Uniwersytet im. A. Mickiewicza
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań
http://www.wmi.amu.edu.pl

Zakład Matematyki Dyskretnej
prof. UAM dr. hab. Katarzyna
Rybarczyk-Krzywdzińska
Telefon: (61) 829 5398
kryba@amu.edu.pl

Poznań, 8 grudnia 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgr Krzysztofa Węska pt. Colorings of the plane avoiding discrete colinear structures

Omówienie zawartości pracy wraz z jej oceną

Problem Hadwigera-Nelsona, postawiony w połowie XX wieku, jest naturalnym pytaniem dotyczącym kolorowania płaszczyzny z ograniczeniami. Dotyczy on znalezienia liczby chromatycznej grafu, w którym zbiór wierzchołków to wszystkie punkty płaszczyzny a wierzchołki są połączone krawędzią, gdy odpowiadające im punkty płaszczyzny są w odległości dokładnie 1. Jest to jedno z tych „prostych" w swoim sformułowaniu pytań, na które odpowiedź nie jest prosta i które inspirują do ciekawych i zaawansowanych rozważań matematycznych. Od momentu, kiedy problem został postawiony, wzbudzał on duże zainteresowanie szerokiego grona naukowców. Rozważano rozmaite typy kolorowań (mierzalne, ograniczone przez krzywe Jordana), zależności między odpowiedzią na pytanie a dobraną aksjomatyką i ciekawe naturalne uogólnienia tego problemu. Przedstawiona praca doktorska wpisuje się w ostatni nurt badań nad problemem Hadwigera-Nelsona. W kolejnych rozdziałach pracy są rozpatrywane różne uogólnienia problemu Hadwigera-Nelsona. Niektóre polegają na zmianie definicji grafu, np. zwiększeniu liczby krawędzi przez rozluźnienie warunków dotyczących odległości przyległych wierzchołków. Niektóre dodają pewne dodatkowe ograniczenia dotyczące kolorowań, np. kolorowania bez zadanych wzorców, czy bez jednokolorowych układów wierzchołków na liniach prostych.

Na potrzeby tej recenzji, wszelkie grafy, których zbiór wierzchołków jest podzbiorem płaszczyzny a krawędzie między wierzchołkami są zdefiniowane na podstawie wzajemnego ułożenia (odległości) owych wierzchołków, będę nazywać *grafami płaszczyzny*.

Recenzowana rozprawa doktorska, licząca 103 strony, składa się ze streszczenia, jednego rozdziału wstępnego, pięciu rozdziałów przedstawiających wyniki rozprawy, oraz bibliografii, która obejmuje 149 pozycji.

Każdy rozdział zaczyna się szerokim omówieniem powiązanych, znanych wyników i motywacją do prowadzenia badań prezentowanych w danej części pracy. Każdy z rozważanych problemów jest w naturalny sposób związany z istniejącymi wcześniej kierunkami badań, dobrze zmotywowany i potencjalnie ciekawy dla szerszego grona badaczy.

W pierwszym, wstępnym rozdziale Autor opisuje historię problemu, podaje podstawowe definicje, pojęcia i znane wyniki niezbędne do zrozumienia dalszej części pracy oraz przedstawia strukturę całej pracy. Rozdział ten jest zgrabnym wstępem do dalszych rozważań.

W drugim rozdziale rozpatrywane jest pierwsze uogólnienie problemu Hadwigera-Nelsona. Dotyczy ono liczby chromatycznej grafu płaszczyzny, w którym dwa punkty są połączone, gdy ich odległości znajdują się w pewnym przedziale. Dowód opiera się na dwóch spostrzeżeniach. Pierwsze spostrzeżenie jest zaprezentowane w lemacie 2.7, który mówi, że w rozważanym w tym rozdziale grafie płaszczyzny istnieje mała kula, w której występują co najmniej trzy kolory. Lemat ten był niezależnie udowodniony inną metodą w nieopublikowanej jeszcze pracy [34]. Drugie spostrzeżenie (stwierdzenie 2.9), poprzez wynik z lematu 2.7, w nieoczywisty sposób łączy liczbę chromatyczną grafu płaszczyzny z liczbą chromatyczną odpowiednio zdefiniowanego grafu płaszczyzny indukowanego na pierścieniu. Wyniki dotyczące liczby chromatycznej grafu płaszczyzny ostatecznie są uzyskane przez oszacowanie liczby chromatycznej rozważanych pierścieni. Oszacowania są otrzymane przez znalezienie odpowiednich skończonych podgrafów grafu płaszczyzny zawartego w pierścieniach i oszacowanie odpowiedniej liczby chromatycznej z wykorzystaniem komputera. Naturalną konsekwencją tego wyniku są bardzo dokładne oszacowania na liczbę chromatyczną rozważanych w dowodzie pierścieni. Rezultat dotyczący liczb chromatycznych pierścieni został ujęty w rozdziale 2.4. Moim zdaniem wyniki przedstawione w tym rozdziale są naturalnie zmotywowane wcześniejszymi badaniami dotyczącymi kolorowania płaszczyzny. Rezultaty są ciekawe, a metody dowodowe interesujące.

