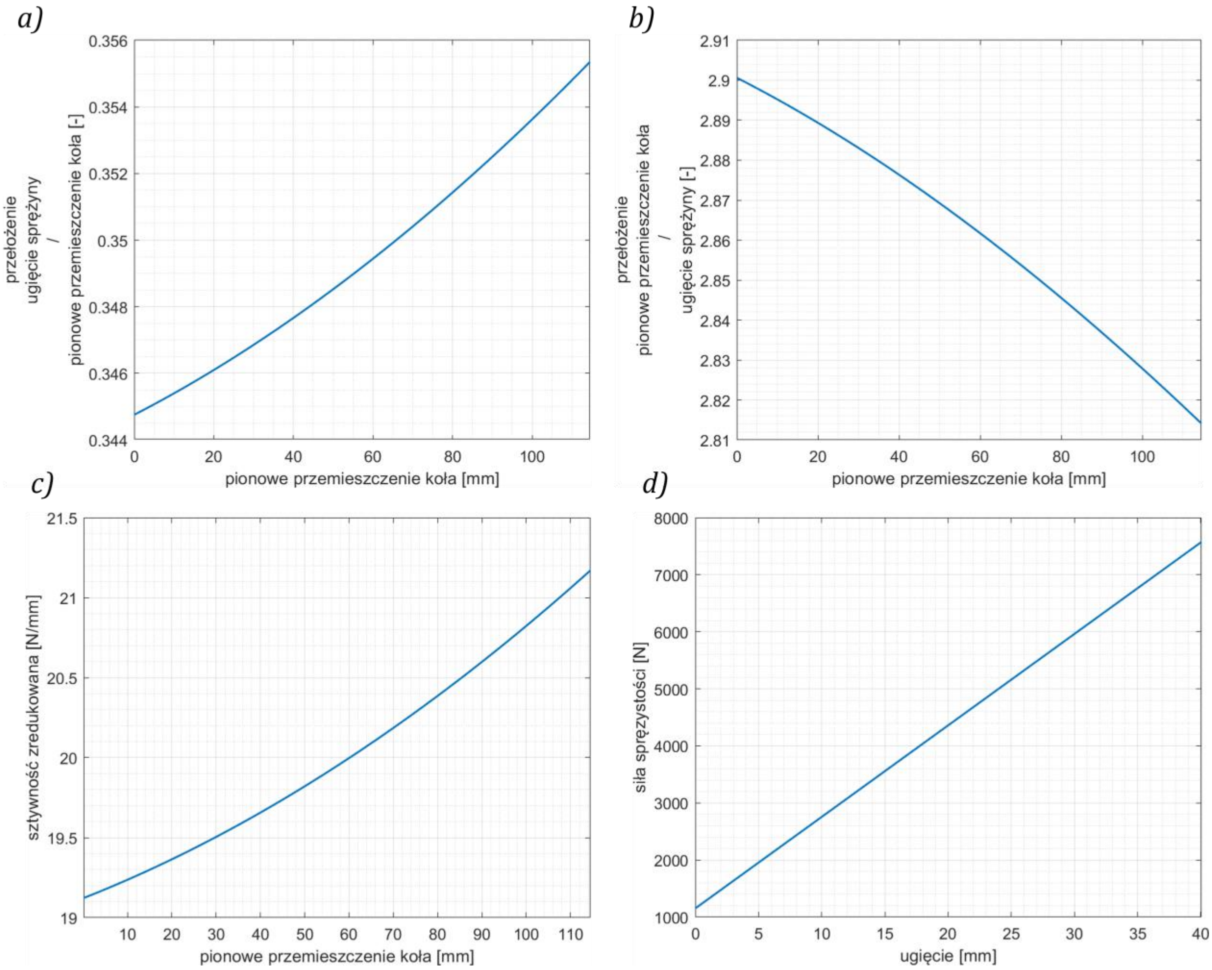
W etapie pierwszym wyznaczana jest dodatkowo charakterystyka elementu resorująco-tłumiącego. Przykład takiej charakterystyki dla standardowego elementu resorująco-tłumiącego stosowanego w zawieszeniu tylnego koła przedstawiony został na rys. B.7a. Elementem sprężystym jest wówczas liniowa sprężyna śrubowa oraz gaz sprężany w komorze kompensacyjnej amortyzatora. W stosowanych w motocyklowych zawieszeniach elementach resorująco-tłumiących przemieszczenie tłoka tłumika równe jest ugięciu elementu sprężystego. Budowa amortyzatora (elementu tłumiącego) implikuje nieliniowy przebieg siły sprężystości, również w przypadku zastosowania



Rys. B.5. Układy zawieszenia tylnego koła obsługiwane przez stworzoną aplikację: element resorująco-tłumiący połączony bezpośrednio z wahaczem (a), mechanizm dźwigniowy Pro-Link (b), mechanizm dźwigniowy Unitrak (c), mechanizm dźwigniowy stosowany w motocyklu Ducati Panigale (d)

sprężyny o charakterystyce liniowej. Poruszona kwestia zostanie dokładniej omówiona w dalszej części niniejszego załącznika na przykładzie elementów resorująco-tłumiących stosowanych w zawieszeniu przedniego koła. Używane dalej sformułowanie „charakterystyka elementu resorującego” dotyczyć będzie całkowitej siły sprężystości w elemencie resorująco-tłumiącym.

Charakterystyka elementu resorującego przedstawiona na rys. B.7b przyjmuje postać krzywej łamanej i opisuje element resorująco-tłumiący wyższej klasy. Fragment charakterystyki dla ugięć od 0 do 5 mm jest obszarem pracy tak zwanych sprężyn „top-out”, które działają w opozycji do sprężyny głównej i zmniejszają wartość siły, jaką należy zadziałać na element resorujący, by wywołać jego ugięcie. Sprężyny „top-out” stosowane są w celu poprawy kontaktu opony z jezdnią w przypadku małej wartości normalnej reakcji nawierzchni. Środkowa część charakterystyki jest taka sama jak na rys. B.7a. Trzeci fragment charakterystyki (ugięcie większe niż 21 mm) jest obszarem pracy poduszki gumowej, która zabezpiecza przed wykorzystaniem skoku amortyzatora i zderzeniem pomiędzy ruchomą a nieruchomą częścią elementu resorująco-tłumiącego.

