POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr Nataliya Petryshyn

Zakorzenione upakowania grafów i ich zastosowania

Promotor

prof. dr hab. Zbigniew Lonc

Warszawa, 2020

Abstract

In this thesis we study the complexity status of the problem of finding a maximum so-called rooted packing into a rooted graph and the complexity status of the problem of existence of a $\{2K_2, H\}$-decomposition of a graph.

The concept of a rooted packing into a rooted graph is a mutual generalization of the concepts of a vertex packing and an edge packing into a graph. A rooted graph is a pair (G, T), where G is a graph and $T \subseteq V(G)$. Two rooted graphs (G, T) and (H, S) are isomorphic if there is an isomorphism of the graphs G and H such that S is the image of T in this isomorphism. A rooted graph (H, S) is a rooted subgraph of a rooted graph (G, T) if H is a subgraph of G and $S \subseteq T$. By a rooted (H, S)-packing into a rooted graph (G, T) we mean a collection $(H_1, S_1), (H_2, S_2), \ldots, (H_p, S_p)$ of rooted subgraphs of (G, T) isomorphic to (H, S) such that the sets of edges $E(H_1), E(H_2), \ldots, E(H_p)$ are pairwise disjoint and the sets $S_1, S_2, \ldots, S_p$ are pairwise disjoint. Such (H, S)-packing is a rooted decomposition of (G, T) if $E(G) = E(H_1) \cup \ldots \cup E(H_p)$ and is a rooted factor of (G, T) if $T = S_1 \cup \ldots \cup S_p$.

In the first part of this thesis we concentrate on studying maximum (H, S)-packings when H is a star. We give a complete classification with respect to the computational complexity status of the problems of finding a maximum (H, S)-packing of a rooted graph when H is a star. The most interesting polynomial case is the case when H is the 2-edge star and S contains the center of the star only. Among others we prove a min-max theorem for (H, S)-packings in this case.

The second part of the thesis concerns the computational complexity status of the problem of existence of a $\{2K_2, H\}$-decomposition of a graph, i.e. existence of an edge decomposition into subgraphs isomorphic to $2K_2$ or H, where H is a fixed graph. We prove theorems that show connection between problems of existence of $\{2K_2, H\}$-decompositions and problems of finding a maximum rooted packings, problems of existence of rooted decompositions and rooted factors. Basing on these theorems and results obtained for rooted packings, rooted decompositions and rooted factors we give a complete classification with respect to the computational complexity status of the problems of existence of a $\{2K_2, H\}$-decomposition when H is a double star (i.e. a connected graph whose edges can be covered with two adjacent vertices).

Streszczenie

W tej pracy badamy złożoność obliczeniową problemów znalezienia maksymalnych zakorzenionych upakowań zakorzenionych grafów i złożoność obliczeniową problemów istnienia $\{2K_2, H\}$-dekompozycji grafów.

Koncepcja zakorzenionego upakowania w zakorzeniony graf jest wspólnym uogólnieniem krawędziowego i wierzchołkowego upakowania w graf. Zakorzenionym grafem jest para (G, T), gdzie G jest grafem oraz $T \subseteq V(G)$. Dwa zakorzenione grafy (G, T) i (H, S) są izomorficzne jeśli istnieje izomorfizm grafów G i H taki, że S jest obrazem T w tym izomorfizmie. Zakorzeniony graf (H, S) jest zakorzenionym podgrafem zakorzenionego grafu (G, T) jeśli H jest podgrafem G oraz $S \subseteq T$. Przez zakorzenione (H, S)-upakowanie w zakorzeniony graf (G, T) rozumiemy rodzinę $(H_1, S_1), (H_2, S_2), \ldots, (H_p, S_p)$ zakorzenionych podgrafów (G, T) izomorficznych z (H, S) takich, że zbiory krawędzi $E(H_1), E(H_2), \ldots,$ $E(H_p)$ są parami rozłączne oraz zbiory $S_1, S_2, \ldots, S_p$ są parami rozłączne. Takie (H, S)-upakowanie jest zakorzenioną dekompozycją zakorzenionego grafu (G, T) jeśli $E(G) = E(H_1) \cup \ldots \cup E(H_p)$ zaś jest zakorzenionym faktorem w zakorzeniony graf (G, T) jeśli $T = S_1 \cup \ldots \cup S_p$.

W pierwszej części pracy głównie skupiamy się na problemie znalezienia najliczniejszego (H, S)-upakowania gdy H jest gwiazdą. Podajemy pełną klasyfikację ze względu na złożoność obliczeniową problemu znalezienia najliczniejszego (H, S)-upakowania w zakorzeniony graf gdy H jest gwiazdą. Najciekawszym wielomianowym przypadkiem rozważanego problemu jest przypadek gdy H jest 2-krawędziową gwiazdą a S składa się tylko z centrum gwiazdy. Dla tego przypadku pokazujemy między innymi minimaksowe twierdzenie dla (H, S)-upakowania.

Druga część pracy dotyczy złożoności obliczeniowej problemu istnienia $\{2K_2, H\}$-dekompozycji grafu, tj. istnienia krawędziowej dekompozycji na podgrafy izomorficzne z $2K_2$ lub H, gdzie H jest ustalonym grafem. Udowadniamy twierdzenia pokazujące związek pomiędzy problemami istnienia $\{2K_2, H\}$-dekompozycji a problemami znalezienia maksymalnych zakorzenionych upakowań, problemami istnienia zakorzenionych dekompozycji i zakorzenionych faktorów. Na mocy tych twierdzeń i wyników uzyskanych dla zakorzenionych upakowań, zakorzenionych dekompozycji i zakorzenionych faktorów podajemy

między innymi pełną klasyfikację ze względu na złożoność obliczeniową problemu istnienia $\{2K_2, H\}$-dekompozycji gdy H jest podwójną gwiazdą (tj. spójnym grafem, którego krawędzie dają się pokryć dwoma sąsiadującymi wierzchołkami).