Streszczenie

Jednym z klasycznych otwartych problemów kombinatoryki, na styku teorii grafów i geometrii, jest tak zwany problem Hadwigera–Nelsona. Pytanie brzmi: jaka jest minimalna liczba kolorów, by pokolorować płaszczyznę euklidesową w taki sposób, że dowolne dwa punkty w odległości 1 mają różne kolory? Można to pytanie przetłumaczyć również na język teorii grafów definiując tzw. graf jednostkowy płaszczyzny i badając jego liczbę chromatyczną. Choć problem ten jest od ponad 70 lat otwarty, to próby jego rozwiązania zainspirowały szereg pokrewnych pytań i ciekawych wyników w takich obszarach jak geometria, kombinatoryka, topologia, teoria miary czy algebra abstrakcyjna. Niniejsza praca dotyczy wybranych problemów kolorowania płaszczyzny, w których celem jest uniknięcie wystąpienia pewnych struktur (rozumianych jako konfiguracje punktów pokolorowane w określony sposób), przy użyciu możliwie małej liczby kolorów. Prawie zawsze struktury te mają postać skończonego, współliniowego zbioru punktów. Ponadto w ostatnich trzech rozdziałach struktury te wywodzą się z kombinatoryki na słowach. Ta gałąź matematyki na styku kombinatoryki z algebrą i informatyką teoretyczną jest drugim fundamentem przedstawianych badań. Klasycznym przykładem wyniku z tego zakresu jest twierdzenie Thuego (1906): istnieje nieskończony ciąg na 3 symbolach, który nie zawiera repetycji, tj. dwóch identycznych bloków jeden po drugim (gdzie blok to podciąg złożony z kolejnych wyrazów).

W rozdziale 2. drugim przedstawiamy wyniki dotyczące kolorowań płaszczyzny, w których żadna para punktów w odległości z zadanego przedziału nie może mieć tego samego koloru. Praca skupia się przede wszystkim na dolnych ograniczeniach na minimalną liczbę kolorów – dowody opierają się na połączeniu teoretycznego rozumowania z komputerowym sprawdzeniem kolorowalności pewnych skończonych zbiorów punktów. Dzięki temu możemy wyznaczyć minimalną liczbę kolorów dla dwóch rodzin przedziałów – jedna z nich (odpowiadająca 7 kolorom) rozszerza wcześniej znaną rodzinę, druga zaś (odpowiadająca 9 kolorom) jest nowa. W ten sposób otrzymujemy jedyne znane rodziny tzw. grafów dystansowych na płaszczyźnie z wyznaczoną liczbą chromatyczną (z dokładnością do pewnych podgrafów otrzymanych grafów i wyjąwszy przypadki trywialne).

Rozdział 3. poświęcony jest unikaniu monochromatycznego wystąpienia struktur złożonych z kilku punktów. Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer i Straus (1973) skonstruowali kolorowanie, które przy pomocy tylko 2 kolorów unika monochromatycznego ciągu 6 punktów współliniowych o kolejnych odległościach równych 1. Jednak gdy warunek odległości równej 1 zastąpimy warunkiem odległości z dowolnego zadanego przedziału, to wspomniane kolorowanie nie będzie już spełniać takiej własności. My pokazujemy, że można skonstruować 2-kolorowanie nie zawierającego monochromatycznego ciągu 7 współliniowych punktów o kolejnych odległościach z pewnego przedziału. Tematyka ta jest szczególnie związana z klasycznymi pytaniami głównego nurtu euklidesowej

teorii Ramseya (jakkolwiek cała niniejsza praca wpisuje się w obszar euklidesowej teorii Ramseya).

W rozdziałach 4. i 5. badamy kolorowania płaszczyzny unikające repetycji i innych wzorców, w języku kombinatoryki na słowach. Jako pierwszy krok odpowiadamy na pytanie Grytczuka (2008) pokazując, że przeliczalna liczba kolorów nie wystarczy do pokolorowania grafu jednostkowego płaszczyzny, aby ciąg kolorów dowolnej ścieżki nie zawierał repetycji. Dlatego dalsze rozważania skupione są na ścieżkach liniowych, tj. współliniowych ciągach punktów o kolejnych odległościach równych 1. W jednym z głównych twierdzeń pracy pokazujemy, że istnieje 18-kolorowanie, dla którego ciąg kolorów dowolnej ścieżki liniowej nie zawiera repetycji (co poprawia wcześniej znane w literaturze 36-kolorowanie). Wyniki w rozdziale 4. dotyczą również unikania innych wzorców i są w większości konstruktywne. W rozdziale 5. przedstawiamy niekonstruktywny dowód, że jeśli wzorzec jest odpowiednio długi względem liczby zmiennych, to jest możliwy do uniknięcia na ścieżkach liniowych za pomocą tylko 2 kolorów. W tym przypadku stosujemy metodę probabilistyczną w oparciu o ważony wariant Lokalnego Lematu Lovásza.