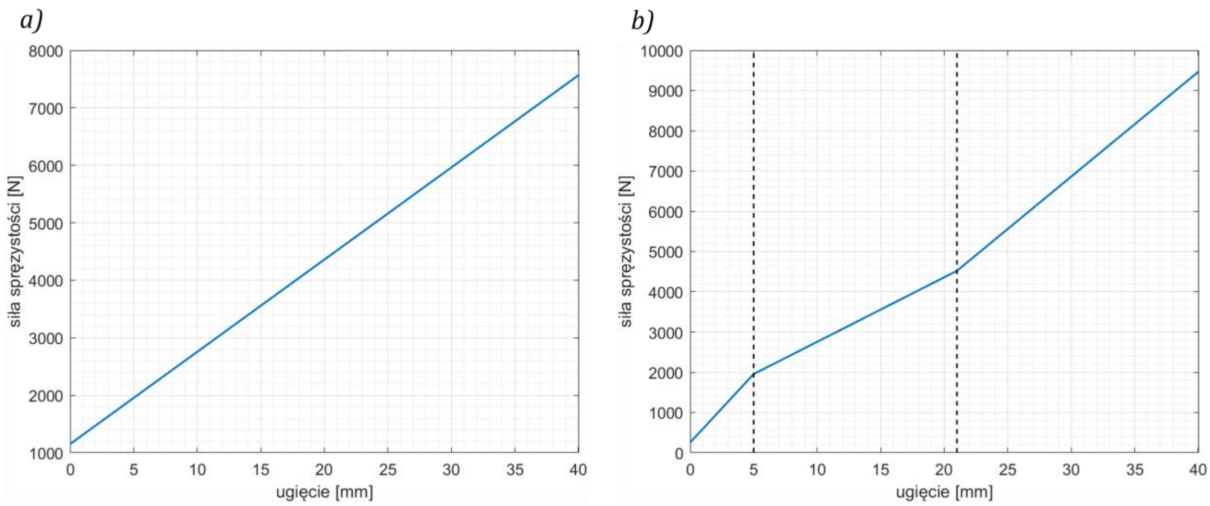


Rys. B.6. Generowane przez aplikację charakterystyki zawieszenia tylnego koła: zależność między ugięciem sprężyny a pionowym przemieszczeniem koła (a), zależność między pionowym przemieszczeniem koła a ugięciem sprężyny (b), sztywność zredukowana (c), siła pionowa przyłożona do tylnego koła (d). Charakterystyki wyrażone w funkcji pionowego przemieszczenia tylnego koła

Drugi etap obliczeń

Informacją przekazywaną pomiędzy pierwszym, a drugim etapem obliczeń jest kąt o jaki należy obrócić wahacz, by element sprężysty skrócił się o podaną wartość. Znajomość wspomnianego kąta obrotu wahacza oraz wymiarów geometrycznych motocykla pozwala na wyznaczenie położenia punktów charakterystycznych motocykla:

- osi przedniego i tylnego koła,
- osi wahacza,
- osi główki ramy,
- osi przedniej kolumny zawieszenia,
- osi koła łańcuchowego napędzającego.



Rys. B.7. Przebieg siły sprężystości w standardowym elemencie resorująco-tłumiącym zawieszenia tylnego koła (a), przebieg siły sprężystości w przypadku zastosowania sprężyn „top-out" oraz poduszki gumowej (b). Wykresy w funkcji ugięcia elementu sprężystego (sprężyny)

Na podstawie położenia punktów charakterystycznych obliczane są następujące wielkości:

- kąt główki ramy,
- wyprzedzenie oraz wyprzedzenie normalne,
- rozstaw osi,
- kąt nachylenia wahacza do płaszczyzny jezdni,
- kąty σ i τ przedstawione na rys. B.8 charakteryzujące reakcję zawieszenia tylnego koła na siłę napędową oraz siłę obwodową w łańcuchu [64].

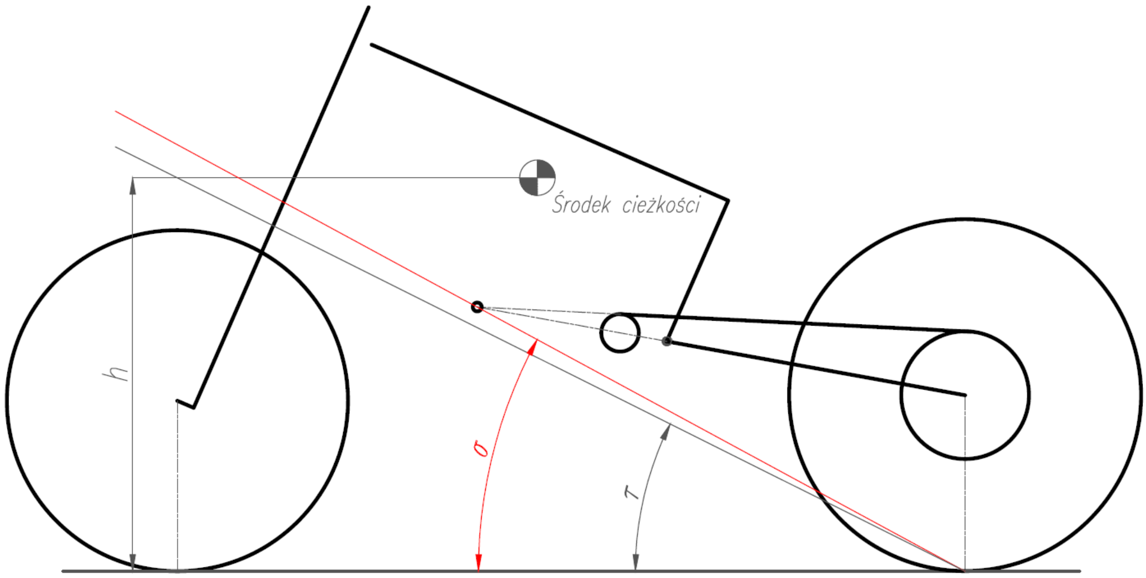
Wyniki z drugiego etapu obliczeń mogą zostać przedstawione w formie graficznej. Na rys. B.9 porównano geometrię motocykla Yamaha R3: w przypadku zerowej wartości ugięcia elementów resorujących (kolor szary) oraz dla ugięć rejestrowanych w trakcie mocnego hamowania (kolor czerwony, ugięcie elementu podatnego w zawieszeniu przedniego koła równe 120 mm oraz zerowe ugięcie zawieszenia tylnego koła).

