dr hab. Bartłomiej Bosek, prof. UJ
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński, 31-007 Kraków
E-mail: bartlomiej.bosek@uj.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej Krzysztofa Węska

pt. „*Colorings of the plane avoiding discrete colinear structures*"

Rozprawa doktorska Krzysztofa Węska dotyczy kolorowań płaszczyzny omijających dyskretne struktury współliniowe. Omawiana praca doktorska zawiera analizę szeregu problemów, które generalnie wynikają z połączenia dwóch teorii. Pierwszą z nich została zapoczątkowana problemem Hadwigera–Nelsona. Dotyczy on wciąż otwartego pytania: jaka jest minimalna liczba kolorów potrzebna do pokolorowania płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ tak, aby punkty odległe o 1 miały przydzielone różne kolory. Z jednej strony istnieje przykład kolorowania wykorzystujący 7 kolorów, który polega na podzieleniu płaszczyzny na sześciokąty o średnicy 1 i umiejętne ich pokolorowanie.[1] Z drugiej zaś strony Leo Moser wraz z Williamem Moserem[2] zaprezentowali 7 wierzchołków na płaszczyźnie, których nie da się pokolorować 3 kolorami. Przez długi czas nie było żadnego postępu w odpowiedzi na to pytanie. Dopiero ostatnio de Grey[3] pokazał zestaw 20425 punktów, które nie są 4 kolorowalne. Najmniejszy znany przykład to zaprezentowany przez Partsa[4] zbiór 509 punktów. Próba rozwiązania powyższego problemu zaowocowała wieloma ciekawymi wynikami związanymi z głównym pytaniem.

Problemy dotyczące ciągów nierepetytywnych to druga tematyka, do której nawiązuje autor doktoratu. W jej ramach klasycznym już pytaniem było: czy da się skonstruować nieskończone słowo nad skończonym alfabetem, które nie posiadałoby podsłowa będącego powtórzeniem, czyli w postaci *ww*. W 1906 roku Axel Thue podał przykład takiego słowa używając jedynie 3 liter. Ze względu na rozmiar alfabetu było to optymalne rozwiązanie z faktu, że używając jedynie 2 liter nie da się skonstruować nieskończonego słowa niezawierającego repetycji. Nie mniej jednak zapoczątkowało to prężnie rozwijającą się teorię, która nazywana jest kombinatoryką na słowach.

Pierwszym rozważanym problemem jest kolorowanie punktów na płaszczyźnie. W odróżnieniu od klasycznego problemu w rozważanym kolorowaniu nie tylko wierzchołki o odległości 1 mają mieć różne kolory, ale także i takie pary wierzchołków, których odległość mieści się w

[1] Kolorowanie to została zaprezentowane w 1950 przez Johna Isbella.

[2] M. J. Nielsen. Solution to problem 10. Canad. Math. Bull., 4:187-189, 1961.

[3] A. de Grey. The chromatic number of the plane is at least 5. Geombinatorics, 28:18-31, 2018.

[4] J. Parts. The chromatic number of the plane is at least 5 a human-verifiable proof. Geombinatorics, 29(2):77–102, 2020.

zadanym przedziale $[1,b]$, gdzie $b>1$ jest z góry ustaloną liczbą rzeczywistą. W 2005 Exoo[5] udowodnił, że dla $b \in [1.312, 1.322]$ jest potrzebnych dokładnie 7 kolorów. W rozdziale 2 autor prezentuje ograniczenia wymuszające większą liczbę kolorów. Dokładniej rzecz ujmując Twierdzenie 2.8 mówi, że potrzebnych jest co najmniej

- 7 kolorów jeśli $b > 1.286$,
- 8 kolorów jeśli $b > 1.472$,
- 9 kolorów jeśli $b > 1.715$,
- 10 kolorów jeśli $b > 1.829$,
- 11 kolorów jeśli $b > 2.012$.

Zaprezentowane argumenty są nietrywialne i wymagały pomysłowości. Powyższe wyniki są obecnie dostępne na platformie *arXiv*,[6] zaś artykuł z zawartymi rezultatami został wysłany do czasopisma.

Naturalnym uogólnieniem malowania płaszczyzny rozróżniającego punkty w odległości 1 jest takie malowanie płaszczyzny, które unika monochromatycznego ciągu n punktów współliniowych o kolejnych odległościach równych 1. W 1973 Erdös i inni.[7] pokazali dla dowolnego naturalnego m

- kolorowanie przestrzeni $\mathbb{R}^m$ za pomocą 2 kolorów, które unika monochromatycznego ciągu $n=6$ punktów,
- kolorowanie przestrzeni $\mathbb{R}^m$ za pomocą 3 kolorów, które unika monochromatycznego ciągu $n=4$ punktów,
- kolorowanie przestrzeni $\mathbb{R}^m$ za pomocą 4 kolorów, które unika monochromatycznego ciągu $n=3$ punktów.