Badania nad konstrukcjami kolorowań płaszczyzny unikającymi wzorców doprowadziły do ciekawego zagadnienia w stylu klasycznej kombinatoryki na słowach, co przedstawiamy w rozdziale 6. Mianowicie, wyniki dotyczą ciągów unikających wystąpienia wzorca nie tylko jako blok, ale również jako podciąg, w których pominięcie/przeskoczenie kolejnych wyrazów jest możliwe w pewnym ograniczonym stopniu. Prezentowane dowody dolnych ograniczeń na minimalną liczbę symboli można przedstawić jako algorytm na znalezienie realizacji wzorca przy zbyt małej liczbie symboli. Z kolei górne ograniczenia są konstruktywne i kluczowym krokiem jest zastosowanie odpowiedniego podstawienia do ciągu o znanych własnościach. Puentą tego rozdziału jest twierdzenie dotyczące kolorowania płaszczyzny unikającego repetycji na ciągach punktów będących uogólnieniem ścieżek liniowych w stylu rozdziałów 2. i 3., tj. ciągów punktów współliniowych o kolejnych odległościach należących do zadanego przedziału.

Słowa kluczowe: problem Hadwiger–Nelsona; kolorowanie płaszczyzny; euklidesowa teoria Ramseya; kolorowanie nierepetytywne; ciąg Thuego; unikanie wzorców

Abstract

One of the best-known and challenging questions in combinatorics, in the intersection of geometry and graph theory, is the Hadwiger–Nelson problem. It asks for the minimal number of colors in a coloring of the Euclidean plane $\mathbb{R}^2$ with a restriction that any two points at distance 1 obtain distinct colors. This question can be also stated in the language of graph theory by defining the so-called unit distance graph of the plane and asking for its chromatic number. Although the problem is open for over 70 years, attempts to solve it inspired numerous related questions and interesting results in such areas as geometry, combinatorics, topology, measure theory or abstract algebra. This thesis is devoted to selected problems on plane coloring in which the goal is to avoid occurrences of certain structures (understood as configurations of points with a given coloring), using as few colors as possible. Almost always these structures are of the form of a finite, collinear set of points. Moreover, in the last three chapters, the structures come from combinatorics on words. This branch of mathematics on the border of combinatorics with algebra and theoretical computer science is the second foundation of the presented research. A classic example of a result from this area is a theorem of Thue (1906): there exists an infinite sequence on 3 symbols that does not contain a repetition, that is, two identical blocks one after the other (where block stands for a subsequence of consecutive terms).

In Chapter 2, we present results concerning plane colorings in which any two points at distance belonging to a given interval obtain distinct colors. The work is concentrated mostly on lower bounds for the minimal number of colors. Proofs rely on a combination of theoretical reasoning and computer-driven checking of colorability of certain finite sets of points. Because of that, we are able to determine the minimal number of colors for two families of intervals – one of each (corresponding to 7 colors) expands a known family, the second (corresponding to 9 colors) is a completely new one. This way, we obtain the only known families of so-called distance graphs on the plane with determined chromatic number (up to certain subgraphs of the obtained graphs and except for some trivial cases).

Chapter 3. is devoted to avoiding monochromatic occurrences of structures consisting of several points. Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer and Straus (1973) constructed a coloring using only 2 colors that avoids any monochromatic sequence of 6 collinear points with consecutive distances equal to 1. However, if we replace the condition of consecutive distances equal to 1 with a condition of consecutive distances within a given interval, then the obtained property is not satisfied by the mentioned coloring. We present that it is possible to construct a 2-coloring not admitting a monochromatic sequence of 7 collinear points with consecutive distances from a certain interval. This topic is especially related to classic questions of Euclidean Ramsey Theory (while we remark that this entire thesis fits into the Euclidean Ramsey Theory framework).

In Chapters 4. and 5., we study plane colorings avoiding repetitions and other patterns, in the language of combinatorics on words. As the first step, we answer a question by Grytczuk (2008) by showing that a countable number of colors is not sufficient for a coloring of the unit distance graph such that the sequence of colors of any path does not contain a repetition. Hence the further considerations concentrate on line paths, that is, sequences of points with consecutive distances equal to 1. In one of the main theorems of the thesis, we show that there exists an 18-coloring for which the sequence of colors of any line path does not contain a repetition (which improves the previously published 36-coloring). Results in Chapter 4. concern also other patterns and proofs are mostly constructive. In Chapter 5., we present a nonconstructive proof that if a pattern is sufficiently long in terms of its number of variables then it is avoidable on line paths with just 2 colors. In this case, we apply the probabilistic method based on a weighted variant of Lovász Local Lemma.

Studies on constructions of plane colorings avoiding patterns lead to an interesting topic in the style of classic combinatorics on words, which we present in Chapter 6. Namely, our results concern sequences avoiding occurrences of a pattern not only as a block but also as a subsequence for which omission/jumping over terms is possible to a limited extent. Presented proofs of lower bounds on the minimal number of symbols can be described as algorithms for finding an occurrence of the pattern if the number of symbols is not sufficient. Proofs of the upper bounds, on the other hand, are constructive and the key step is to apply a suitable substitution on a sequence with known properties. We conclude this chapter with a theorem concerning plane coloring avoiding repetitions on sequences of points being a generalization of line paths in the style of Chapters 2. and 3., that is, sequences of collinear points with consecutive distances belonging to a given interval.

Keywords: Hadwiger–Nelson problem; colorig of the plane; Euclidean Ramsey Theory; nonrepetitive coloring; Thue sequence; pattern avoidance