Trzeci etap obliczeń

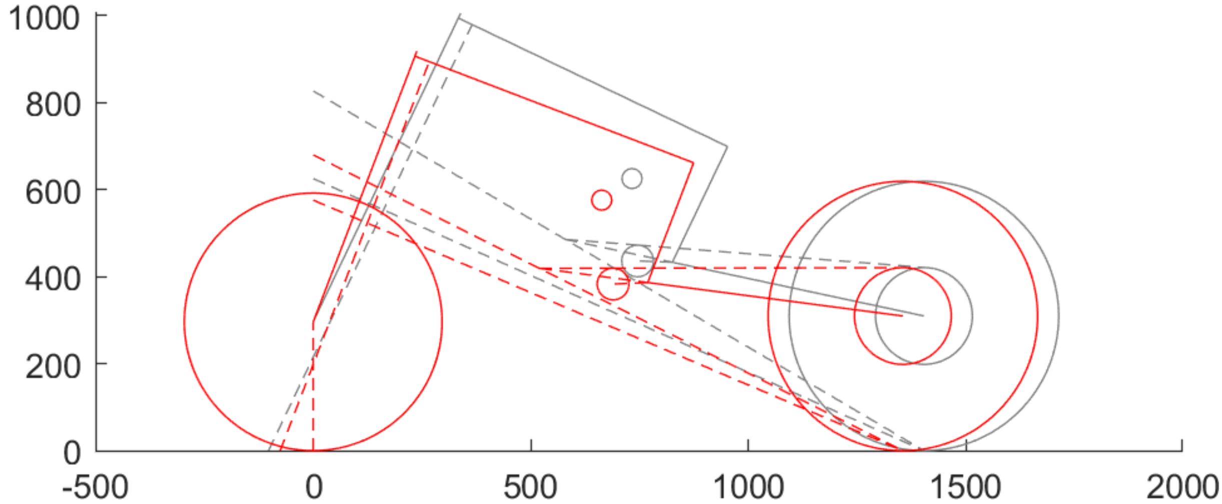
Informacją przekazywaną z drugiego do trzeciego etapu obliczeń jest wartość kąta główki ramy odpowiadająca zadanym wartościom ugięć elementów sprężystych. Kąt główki ramy wykorzystywany jest do wyznaczenia sztywności zredukowanej[43] zawieszenia

[43] Sztywność zredukowana zawieszenia jest to sztywność równoważnego zawieszenia, w którym masa resorowana połączona jest z masą nieresorowaną za pomocą pionowo skierowanej sprężyny i tłumika [64].

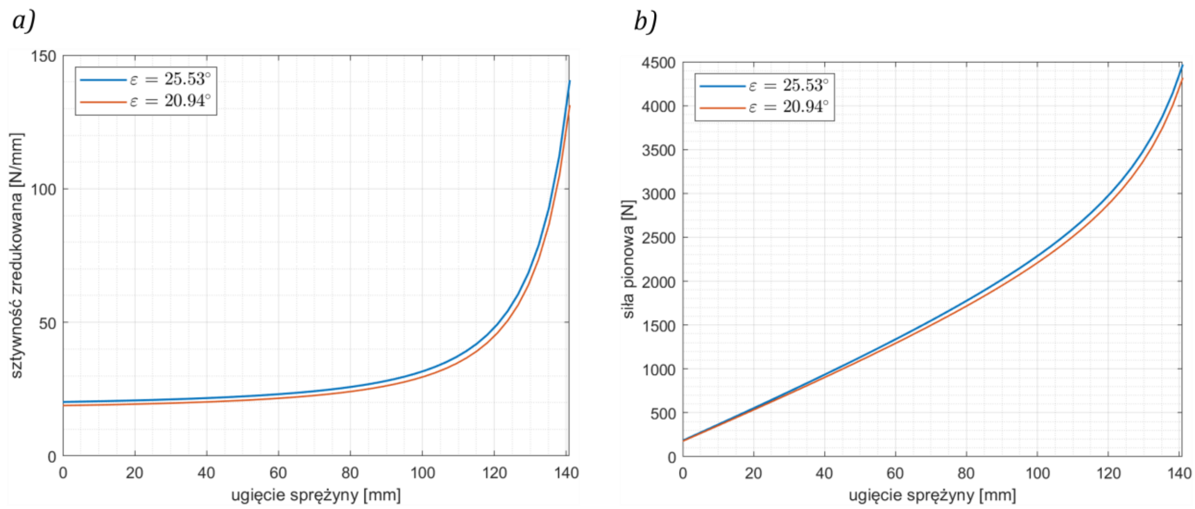
przedniego koła (rys. B.10a). Pozostałymi charakterystykami zawieszenia przedniego koła są wartość siły pionowej w funkcji ugięcia sprężyny (rys. B.10b) oraz zależność siły sprężystości od ugięcia elementu sprężystego (rys. B.11a).