W trzecim rozdziale rozważany jest problem kolorowania płaszczyzny z unikaniem monochromatycznych układów punktów na płaszczyźnie. Rozważany problem jest naturalnym uogólnieniem problemu Hadwigera-Nelsona, w którym unikamy monochromatycznych układów punktów w odległości 1. W tym przypadku rozważany jest problem unikania układów n punktów na prostej, w których dwa sąsiednie punkty są w odległości z przedziału $[1, \delta]$ (ozn. $L_n^{[1,\delta]}$). Jest to naturalne uogólnienie wcześniej rozważanych problemów unikania monochromatycznych punktów na linii z odległościami równymi 1 między dwoma kolejnymi punktami. Uogólnienie to mieści się w duchu problematyki prezentowanej w poprzednim rozdziale. Zaprezentowany dowód konstrukcyjny pokazuje konkretne kolorowanie „schodkowe" bez monochromatycznych linii. W analizie kolorowania wykorzystano elementarne metody dowodowe. Ostateczny wynik wydaje się być ograniczony do dość wąskiego zakresu parametrów. Uzyskany wynik podkreśla jednak pewne ciekawe zależności między problemami, ale i tak w moim przekonaniu jest najmniej ciekawym wynikiem w prezentowanej pracy.

Problematyka kolejnych rozdziałów skupia się na różnych zagadnieniach związanych z kolorowaniami unikających wzorców (ang. pattern free).

Rozdział czwarty dotyczy kolorowań płaszczyzny unikających wzorców, a w szczególności kolorowań bez powtórzeń (ang. nonrepetetive). Dwa główne wyniki tego rozdziału nawiązują do problemów rozważanych wcześniej przez Grytczuka (z pracy [69]) i Grytczuka, Kosińskiego i Zmarza (z pracy [71]). Pierwszy z rezultatów dotyczy liczby Tuego grafu płaszczyzny, która jest liczbą kolorów niezbędną do pokolorowania grafu płaszczyzny bez powtórzeń na ścieżkach. Twierdzenie 4.1 z tego rozdziału odpowiada na pytanie postawione przez Grytczuka w pracy [69]. Wynika z niego, że nie można pokolorować klasycznego grafu płaszczyzny bez powtórzeń przeliczalną liczbą kolorów. Wynik ten jest wnioskiem z uzyskanego, silniejszego twierdzenia dotyczącego tak zwanego *star coloring* klasycznego grafu płaszczyzny. Dowód jest zaskakująco prosty, ale bardzo elegancki. Drugi wynik skupia się na problemie kolorowania bez powtórzeń z ograniczeniem, że powtórzenia nie mogą pojawiać się tylko na ścieżkach, które geometrycznie odpowiadają prostym na płaszczyźnie. Twierdzenie 4.9 poprawia wcześniejszy wynik Grytczuka, Kosińskiego i Zmarza dotyczący tego typu kolorowań. Konstrukcyjny dowód pokazuje przykład kolorowania płaszczyzny 18 kolorami, które unika powtórzeń na prostych w grafie płaszczyzny. Rozważane kolorowanie powstaje na bazie prostokątów, z których każdy składa się z dwóch kwadratów. Ostateczne kolorowanie prostokątów bazuje na ciągach Thuego. Rozważane są też uogólnienia, w których na prostych unika się powtórzeń ciągów kolorów punktów których odległości mieszczą się w pewnym przedziale (a nie są równe dokładnie 1). Interesujące są rozważania na temat tego, kiedy przedstawiony typ kolorowań płaszczyzny może dać ciekawe wyniki dotyczące unikania bardziej ogólnych wzorców (nie tylko powtórzeń). Metoda rozwinięta w dowodzie twierdzenia 4.9 jest zastosowana do wyznaczenia kolorowania płaszczyzny 32 kolorami unikającego zarówno powtórzeń jak i palindromów na prostych. Głównym, interesującym składnikiem dowodu twierdzenia 4.9 i jego uogólnień jest sama konstrukcja, pomysł kolorowania. Analiza tego kolorowania jest dość żmudna, ale naturalna i praktycznie wynika z samej konstrukcji. Ciekawe jest pokazanie, że tego typu konstrukcja może być wykorzystana do szerszej grupy problemów (np. do unikania palindromów).

W rozdziale piątym rozważania zostają w pewnym sensie odwrócone. We wcześniejszej części pracy poszukiwano odpowiednich kolorowań unikających wzorców, czy konkretnych układów. Natomiast w tym rozdziale pytanie dotyczy tego, jak mają wyglądać wzorce, których można uniknąć przy kolorowaniu płaszczyzny tylko dwoma kolorami. Główny wynik pokazuje, że dla dowolnej liczby m zmiennych istnieje długość wzorca $f(m)$, która gwarantuje, że dla dowolnego wzorca długości $f(m)$ o m zmiennych istnieje dwukolorowe kolorowanie płaszczyzny unikające tego wzorca na prostej. Dowód jest bardzo ciekawym zastosowaniem Lokalnego Lematu Lovásza. Wymagał zarówno wprawy i pomysłowości w znalezieniu odpowiednich oszacowań kombinatorycznych jak i szerszego spojrzenia na problem, żeby otrzymać odpowiednie oszacowania.