Dwa pierwsze przypadki są wciąż najlepszymi znanymi wynikami nawet dla $\mathbb{R}^2$. Z kolei w przypadku 3 punktów, w 2009 roku Tessler[8] pokazał kolorowanie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ spełniające powyższe warunki używając jedynie 3. Autor omawianej rozprawy doktorskiej zastanawia się nad pewną wariacją tego problemu polegającą na tym, że odległości pomiędzy kolejnymi punktami na prostej nie muszą być równe dokładnie 1, ale mogą być jakąś wartością z przedziału $[1,b]$, gdzie $b>1$ jest z góry ustaloną liczbą rzeczywistą. Odległości dla różnych par wierzchołków z tego samego ciągu mogą być różne. Głównym wynikiem tej części jest Twierdzenie 3.5., w którego dowodzie explicite jest pokazane kolorowanie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ za pomocą 2 kolorów, które zapewnia, że dowolny ciąg 7 współliniowych wierzchołków (o kolejnych odległościach z przedziału $[1, 1.177]$) nie będzie monochromatyczny. Zaprezentowany pomysł jest ciekawy i wart opublikowania. Niestety nic mi nie wiadomo, o próbie publikacji powyższego wyniku.

Kolejny problem rozważany w omawianej pracy dotyczy istnienia kolorowania płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, które zapewniałoby, że na dowolnej sekwencji punktów (takich, że kolejne punkty są w odległości 1) nie pojawi się repetycja. W 2008 Grytczuk[9] zauważył, że za pomocą skończonej

[5] G. Exoo. ε-unit distance graphs. Discrete & Computational Geometry, 33:117–123, 2005.

[6] J. Chybowska-Sokół, K. Junosza-Szaniawski, and K. Węsek. Coloring distance graphs on the plane. *arXiv*:2201.04499, 2022.

[7] P. Erdös, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, and E. G. Straus. Euclidean ramsey theorems. I. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14(3):341-363, 1973.

[8] E. Tressler. Monochromatic triangles in $\mathbb{E}^2$. Geombinatorics, XIX(3):119-125, 2009.

[9] J. Grytczuk. Thue type problems for graphs, points, and numbers. *Discrete Mathematics*, 308(19):4419-4429, 2008.

liczby kolorów nie da się skonstruować powyższego kolorowania, zadając zarazem pytanie, czy przeliczalna liczba kolorów byłaby już wystarczająca. Twierdzenie 4.1. w omawianym doktoracie odpowiada negatywnie na wyżej zadane pytanie. De facto, autor pokazuje (patrz Twierdzenie 4.2.), że nie istnieje przeliczalne kolorowanie płaszczyzny takie, aby dla dowolnego ciągu 4 punktów (takich, że kolejne punkty są w odległości 1) spełniało dwa następujące warunki

- dwa kolejne punkty mają różny kolor,
- zbiór kolorów użytych na wszystkich 4 punktach jest co najmniej 3-elementowy.

Powyższe obserwacje popchnęły autora do zawężenia się do przypadku, w którym rozważane ciągi punktów muszą leżeć na jednej prostej. W 2016 Grytczuk i inni.[10] pokazali, że w takim przypadku wystarczy jedynie 36 kolorów. W doktoracie znajdujemy poprawę powyższego wyniku zbijającą tą wartość do 18 (patrz Twierdzenie 4.9.). Ponadto, autor także pokazuje, że istnieje kolorowanie płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ za pomocą 36 kolorów, które zapewnia, że na dowolnej sekwencji punktów (takich, że odległości pomiędzy kolejnymi punktami są wartościami pomiędzy 1, a $\sqrt{2}$) nie pojawi się repetycja (patrz Wniosek 4.15.). W efekcie na dwa różne sposoby został wzmocniony wynik z 2016 roku. Powyższe wyniki są ciekawe, a dowody nietrywialne. W efekcie zostały one opublikowane w 2016 w *European Jounal of Combinatorics*.[11] Z kolei rozdział 6 omawianej pracy ma miedzy innymi na celu zbicie liczby kolorów z powyżej zacytowanego Wniosku 4.15. W tym celu autor wprowadza pojęcie *j-jump avoidability*, które intuicyjnie można rozumieć jako ciągi punktów na prostej $\mathbb{R}$ o odległościach z przedziału $[1, j]$, przy czym prostą malujemy w ten sposób, że każdy przedział $[n, n+1)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest monochromatyczny. Autor pokazuje serie wyników w tym schemacie. Na przykład Twierdzenie 6.5. mówi, że jeśli $j = 2$,[12] to liczba kolorów potrzebnych do wyminięcia wzorca w^n wynosi

- 6 w przypadku $n = 2$,
- 3 w przypadku $n = 3, 4$,
- 2 w przypadku $n \geqslant 6$.

