

Katarzyna Słomczyńska  
Instytut Matematyki  
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN  
Podchorążych 2, 30-084 Kraków  
e-mail: kslomcz@up.krakow.pl

Kraków, 22 maja 2023 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej  
Pana mgr. Tomasza Penzy  
„Sufficient Conditions for a Maltsev Product  
of Two Varieties To Be a Variety”

Pod koniec lat 60-tych ubiegłego stulecia Anatolij Malcew, uogólniając wcześniejszą konstrukcję Neumannów dla rozmaitości grup, wprowadził pojęcie znane później w literaturze jako *produkt Malcewa*. Jednakże, w odróżnieniu od sytuacji jaką napotykamy w grupach, w przypadku ogólnym klasa algebr będąca produktem Malcewa dwóch rozmaitości tego samego typu nie musi być rozmaitością. Pytanie, kiedy rzeczywiście jest ona rozmaitością stanowi główny problem, którego rozwiązaniem zajął się w swojej rozprawie mgr Tomasz Penza.

Problem ten stanowił także temat trzech artykułów naukowych [1, 2, 3] opublikowanych przez niego ostatnio wspólnie z promotorem Anną Romanowską (a w pierwszym przypadku także z Cliffem Bergmanem) w *Algebra Universalis*. Wiele z wyników zawartych w dwóch ostatnich publikacjach znalazło się w rozprawie doktorskiej. Zostały one jednak istotnie rozszerzone o nowy mocniejszy warunek wystarczający do tego, aby produkt Malcewa dwóch rozmaitości był rozmaitością. Rezultat ten pokazał autor używając innych technik dowodowych niż w [3]. Uogólnia on także inne podobne warunki dostateczne znane w literaturze.

W szczególności autora ciekawiła sytuacja, w której drugi czynnik produktu Malcewa jest rozmaitością termowo idempotentną. Pojęcie to zostało wprowadzone w [3], istotnie rozszerzając dobrze znaną wcześniej definicję *rozmaitości idempotentnej*. Punktem wyjścia dla tego pojęcia stało się wprowadzenie w [2] definicji *termu idempotentnego* omawianego w Rozdziale 3. Szereg stwierdzeń zawartych w tym rozdziale wyjaśnia w pełni jego znaczenie

w kontekście definicji produktu Malcewa. W szczególności klasa równoważności wyznaczona w algebrze wolnej przez taki term jest w niej elementem idempotentnym. Używając tych termów w Rozdziale 4, autor podaje, wcześniej opublikowaną w [2], konstrukcję bazy równościowej dla rozmaitości generowanej przez produkt Malcewa dwóch rozmaitości (Twierdzenie 4.2). Własności tej bazy prowadzą z kolei do pojęcia *termowo idempotentnych identyczności*, które są badane w Rozdziale 5, a następnie do definicji *termowo idempotentnych rozmaitości* rozważanych wielostronnie w Rozdziale 6 (a wcześniej w [3]). Rozważania te są wyczerpująco ilustrowane wieloma przykładami, podobnie zresztą jak i w całej rozprawie. Pełna charakteryzacja tych rozmaitości (także pochodząca z [3]) podana jest w Rozdziale 7 (Twierdzenie 7.3) w języku replik kongruencji.

Główny wynik rozprawy (Twierdzenie 8.6) rozszerzający rezultat uzyskany w [3] a osiągnięty, jak już wspominałam, w zupełnie nowy sposób z wykorzystaniem ciągu stwierdzeń zawartych w Rozdziałach 7 i 8, podaje warunki wystarczające na to, żeby produkt dwóch rozmaitości, z których druga jest termowo idempotentna był także rozmaitością. Konsekwencją tego wyniku są inne warunki dostateczne przedstawione w Rozdziale 9. W szczególności, okazuje się (Twierdzenie 9.1), że produkt Malcewa rozmaitości kongruencyjnie permutowalnej i termowo idempotentnej tworzy rozmaitość. Interesujące wydają się też na przykład, rozszerzenia uprzednio uzyskanych wyników (Twierdzenie 9.5), a także nowe dowody znanych rezultatów (Twierdzenia 9.3 i 9.10). Na zakończenie rozprawy autor stawia kilka, jak się wydaje ciekawych, problemów otwartych.