Rys. B.8. Kąty τ oraz σ charakteryzujące reakcję zawieszenia tylnego koła na siłę napędową i siłę obwodową w łańcuchu



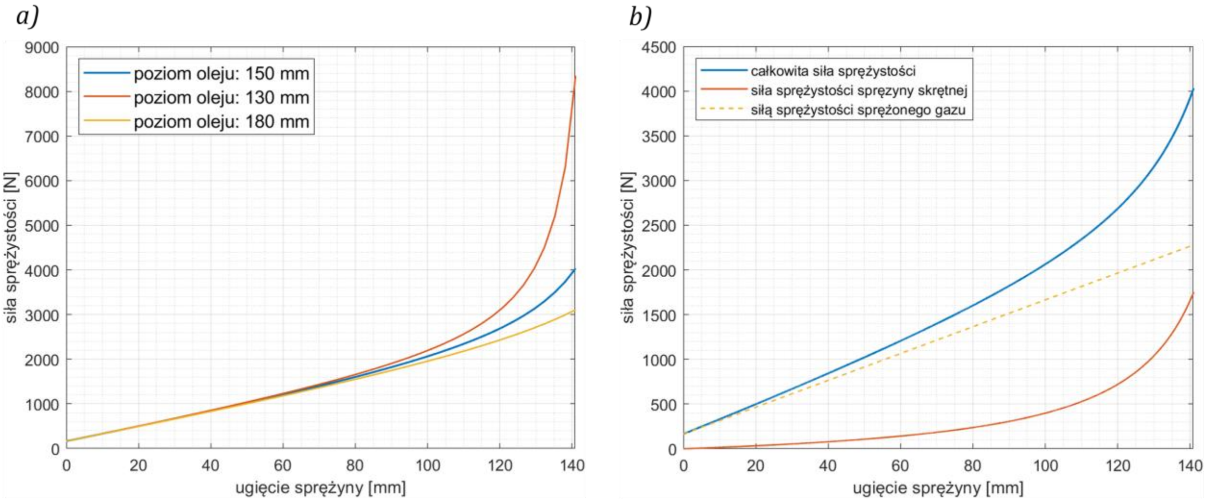
Rys. B.9. Przykładowy wynik obliczeń etapu drugiego. Porównanie geometrii motocykla Yamaha R3 dla różnej wartości ugięcia elementu resorującego w zawieszeniu przedniego oraz tylnego koła



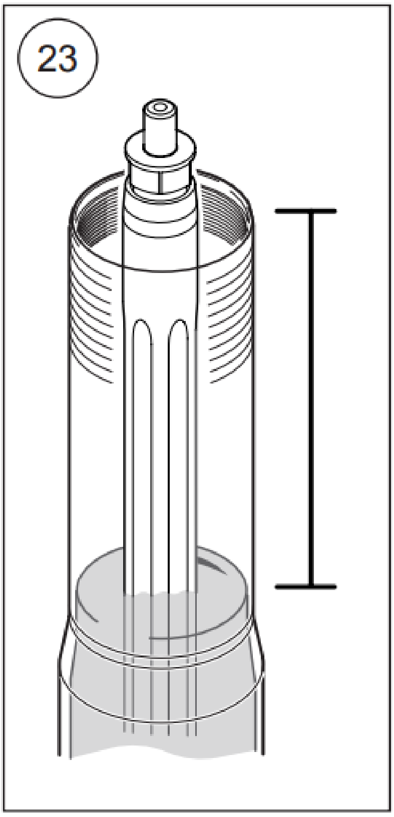
Rys. B.10. Sztywność zredukowana (a) oraz siła pionowa (b) w funkcji ugięcia sprężyny, dla dwóch wartości kąta główki ramy

Przykładowa charakterystyka widelca teleskopowego (zależność siły sprężystości od ugięcia elementu sprężystego) została przedstawiona na rys. B.11a, zaś rys. B.11b przedstawia składniki wypadkowej siły sprężystości. Progresywna charakterystyka siły sprężystości wynika ze zmiany objętości komory kompensacyjnej amortyzatora, którą powoduje przemieszczająca się dolna noga teleskopu. Malejąca objętość komory kompensacyjnej wywołuje wzrost ciśnienia wypełniającego ją gazu i w konsekwencji wzrost siły jaką należy przyłożyć do dolnej nogi teleskopu by wywołać jej przemieszczenie.

Początkowa objętość komory kompensacyjnej zależy od objętości oleju w amortyzatorze. Producent danego komponentu informuje o wymaganej objętości oleju w dwojaki sposób: podając dokładną wartość liczbową albo tak zwany poziom oleju. Przez poziom oleju rozumiana jest odległość pomiędzy górną krawędzią nieruchomej nogi teleskopu (w pozycji, w której noga nieruchoma opiera się o dolną część nogi ruchomej), a lustrem cieczy (oleju), co zostało przedstawione w schematyczny sposób na rys. B.12. Szczegółowy opis procedury pomiaru poziomu oleju oraz zakres dopuszczalnych wartości podawany jest w specyfikacji danego elementu resorująco-tłumiącego. Wpływ poziomu oleju (objętości komory kompensacyjnej) na progresję siły sprężystości zilustrowany został na rys. B.11a.



Rys. B.11. Wpływ objętości komory kompensacyjnej na przebieg siły sprężystości. Wykresy w funkcji ugięcia sprężyny elementu resorująco-tłumiącego w zawieszeniu przedniego koła (a) oraz składniki całkowitej siły sprężystości (b)