To z kolei daje uogólnienie Wniosku 4.15. w następującej postaci. Wniosek 6.12. mówi, że w przypadku, gdy rozważamy dowolną sekwencję punktów takich, że odległości pomiędzy kolejnymi punktami są wartościami pomiędzy 1, a $\sqrt{2}$, to istniej kolorowanie za pomocą 36, 9, oraz 4 kolorów, które na takich ciągach unika wzorca odpowiednio w^2, w^3, oraz w^6. Powyższe rezultaty zostały opublikowane w *The Electronic Jounal of Combinatorics*.[13] Inne wyniki z rozdziału 6 pojawiły się w pracy opublikowanej w *Journal of Combinatorial Theory, Series A*.[14] Jak rozumiem, podstawowy cel polegający na tym, że dla dozwolonych odległości z przedziału $[1, \sqrt{2}]$ znalezienie kolorowania płaszczyzny za pomocą 35 kolorów tak, aby wyminąć repetycje, nie został osiągnięty. Zamiast tego zostały udowodnione inne dalece nietrywialne twierdzenia i narzędzia pozwalające dalej rozwijać tę teorię.

---

[10] J. Grytczuk, K. Kosiński, and M. Zmarz. Nonrepetitive colorings of line arrangements. *European Journal of Combinatorics*, 51:275-279, 2016.

[11] P. Wenus and K. Węsek. Nonrepetitive and pattern-free colorings of the plane. *European Jounal of Combinatorics*, 54:21-34, 2016.

[12] To de facto, oznacza, że sekwencja punktów może ominąć jeden z jednostkowych przedziałów.

[13] M. Dębski, U. Pastwa, and K. Węsek. Grasshopper Avoidance of Patterns. The Electronic Jounal of Combinatorics, 23, 2016.

[14] Joanna Chybowska-Sokół, Michał Dębski, Jarosław Grytczuk, Konstanty Junosza-Szaniawski, Barbara Nayar, Urszula Pastwa, and Krzysztof Węsek. Fractional meanings of nonrepetitiveness. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 189:105598, 2022.

Na repetycje można patrzeć, jak na dowolne słowo, które realizuje wzorzec postaci *ww*. Z faktu, że *ww* jest najprostszym nietrywialnym wzorcem, naturalnym uogólnieniem jest rozważanie bardziej skomplikowanych wzorców. Przykładowymi innymi wzorcami mogą być na przykład: *www*, *wuwuw*, itd... W tym kontekście ciekawy jest kolejny prezentowany rezultat mówiący, że jeżeli wzorzec $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}$ jest odpowiednio długi w stosunku do liczby zmiennych, to istnieje kolorowanie płaszczyzny 2 kolorami takie, że dowolny ciąg współliniowych punktów (takich, że kolejne punkty są w odległości 1) nie będzie posiadał podsłowa realizującego zabroniony wzorzec $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_k}$ (patrz Twierdzenie 5.1.). Dowód powyższego twierdzenia opiera się na eleganckim użyciu ważonego wariantu Lokalnego Lematu Lovásza. O wartości tych wyników może także świadczyć to, że 2020 roku zostały opublikowane w *SIAM Journal on Discrete Mathematics*.[15]

Doktorat jest dość dobrze napisany. Oczywiście pojawiały się niewielkie błędy edytorskie. Nie mniej jednak zasadniczo nie wpływa to na merytoryczną ocenę rozprawy. Fakt, że prowadzone badania wynikają z połączenia dwóch istniejących teorii, powoduje, że z jednej strony tematyka jest świeża, a z drugiej strony mocno zakorzeniona w literaturze. Kolejną silną stroną omawianego doktoratu jest to, że prezentuje on sporo nietrywialnych wyników, które w swoich dowodach używają różnych technik: od konstruktywnego pokazywania szukanych kolorowań po niekonstruktywne metody probabilistyczne. Pokazuje to, że autor swobodnie włada szeroką gamą narzędzi i potrafi je stosować. O sile doktoratu świadczyć może także i to, że wyniki zostały opublikowane w 4 renomowanych czasopismach: *European Jounal of Combinatorics*, *The Electronic Jounal of Combinatoric*, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. Dodatkowo jeden artykuł został wysłany do czasopisma i czeka na recenzje. Biorąc pod uwagę powyższe argumenty, nie mam najmniejszej wątpliwości, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Krzysztofa Węska do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Bartłomiej Bosek

Podpisany elektronicznie przez
Bartłomiej Emil Bosek
15.11.2022
11:59:49 +01'00'

[15] M. Dębski, J. Grytczuk, B. Nayar, U. Pastwa, J. Sokół, M. Tuczyński, P. Wenus, and K. Węsek. Avoiding Multiple Repetitions in Euclidean Spaces. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 34(1):40-52, 2020.