Ostatni rozdział dotyczy unikania wzorców z przeskokami (ang. avoiding patterns with jumps). Odbiega on nieznacznie od poprzednich rozdziałów, gdyż duża jego część dotyczy unikania wzorców w słowach (ciągach), a nie kolorowań płaszczyzny. Najistotniejszy fragment dowodów w tej części pracy opiera się na sprytnych, nietrywialnych „podstawieniach" na odpowiednich ciągach bez powtórzeń. W stwierdzeniu 6.4 i podrozdziale 6.4 zostają zaprezentowane wyniki dotyczące kolorowań grafu płaszczyzny, które wynikają z rozważań zawartych w pozostałej części rozdziału. Wyniki w tej części pracy są interesujące i otwierają możliwości ciekawej kontynuacji badań.

Większość przedstawionych w rozprawie wyników zostało już opublikowanych w pacach:

P. Wenus and K. Węsek. Nonrepetitive and pattern-free colorings of the plane. *European Jounal of Combinatorics*, 54:21–34, 2016.

Michał Dębski, Jarosław Grytczuk, Barbara Nayar, Urszula Pastwa, Joanna Sokół, Michał Tuczyński, Przemysław Wenus, and Krzysztof Węsek. Avoiding Multiple Repetitions in Euclidean Spaces. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(1):40–52, 2020.

M. Dębski, U. Pastwa, and K. Węsek. Grasshopper Avoidance of Patterns. *The Electronic Jounal of Combinatorics*, 23, 2016.

Joanna Chybowska-Sokół, Michał Dębski, Jarosław Grytczuk, Konstanty JunoszaSzaniawski, Barbara Nayar, Urszula Pastwa, and Krzysztof Węsek. Fractional meanings of nonrepetitiveness. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 189:105598, 2022.

Ranga czasopism dodatkowo świadczy o wadze i aktualności uzyskanych rezultatów.

Rozprawa nie budzi zastrzeżeń od strony edytorskiej. Praktycznie rzecz biorąc znajdują się w niej tylko nieliczne małe uchybienia, literówki, co przy tak obszernym opracowaniu jest nieuniknione.
Poniżej przedstawiam listę kilku zauważonych małych uchybień (uwagi dotyczą wersji wydrukowanej).

- strona 22^5: jest [25], powinno być [40];
- strona 26, twierdzenie 2.5, doniesienie [70] jest nieprawidłowe;
- strona 29_1, w $H_{\varepsilon/2}(S_i, X_i)$, X_i jest niepotrzebne.
- strona 33_9, $\leqslant 3$ – nierówność w złą stronę;
- strona 51^1, nie zostało określone, co to jest p_1;
- strona 55^{12}, powinno być $\hat{x}$ zamiast $\hat{y}$;
- strona 60^{17}, staring $\longrightarrow$ starting;
- strona 61^{18}, odniesienie w opisie dowodu tw. 4.18 do dowodu tw. 4.18 nie ma sensu;

- strona 77^{13}, brakuje jednego *c* w ciągu *au....y*;

Oczywiście wszystkie te niedociągnięcia nie są istotne i nie wpływają one na zrozumienie pracy. Chciałabym więc podkreślić, że wspomniane wyżej zastrzeżenia nie mają wpływu na moją wysoką ocenę rozprawy.

Reasumując, rozprawa doktorska mgr. Krzysztofa Węska zawiera oryginalne i interesujące wyniki. Warto podkreślić, że wiele wyników jest współautorskich z szerokim wachlarzem współpracowników, co dowodzi umiejętności współpracy i pewnej dojrzałości naukowej. Natomiast wyniki przedstawione w rozdziale 7 są samodzielne i świadczą o umiejętnościach samego autora. Oceniając całość pracy należy podkreślić, że uzyskanie zaprezentowanych rezultatów wymagało solidnego warsztatu naukowego, dużej inwencji twórczej, ogromnej wiedzy oraz sporej „technicznej" biegłości. Autor wykazał się dużym obeznaniem w literaturze o czym świadczą obszerne rozdziały dotyczące motywacji i znanych wyników, a także liczne i różnorodne techniki dowodowe. Mimo, że niektóre techniki są elementarne, dowody które je używają zawierają nietrywialne pomysły. Należy podkreślić, że wykorzystano też bardziej zaawansowane metody, na przykład używające wspomagania komputerowego (np. rozdział 2), czy metody probabilistyczne (rozdział 5). Uzyskane wyniki są niebanalne i świetnie wpisują się w aktualne nurty badań. Przeprowadzone rozumowania dowodzą biegłości autora w wykorzystaniu różnorodnych, zaawansowanych metod, a także dużej pomysłowości.

Podsumowanie

Uważam, że złożona rozprawa doktorska mgr Krzysztofa Węska niewątpliwie spełnia wymagania ustawowe i zwyczajowe stawiane pracom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie rozprawy doktorskiej mgr Krzysztofa Węska do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

(-) Katarzyna Rybarczyk-Krzywdzińska