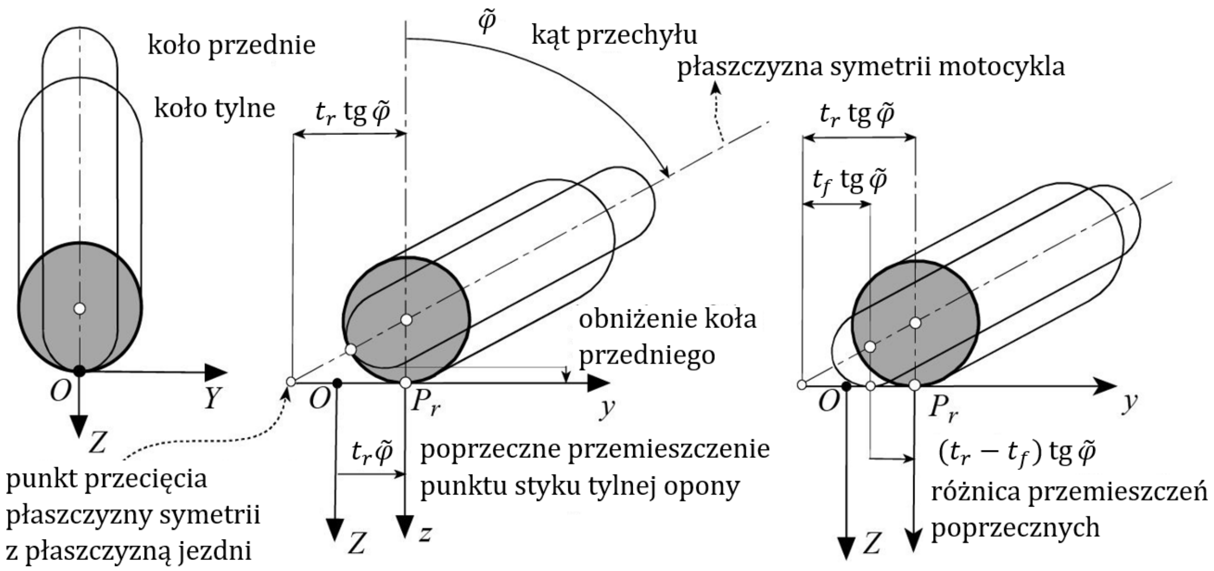
Rys. B.12. Schematyczna ilustracja[44] przedstawiająca procedurę pomiaru poziomu oleju w widelcu teleskopowym

[44] Ilustracja z instrukcji montażu akcesoryjnego układu tłumienia firmy Ohlins przeznaczonego do motocykla Yamaha R3, kod produktu: 21944-01, instrukcja dostępna pod adresem URL: www.ohlins.com/document/74749/ [dostęp: 03.2023].

Analiza wpływu kąta przechyłu oraz kąta skrętu kierownicy na geometrię pojazdu

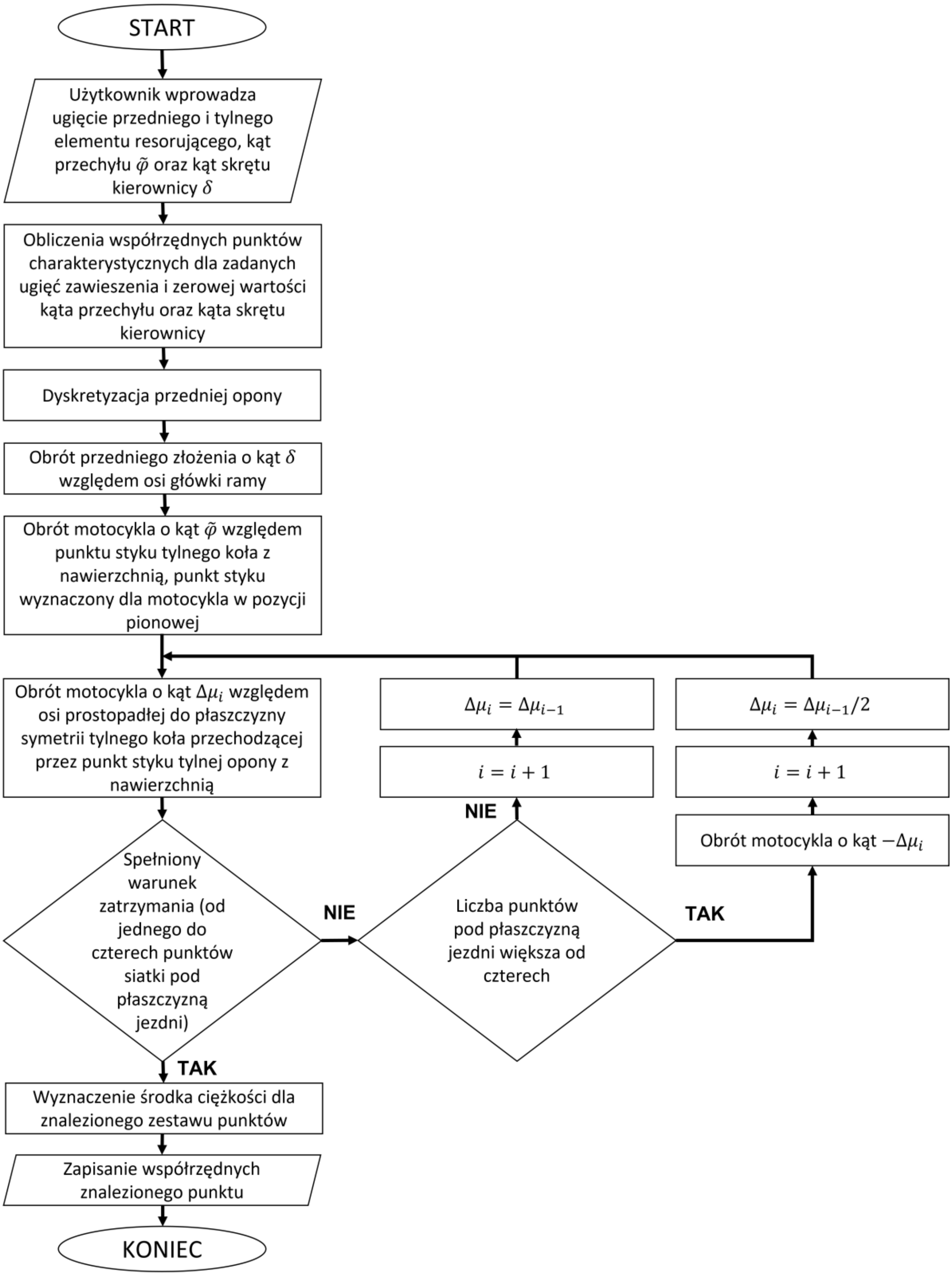
Ze względu na różną szerokość opon, przechylenie motocykla powoduje równoczesny ruch pochylający ku przodowi. Omawiana sytuacja została zilustrowana za pomocą rys. B.13, na którym przedstawiony został widok tyłu motocykla wyposażonego w opony o kołowym przekroju poprzecznym. Promień przekroju poprzecznego przedniej i tylnej opony oznaczony został odpowiednio symbolami t_f i t_r. Przy założeniu zerowego kąta skrętu kierownicy δ oraz zerowego poślizgu w kierunku poprzecznym, przechylenie motocykla o kąt $\tilde{\varphi}$ powoduje przesunięcie punktu styku tylnej opony z jezdnią o odległość równą $t_r\tilde{\varphi}$. W związku z różnicą szerokości opon przednie koło unosi się ponad jezdnię (środkowa ilustracja na rys. B.13). Aby kontakt przedniej opony z jezdnią pozostał zachowany motocykl obraca się względem osi y o pewien kąt $\Delta\mu$. Różnica przemieszczeń poprzecznych punktów styku opon wynosi wówczas $(t_r - t_f)\sin\varphi$.