Rozprawa złożona jest z dziewięciu rozdziałów, w tym wstępu, a bibliografia liczy dwadzieścia jeden pozycji i wydaje się być wystarczająca. Wstęp jest obszerny i zawiera omówienie historii oraz aktualnego stanu badań nad produktami Malcewa, zarówno absolutnymi, na których skoncentrował się w rozprawie autor, jak i względnymi, ograniczonymi do określonej klasy algebr. Praca jest bardzo starannie zredagowana pod względem matematycznym, a czytając dowody nie znalazłam w nich żadnych błędów, ani nawet luk. Wyniki opatrzone są ciekawymi komentarzami i przykładami ułatwiającymi zrozumienie sensu wprowadzanych pojęć, a także lekturę dowodów twierdzeń. Autor wykazuje się przy tym sporą biegłością matematyczną i szeroką znajomością algebry uniwersalnej. Posiada on już zresztą w dorobku trzy prace uzyskane wraz z współautorami w latach ubiegłych we wiodącym w tej dziedzinie czasopiśmie naukowym *Algebra Universalis*, które zarówno wy-

korzystał, jak i twórczo rozwinął w rozprawie doktorskiej.

Szczególne wrażenie zrobił na mnie pozornie krótki a w gruncie rzeczy skomplikowany dowód głównego twierdzenia, gdzie trudności techniczne zostały jednak zręcznie rozłożone na wiele wcześniejszych stwierdzeń rozrzuconych po niemal całej rozprawie. Widać, że jej konstrukcja została starannie przemyślana. Ma ona zwarty charakter i wszystkie rozumowania prowadzą jasno do ostatecznego celu zawartego w tytule rozprawy. Postawiony w niej problem badawczy jest zarazem ważny, jak i nietrywialny. Choć oczywiście, co przyznaje sam autor, uzyskane wyniki nie wyczerpują bynajmniej możliwości dalszych uogólnień, to jednak wnoszą bez wątpienia istotny wkład w zrozumienie pojęcia produktu Malcewa.

Podsumowując, uważam, że rozprawa doktorska mgr. Tomasza Penzy stanowi rozwiązanie oryginalnego problemu naukowego i dowodzi, że posiada on wystarczającą wiedzę w zakresie dyscypliny matematyka konieczną do prowadzenia samodzielnej pracy naukowej. Tym samym praca ta spełnia odpowiednie wymogi zawarte w art. 187 ustawy „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce” stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego **wnoszę o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Ze względu na to, że starannie napisana i przejrzyste zredagowana rozprawa mgr. Tomasza Penzy w sposób istotny uogólnia wcześniej uzyskane wyniki dotyczące produktu Malcewa, przyczyniając się tym samym do głębszego zrozumienia tego już klasycznego i ważnego dla algebry uniwersalnej pojęcia, a jednocześnie zastosowane przez autora techniki dowodowe noszą niewątpliwie znamiona oryginalności **wnoszę też o wyróżnienie rozprawy przez Radę Dyscypliny Matematyka Politechniki Warszawskiej.**

## Literatura

- [1] Bergman, C., Penza, T., Romanowska, A. B., Semilattice sums of algebras and Maltsev products of varieties, *Algebra Universalis* 81:33 (2020).
- [2] Penza, T., Romanowska, A. B.: Maltsev products of varieties, I. *Algebra Univers.* 82:33 (2021).
- [3] Penza, T., Romanowska, A. B.: Maltsev products of varieties, II. *Algebra Univers.* 83:21 (2022).