Kąt pochylenia $\Delta\mu$ dla niezerowej wartości kątów $\tilde{\varphi}$ oraz δ może zostać wyznaczony za pomocą skomplikowanej analitycznej zależności zamieszczonej między innymi w [73], która została wyprowadzona dla kołowego przekroju poprzecznego opony. W trakcie opracowywania omawianej aplikacji przyjęte zostało założenie, że przekrój opony opisany będzie za pomocą elipsy, która lepiej aproksymuje rzeczywisty przekrój poprzeczny opony. Dlatego też, aby uniknąć konieczności wyprowadzania od nowa

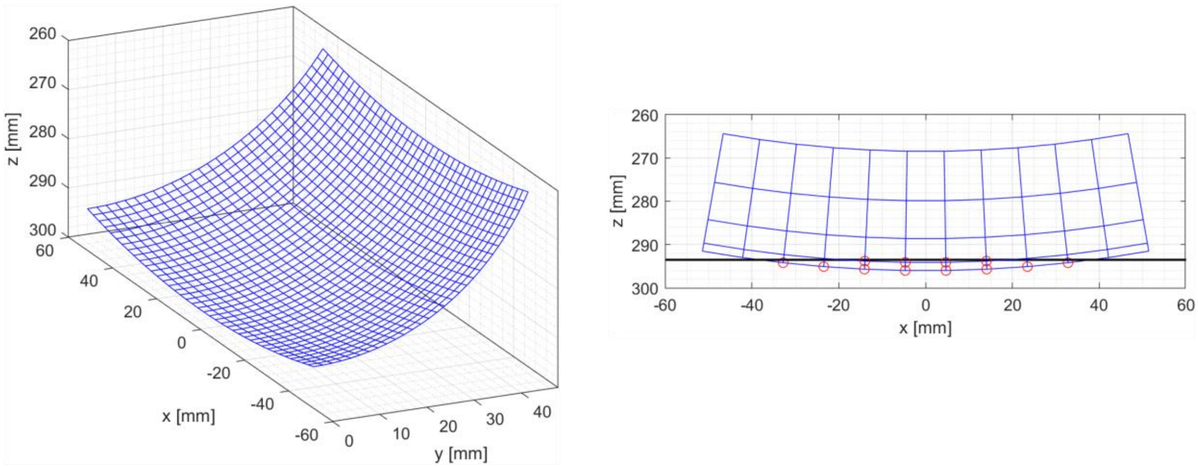


Rys. B.13. Poprzeczne przemieszczenie punktów styku opon z jezdnią w przypadku motocykla wyposażonego w opony o różnej szerokości. Rysunek pochodzi z książki [64], opisy zostały przetłumaczone przez autora rozprawy skomplikowanej zależności na kąt $\Delta\mu$ podjęto decyzję, że kąt $\Delta\mu$ oraz współrzędne punktu styku przedniej opony z nawierzchnią zostaną wyznaczone numerycznie.

Schemat blokowy zastosowanego algorytmu przedstawiony został na rys. B.14. W pierwszym etapie obliczeń wyznaczane jest położenie wszystkich punktów charakterystycznych jednośladu przy założeniu zerowego kąta przechyłu $\tilde{\varphi}$ oraz kąta skrętu kierownicy δ. Następnie współrzędne punktów przekształcane są do odpowiednich lokalnych układów współrzędnych. W kolejnym kroku przeprowadzana jest dyskretyzacja fragmentu przedniej opony (rys. B.15a), a następnie wprowadzany jest obrót przedniego złożenia o kąt δ względem osi główki ramy oraz obrót całego motocykla o kąt $\tilde{\varphi}$ względem pierwotnego punktu styku tylnej opony z nawierzchnią (punktu styku tylnej opony z nawierzchnią dla motocykla ustawionego pionowo). Złożenie tych dwóch obrotów skutkuje podniesieniem przedniego koła ponad płaszczyznę jezdni, analogicznie do środkowej ilustracji z rys. B.13. W następnym kroku zaczyna się iteracyjny proces poszukiwania styku przedniej opony z jezdnią. Motocykl obracany jest o pewien z góry narzucony kąt $\Delta\mu_0$. Obrót następuje wokół osi prostopadłej do płaszczyzny symetrii tylnego koła przechodzącej przez punkt styku tylnej opony z jezdnią. Po wykonaniu obrotu zliczana jest liczba węzłów siatki zdyskretyzowanego przedniego koła, które znajdują się pod płaszczyzną jezdni (rys. B.15b). Jeżeli żaden węzeł siatki nie znalazł się poniżej płaszczyzny jezdni motocykl jest ponownie obracany o kąt $\Delta\mu_i = \Delta\mu_{i-1}$, gdzie i jest numerem iteracji procesu obliczeniowego. Jeśli liczba węzłów siatki pod powierzchnią jezdni jest większa od czterech, motocykl przywracany jest do pozycji z iteracji poprzedniej, zaś przyjęta wartość kąta pochylenia dzielona jest na pół. Obliczenia trwają do momentu, aż pod płaszczyzną jezdni znajdzie się od jednego do czterech węzłów siatki. Punkt styku jest wówczas przyjmowany w środku ciężkości znalezionych punktów. Wprowadzona graniczna liczba czterech węzłów siatki miała na celu ograniczenie liczby iteracji w przypadku, gdy element siatki wchodzący w kontakt z płaszczyzną jezdni jest do niej równoległy. W dalszej kolejności punkty styku opon (przedniej i tylnej) rzutowane są na płaszczyznę symetrii tylnego koła, a następnie wyznaczane są wielkości charakteryzujące geometrię pojazdu. Wpływ kątów $\tilde{\varphi}$ i δ na geometrię pojazdu przedstawiony został w tabeli B.1.



Rys. B.14. Schemat blokowy algorytmu poszukiwania kontaktu przedniej opony z jezdnią *a)* *b)*



Rys. B.15. Fragment przedniej opony po dyskretyzacji (a), wykryty kontakt między oponą a nawierzchnią w 12 węzłach siatki (b)

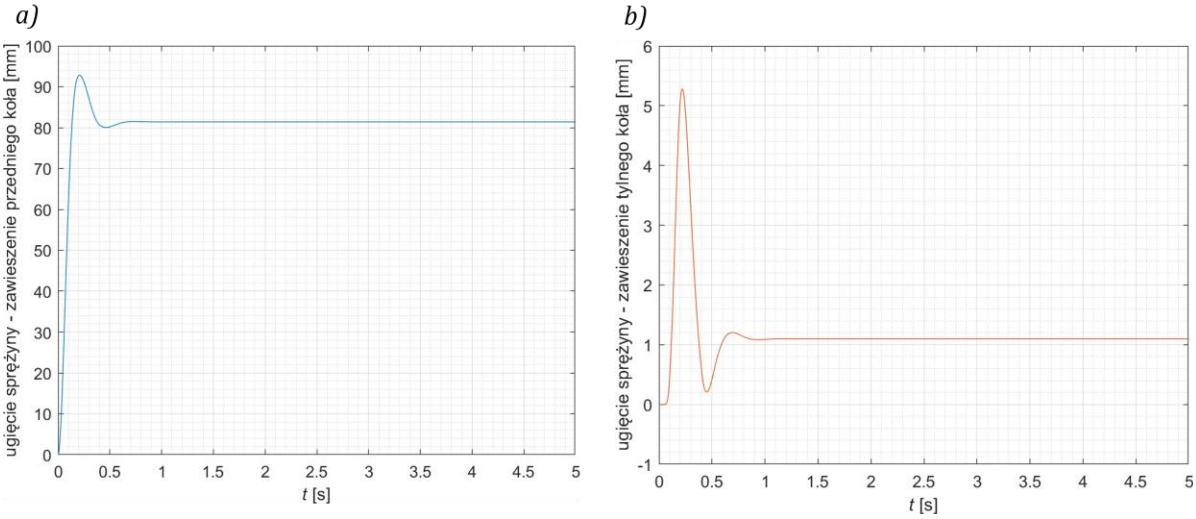
Tabela B.1. Wpływ przechylenia $\tilde{\varphi}$ oraz kąta skrętu kierownicy δ na geometrię pojazdu. Obliczenia przeprowadzone na przykładzie motocykla Yamaha R3, dla 40. milimetrowego ugięcia sprężyny widelca teleskopowego oraz 9. milimetrowego ugięcia elementu sprężystego tylnego zawieszenia

		Konfiguracja 1 $\tilde{\varphi} = 0°, \delta = 0.0°$	Konfiguracja 2 $\tilde{\varphi} = 50°, \delta = 0.0°$	Konfiguracja 3 $\tilde{\varphi} = 50°, \delta = 0.5°$
ε	kąt główki ramy	25.11°	24.57°	24.54°
a_n	wyprzedzenie normalne	90.6 mm	79.8 mm	77.4 mm
a	wyprzedzenie	100.1 mm	87.8 mm	84.7 mm
w	rozstaw osi	1390.6 mm	1390.8 mm	1393.1 mm
α_s	kąt nachylenia wahacza do podłoża	9.08°	8.54°	8.51°
τ	kąt transferu obciążenia	23.28°	21.96°	21.93°
σ	kąt przysiadu	27.33°	25.21°	25.18°

C. Weryfikacja modelu drgań na drodze obliczeń analitycznych

Weryfikując poprawność budowy modelu pojazdu założono sytuację, w której pojazd hamuje z opóźnieniem $-4\ \mathrm{m/s^2}$ zjeżdżając z wzniesienia o kącie nachylenia 5°. Dla prostoty rachunków analitycznych pominięto opory toczenia, opór aerodynamiczny oraz opór bezwładności w ruchu obrotowym kół.

Modelowanym pojazdem był motocykl Yamaha R3. Wyznaczone numerycznie ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu przedniego i tylnego koła, po wygaszeniu drgań, wynosi odpowiednio 81.26 mm oraz 1.10 mm. Przebiegi czasowe ugięć zostały przedstawione na rys. C.1.



Rys. C.1. Ugięcie elementów resorujących pojazdu, rezultat otrzymany dla modelu drgań

Na pojazd działają siły przedstawione na rys. C.2 i rys. C.3. Wymiary zamieszczone na rysunkach zostały zestawione w tabeli C.1. Siła grawitacji oraz siła bezwładności zostały przyłożone do wypadkowego środka ciężkości wszystkich czterech ciał układu.

Obciążenie pionowe przedniego i tylnego koła wynosi odpowiednio

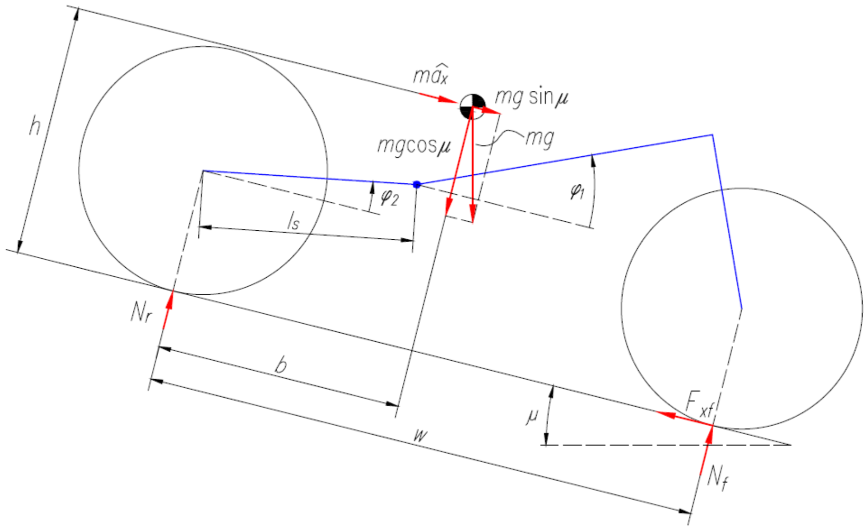
$$N_f = \frac{1}{w}[mg(b\cos\mu + h\sin\mu) + m\hat{a}_x h] = 1529.04\ \mathrm{N} \tag{C.29}$$

$$N_r = \frac{1}{w}\big[mg\big((w-b)\cos\mu - h\sin\mu\big) - m\hat{a}_x h\big] = 611.18\ \mathrm{N} \tag{C.30}$$

Siła wzdłużna oznaczona symbolem F_{xf} wynosi

$$F_{xr} = m\hat{a}_x + mg\sin\mu = 1063.24\ \mathrm{N}. \tag{C.31}$$

Siły N_1 oraz F_1 (na podstawie rys. C.3a) wynoszą odpowiednio



Rys. C.2. Schemat pojazdu oraz działające na pojazd siły

$$N_1 = N_f - m_4 g\cos\mu = 1431.31\ \mathrm{N} \tag{C.32}$$

$$F_1 = F_{xf} - m_4 g\sin\mu - m_4\hat{a}_x = 1014.69\ \mathrm{N}. \tag{C.33}$$

Rzutując siły N_1 i F_1 na kierunek osi widelca teleskopowego otrzymujemy siłę F_{fs} ściskającą przednie zawieszenia pojazdu równą

$$F_{fs} = F_1\sin\varphi_1 + N_1\cos\varphi_1 = 1711.28\ \mathrm{N}. \tag{C.34}$$

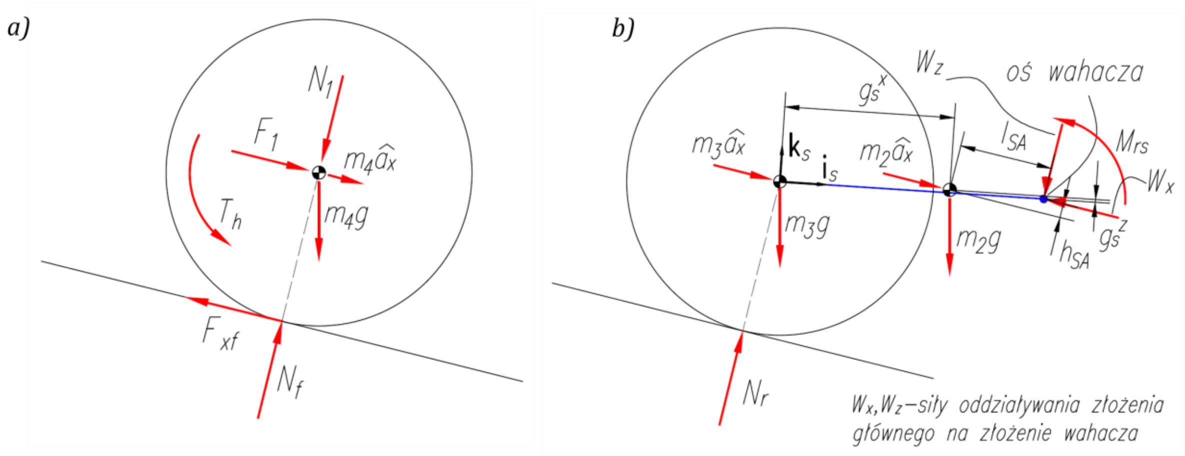
Ugięcie elementu sprężystego może być wyznaczone na podstawie charakterystyki z rys. 7.9a. Siła F_{fs} o wartości 1711.28 N odpowiada ugięciu 81.26 mm. Wynik jest zgodny z rezultatem analizy numerycznej.

W celu wyznaczenia ugięcia elementu sprężystego w zawieszeniu tylnego koła zostało zapisane równanie momentów wokół osi wahacza (zgodnie z rys. C.3)

$$\begin{aligned} M_{rs} = l_s[(N_r - m_3 g\cos\mu)\cos\varphi_2 - m_3(\hat{a}_x + g\sin\mu)\sin\varphi_2] + \\ -m_2[l_{SA}\, g\cos\mu + h_{SA}(g\sin\mu + \hat{a}_x)] = 245.05\ \mathrm{Nm} \end{aligned} \tag{C.35}$$

Zgodnie z charakterystyką z rys. 7.10a, moment M_{rs} o wartości 245.05 Nm odpowiada skręceniu sprężyny kołowej o kąt 0.321°. Za pomocą charakterystyki z rys. 7.10b można stwierdzić, że wyznaczonemu kątowi skręcenia sprężyny kołowej odpowiada ugięcie elementu sprężystego w zawieszeniu tylnego koła równe 1.10 mm.

Wyniki obliczeń analitycznych potwierdziły wyniki otrzymane za pomocą modelu numerycznego.



Rys. C.3. Siły i momenty działające na przednie (a) oraz tylne (b) koło pojazdu. Na rysunkach, ze względu na przyjęte założenia, pominięto moment stycznych sił bezwładności oraz przesunięcie pionowych reakcji nawierzchni

Tabela C.1. Wartości wykorzystywanych wielkości

Wielkość	Wartość	Jednostka
m_1	185	kg
m_2	10	kg
m_3	14	kg
m_4	10	kg
w	1369.691	mm
b	684.924	mm
h	591.045	mm
l_s	591.000	mm
φ_1	22.590	°
φ_2	8.807	°
g_s^x	341.000	mm
g_s^z	5.000	mm
l_{SA}	247.818	mm
h_{SA}	33.336	mm